

ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ  
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 25, 2022.

ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ  
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 25, 2022

THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS  
PROCEEDINGS OF THE SECTION OF NATURAL SCIENCES, 25, 2022

---

UDK 621.3.029:004.421.6

Igor Đurović<sup>\*†</sup>

## PREGLJED PARAMETARSKIH I NEPARAMETARSKIH ESTIMATORA FREKVENCIJSKI MODULISANIH SIGNALA

### *Sažetak*

U radu su obrađeni neki savremeni pristupi u estimaciji nestacionalnih frekvencijski modulisanih (FM) putem parametarskih i neparametarskih metoda. Kod neparametarskih metoda posebnu pažnju smo posvetili tehnici koja je nazvana Vitebijevim algoritmom (VA) za estimaciju trenutne frekvencije (TF) mada se može primijeniti i kod drugih parametara nestacionarnih signala. Među parametarskim tehnikama posebnu pažnju smo posvetili estimatoru kvazimaksimalne vjerodostojnosti (engl. *quasi maximum likelihood* — QML). Pokazano je da se putem QML mogu vršiti oba postupka — i parametarska i neparametarska estimacija.

### I UVOD

Interes nauke vezan za obradu nestacionarnih frekvencijski modulisanih (FM) signala postoji posljednjih barem 80 godina, mada se neki pokušaji mogu pratiti i ranije [1–3]. Posebna dinamika je bila u doba razvoja prvih naprednih radarskih sistema. Od tada do danas oblast primjene je proširena i na savremene komunikacije, multimedije, bioinformatiku, obradu mehaničkih signala, prepoznavanje govora itd. [4, 5]. Principi obrade ovih signala suštinski zavise od nivoa informacija koje imamo o njima. Ako nemamo informacija o signalu, odnosno pojavi koju želimo da obradimo, pravi alati su oni iz domena analize signala. U ovom slučaju izdvajaju se tehnike vremensko-frekvencijske (VF) i vremensko-skalarne (VS) obrade signala [4–6]. Nekoliko osnovnih informacija o ovim tehnikama može se pročitati u sekciji II ovoga rada, kao i u knjigama i preglednim radovima

---

<sup>\*</sup> Igor Đurović, akademik CANU

[4–7]. Fokus ovoga rada je na sekcijama III i IV. U sekciji III obrađene su neke od tehnika neparametarske estimacije signala. Za ovim tehnikama posežemo kada iz analize ili nekog drugog prethodnog znanja imamo informaciju o broju, osnovnu ideju o modulaciji signala i generalnom ponašanju komponenti. Rezultat neparametarske estimacije je procjena željene karakteristike signala u svakom trenutku u posmatranom intervalu, odnosno funkcije koja predstavlja neku karakteristiku signala za svaki trenutak  $t$  iz datog intervala. Neparametarske tehnike su tokom razvoja podijeljene u dvije kategorije: tehnike dizajnirane za povoljne uslove snimanja, odnosno kada je odnos signal–šum veoma visok (teži se dobiti što je moguće preciznija estimacija signala) i tehnike dizajnirane za nepovoljne uslove snimanja — nizak odnos signal–šum (cilj je bilo kakva pouzdana informacija o pojavi od interesa). Fokus sekcije III uglavnom je na posljednjim tehnikama pošto smo u tom domenu ostvarili značajan prodor posljednjih godina.

Parametarske tehnike se koriste onda kada je oblik funkcionalne zavisnosti između pojave koja se snima i vremena, odnosno frekvencije poznat [8, 9]. Najčešći parametarski model karakteristike je polinomijalni. Ovdje se posebno ističe klasa signala koji se nazivaju polinomijalno-fazni signali (*polynomial phase signals* — PPS) kod kojih se faza sa odgovarajućom tačnošću predstavlja kao polinom [10]. Vremenom se javila potreba i za drugim tipovima modulacija kao što je na primjer sinusoidalna [11]. Kod parametarskih estimatora postoji nekoliko karakteristika koje se žele simultano postići: visoka tačnost koja je u smislu srednje kvadratne greške bliska donjoj granici po Cramer-Raou (*Cramer-rao lower bound* — CRLB) [12]; korektan rad za što je moguće niži odnos signal–šum (niska *breakdown* tačka); prihvatljiva računaska složenost; robustnost na manja odstupanja u modelu. Pored ovoga, očekivanje je da su parametarski estimatori statistički nepristrasni (*bezbiasni*), odnosno da srednja vrijednost estimiranog parametra statistički bude jednaka tačnoj vrijednosti. Kao što ćemo vidjeti, ovaj zahtjev je u koliziji sa robustnošću na uticaj šuma a uticao je na čitav pravac razvoja neparametarskih estimatora koji je za 20-ak godina divergirao od razvoja neparametarskih tehnika [13]. Stoga je tehnika koju smo nedavno razvili i koja se naziva estimator kvazimaksimalne vjerodostojnosti (*quasi maximum likelihood* — QML) važan iskorak kojim se povezuju dvije klase estimatora, parametarske i neparametarske. Kao osnova koriste tehnike koje su statistički pristrasne ali otporne na uticaj šuma [8,14,15].

Rad je podijeljen u sljedeće djelove. Sekcija II daje osnovne informacije o VF analizi koje su neophodne za razumijevanje izlaganja vezana za neparametarske (sekcija III) i parametarske (sekcija IV) estimatore. Zaključak je dat u sekciji V.

## II VREMENSKO-FREKVENCIJSKE TRANSFORMACIJE

Furijeova transformacija (FT) može za nestacionarne signale da odgovori samo o zbirnom spektralnom sadržaju, ali ne i o promjenama spektralnog sadržaja tokom vremena. Stoga su razvijene VF transformacije. Pored [16], možemo izdvojiti publikacije, pregledne radove i monografije u ovoj oblasti [4–7]. Prve VF transformacije su razvijene u smiraj II svjetskog rata zbog potreba razvoja radarskih i sonarnih sistema. Prva ideja je bila sasvim jednostavna i intuitivna. Postoji mogućnost da se odsiječe dio signala oko nekog trenutka i sračuna FT odsječka. Ovo se može smatrati VF predstavljanjem za trenutak u centru posmatranja. Pomjeranjem odsječka dobijamo VF predstavljanje za druge vremenske trenutke. Navedena transformacija se naziva kratkotrajnom Furijevom (*Short time Fourier transform* — STFT) i definisana je na sljedeći način:

$$\text{STFT}(t, \omega) = \int x(t + \tau) w^*(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (1)$$

Funkcija  $w(\tau)$  se naziva funkcijom prozora (window function) i služi za odsijecanje željenog dijela signala. STFT se može smatrati rodonačelnikom svih linearnih VF predstavljanja (linearna kombinacija ulaznih signala daje linearnu kombinaciju izlaznih transformacija). STFT je uvedena u poznatom radu Denisa Gabora [17]. Do danas je ova transformacija ostala upotrebljiva i značajna tako da se slobodno može reći da se u posljednjih desetak godina razvoj vraća svojim korijenima, odnosno ponovo se fokusiramo na STFT i poboljšanje njenih karakteristika. Pored pomenutih, u linearne VF transformacije spadaju i one zasnovane na vejvlet i S-transformaciji [17–22] koje ovdje neće biti obrazlagane.

Posmatrajmo sada slučaj signala sa konstantnom amplitudom i promjenljivom fazom:

$$x(t) = A \exp(j\phi(t)). \quad (2)$$

Pretpostavimo da se u okolini posmatrane tačke faza signala može razviti u Taylorov red [23]:

$$\phi(t + \tau) = \phi(t) + \phi'(t)\tau + \frac{\phi''(t)}{2!}\tau^2 + \frac{\phi'''(t)}{3!}\tau^3 + \dots + \frac{\phi^{(m)}(t)}{m!}\tau^m + \dots \quad (3)$$

STFT nije idealno koncentrisana na trenutnoj frekvenciji (TF)  $\omega(t) = \phi'(t)$  zbog postojanja članova faze višeg reda, odnosno izvoda faze  $\phi''(t)$ ,  $\phi'''(t)$  i viših. Ovi članovi donose dva problema: pomjeraju TF estimaciju sa pozicije maksimuma (unose *bias* u estimaciju) i čine da se amplituda VF predstavljanja smanji, odnosno da se „razmaže“ u VF ravni te se potencijalno signalna komponenta može učiniti neprepoznatljivom.

Stoga se kao ideja nametnula mogućnost da se koncentracija transformacije može popraviti kompenzacijom članova višeg reda u fazi putem lokalne polinomijalne FT (LPFT):

$$\text{LPFT}_{\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_m}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) w^*(\tau) \exp(-j\omega\tau - ja_2\omega_2\tau^2 - ja_3\omega_3\tau^3 - \dots - ja_m\omega_m\tau^m) d\tau. \quad (4)$$

Parametri  $a_2, a_3, \dots, a_m$  su determinističke vrijednosti koje se u radovima definišu na različite načine. Najčešće vrijednosti su  $a_i=1$ , za svako  $i$ ,  $a_i=1/i$  za  $i>0$  i  $a_i=1/i!$  za svako  $i$ . Očigledno da povećanje koncentracije u VF ravni kao i „izoštavanje“ VF predstavljanja plaćamo višedimenzionom pretragom. Često se LPFT ograničava na  $m=2$  kako bi se umanjio problem sa višedimenzionom pretragom. U toj formi LPFT se može povezati sa frakcionom FT (FrFT) koja je takođe posljednjih godina izuzetno popularna.

Pošto su sve uvedene linearne transformacije kompleksne funkcije, pa se u estimaciji parametara koriste kvadrati odgovarajućih modula. Kod STFT ta veličina naziva se spektrogramom:

$$\text{SPEC}(t, \omega) = |\text{STFT}(t, \omega)|^2. \quad (5)$$

Alternativni pravac je da se „izoštavanje“ VF reprezentacije postigne uvođenjem nelinearnosti, odnosno da se transformacije računaju putem autokorelacija signala. Osnovna nelinearna VF reprezentacija je Wignerova distribucija (WD):

$$\text{WD}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (6)$$

Ovu transformaciju uveo je Eugen Wigner 1932. godine u kvantnu fiziku, za šta je 1963. dobio Nobelovu nagradu. Istini za volju, i u samom radu [1] piše da je ideju dobio od drugog mađarskog fizičara Lea Szilarda (idejni tvorac Menhetn projekta), ali originalni Szilardov tekst ne postoji, mada se pretpostavlja da je sličnu relaciju koristio u istraživanjima vezanim za termodinamiku. U obradu signala ova je transformacija uvedena nešto kasnije od strane Villea [2] ponovo u doba kada je interes stručne i naučne javnosti u ovoj oblasti bio koncentrisan na proučavanje radarskih signala. WD je poslužila za dinamični razvoj u oblasti bilinearnih i transformacija višeg reda koje su opet izrodile niz veoma poznatih tehnika, ali i nove probleme koje su klatno razvoja tehnika za procesiranje nestacionarnih signala posljednjih godina ponovo gurnulo u pravcu linearnih transformacija.

WD je idealno koncentrisana na TF linearnog FM signala. Za signale višeg reda i dalje postoji statističko odstupanje pozicije maksimuma u VF ravni od TF sada uzrokovano samo neparnim članovima faze:

$$\phi\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \phi\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = \phi'(t) + \phi'''(t) \frac{\tau^3}{4 \cdot 3!} + \phi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{2^4 \cdot 5!} + \dots + \phi^{(2k+1)}(t) \frac{\tau^{2k+1}}{2^{2k} \cdot (2k+1)!} + \dots \quad (7)$$

Između ostalih problema kod WD (i drugih nelinearnih transformacija) vrijedi izdvojiti pojavu kros-članova kod multikomponentnih signala

$$x(t) = \sum_{i=1}^Q x_i(t). \quad (8)$$

WD ovog signala je jednaka:

$$\text{WD}(t, \omega) = \sum_{i=1}^Q \text{WD}_{ii}(t, \omega) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^Q \sum_{j=i+1}^Q \text{WD}_{ij}(t, \omega) \right\} \quad (9)$$

gdje je  $\text{WD}_{ii}(t, \omega)$  WD signala  $x_i(t)$  tzv. auto-član dok su komponente  $\text{WD}_{ij}(t, \omega)$  za  $i \neq j$  kros-članovi uzrokovani međusobnim djelovanjem različitih komponenti  $x_i(t+\tau/2)x_j^*(t-\tau/2)$ . Kros-članovi su oscilatorni i imaju amplitudu koja može biti veća od amplitude auto-članova, a pozicionirane su između signalnih komponentni.

Nelinearne transformacije su uzročnik i drugih problema tipa potrebe za preodabiranjem signala kako bi se izbjegao efekat pojave lažnih komponenti, odnosno kopija originalnih komponenti na dislociranim frekvencijama — *aliasinga* itd. Jedan od načina da se umanje kros-članovi je primjena naprednih tehnika filtriranja u tzv. *ambiguity* domenu. Međutim, inheretno sama WD uvećava uticaj šuma na signal, a filtriranje po pravilu dodatno slabi izlazni odnos signal-šum.

Kod monokomponentnih signala izoštravanje komponenti se može postići tako što se eliminišu rezidualni članovi višeg reda koji postoje u (7). Uzmimo da se to postiže sumom dvije simetrične fazne difference u odnosu na vremenski trenutak  $t$  putem autokorelacije:

$$a\phi(t + b\tau) - a\phi(t - b\tau) + c\phi(t + d\tau) - c\phi(t - d\tau). \quad (10)$$

Razvijanjem u red navedenih faznih funkcija do trećeg reda faze dobijamo:

$$a\phi(t+b\tau)-a\phi(t-b\tau)+c\phi(t+d\tau)-c\phi(t-d\tau)=a\phi'(t)+a\phi'''(t)\frac{3b^3\tau^3}{3!}+c\phi'(t)+c\phi'''(t)\frac{3d^3\tau^3}{3!}. \quad (11)$$

Sada svodimo da je  $a+c=1$  da bi rezultujuća faza bila jednaka TF, dok da bismo imali eliminisan treći izvod faze, mora da važi  $ab^3+cd^3=0$ . Ovo je sistem sa 2 jednačine i 4 nepoznate pa se otvara pitanje njegovog rješavanja. Postoje suštinski dvije strategije [24, 25] koje se mogu i kombinovati, od kojih je jedna da se fiksiraju cjelobrojne vrijednosti koeficijenata  $a$  i  $c$ , dok bi koeficijenti  $b$  i  $d$  mogli biti necjelobrojni, dok je alternativa da se koeficijenti  $b$  i  $d$  na neki način fiksiraju (da su npr. cjelobrojni ili pogodni razlomci) dok se onda traže odgovarajuće vrijednosti  $a$  i  $c$ . Ako usvojimo da je  $a=-1$ , dobijamo  $c=2$  (najmanje vrijednosti za koje možemo dobiti smislena cjelobrojna rješenja prve jednačine) dobijamo da  $d^3=1/2b^3$ . Odomaćeno rješenje je  $d=0.675$  i  $b=0.85$ . Odgovarajuća transformacija je jedan primjer polinomijalne Wigner(-Villeove) distribucije višeg reda [26]. Ove transformacije se mogu dalje proširivati i usložnjavati da bi izašle u susret dodatnim kriterijumima koji se postavljaju u cilju eliminisanja uticaja unutrašnjih interferencija. Nelinearnost donosi mnoštvo problema u realizaciji a i rezultati, posebno u odnosu na uticaj šuma, značajno se pogoršavaju. Alternativno kao i kod LPFT na autokorelaciju se može primijeniti isti postupak kao kod generalizacije STFT u pravcu LPFT. Takva tehnika naziva se WD višeg reda (*high-order Wigner distribution* — HO-WD) sa problemom vezanim za višedimenzionu pretragu [26].

### III NEPARAMETARSKA ESTIMACIJA FM SIGNALA

Posmatrajmo signal (2). Kod neparametarskih estimatora zainteresovani smo da odredimo fazne karakteristike u svakom trenutku. Posmatraćemo TF kao najznačajniji parametar ovog signala

$$\omega(t)=\phi'(t) \quad (12)$$

Od nedavno često se posmatra i drugi izvod faze  $\Omega(t)=\phi''(t)$  koji se naziva *chirp-rate*. Može se estimirati iz lokalne LPFT za  $m=2$  ali i iz estimatora *chirp-ratea* (kubična fazna funkcija — *cubic phase function* — CPF) [27]. Smatraćemo da je signal zahvaćen bijelim Gausovim šumom sa nezavisnim realnim i imaginarnim djelovima sa kovarijansom  $E\{v(t_1)v^*(t_2)\}=\sigma_\xi^2\delta(t_1-t_2)$ , gdje je  $\sigma_\xi^2$  varijansa, dok je  $E\{v(t_1)v(t_2)\}=0$ . Varijanse realnog i imaginarnog dijela su jednake  $\sigma_\xi^2/2$ . Ulazni odnos signal-šum signala izražen u decibelima je [dB]

$$\text{SNR}=10\log_{10}(A^2/\sigma_\xi^2)[\text{dB}]. \quad (13)$$

Kvalitet pojedinih tehnika parametarske estimacije se izražava mjerama kao što su srednja kvadratna, srednja apsolutna greška itd., koje ovdje zbog raspoloživog prostora neće biti definisane, ali se mogu koristiti definicije široko upotrebljavane u literaturi.

### III.1. Tradicionalni estimatori

Jedan od najstarijih estimatora je zasnovan na brojanju prolazaka signala kroz nulu. Očigledna je činjenica da što je broj prolazaka kroz nulu veći, to je TF veća i obrnuto. Koristi se kod (starijih) komunikacionih sistema i za procesiranje seizmičkih podataka. Broj prolazaka kroz nulu se računa kao broj susjednih odbiraka signala koji imaju različit predznak  $\text{sign}[x(n)x(n+1)] < 0$  (ovdje posmatramo odbirke  $x(n) = x(n\Delta t)$  gdje  $\Delta t$  je korak odabiranja). Na primjer, ako je broj prolazaka kroz nulu  $Z_x$  u intervalu širine  $T_x$ , tada se TF može estimirati kao  $(2\pi)Z_x/2T_x$  (imenilac je podijeljen sa 2 jer tokom jedne periode imamo dva prolaska kroz nulu). Premda je ovaj estimator tokom godina usavršavan, možemo reći da nije ni otporan na šum ni dovoljno tačan. Preciznost postupka je bolja za uže intervale, ali se stabilniji rezultati dobijaju za šire pa kada uzmemo u obzir ovu neodređenost uz osjetljivost na šum koji može da generiše brojne lažne prolaskе kroz nulu, predmetna tehnika je zapostavljena i u teoriji i u praksi posljednjih dekada.

Jedna od osobina koju zadovoljavaju brojna VF predstavljanja odnosi se na prvi moment VF prezentacije računat po vremenu:

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega \text{TF}_x(t, \omega) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \text{TF}_x(t, \omega) dt} = \omega(t). \quad (14)$$

Na prvi pogled idealna TF estimacija bez statističkog odstupanja za proizvoljnu frekvencijsku modulaciju. Međutim, ovaj estimator je osjetljiv i na najmanju pojavu šuma. Ako je signal superponiran šumu (ovdje dajemo relaciju za diskretnu verziju signala), srednja vrijednost i varijansa estimacije dobijena putem momenata WD je:

$$E\{\hat{\omega}(n)\} = \omega(n) \quad (15)$$

$$\sigma_{\text{mom}}^2 = E\{(\hat{\omega}(n) - \omega(n))^2\} = \frac{1}{12} \left[ \frac{\Delta t}{\pi} \right]^2 \frac{(2A^2 + \sigma_{\xi}^2) \sigma_{\xi}^2}{A^4}. \quad (16)$$

Vidimo da je varijansa ovoga estimatora nezavisna od širine prozora, dok kod drugih estimatora varijansa opada sa širinom prozora što jasno ukazuje na osjetljivost na uticaj šuma.

### *III.2. Estimatori zasnovani na poziciji maksimuma VF predstavljanja*

Kao što smo vidjeli, dva intuitivna TF estimatora veoma su osjetljiva na uticaj šuma. Međutim, jedan drugi jednostavni TF estimator predstavlja osnovu razvoja brojnih drugih tehnika. To je estimator zasnovan na poziciji maksimuma VF predstavljanja. Radi simplifikacije, za sada ćemo posmatrati estimator zasnovan na WD. Suštinski svi važni zaključci važe i za druga VF predstavljanja. Posmatrajmo estimator zasnovan na poziciji maksimuma WD [28-30]:

$$\hat{\omega}(t) = \arg \max_{\omega} \text{WD}(t, \omega) \quad (17)$$

Motivacija je krajnje jednostavna: za linearni FM signal ova transformacija se idealno koncentriše na TF. Za signale sa nelinearnom modulacijom ovo nije slučaj pa se traže modifikacije predmetnog pristupa, posebno u uslovima intenzivnog šuma. Premda su intuitivne modifikacije proučavane dugi niz godina, tek nakon preciznog sagledavanja statistika estimatora (17) bilo je moguće razviti metode koje su u stanju da daju zadovoljavajuće rezultate za dva tipična problema: visokopreciznu estimaciju u uslovima malog šuma; robusnu estimaciju u slučaju intenzivnog šuma.

Pobrojmo osnovne efekte koji umanjuju tačnost TF estimacije kod WD (svi osnovni zaključci važe i kod drugih TF estimatora). Detaljna razmatranja i izvođenja su data u radovima [31–33].

A. Efekt distretizacije u frekvencijskom domenu. U praksi radimo sa diskretizovanom WD sa  $N$  frekvencijskih odbiraka što daje srednju kvadratnu grešku diskretizacije:

$$\text{MSE}_{\Delta\omega} = (\pi^2)/(12(N\Delta t)^2). \quad (18)$$

Predmetna relacija je izvedene pod uslovom da je signal od interesa linearni FM. Ovakav način analize je zapravo uobičajen kod izvođenja statistika kod TF estimatora, i.e., pokušavaju se nezavisno posmatrati svi negativni efekti. Greška diskretizacije može se umanjiti povećanjem  $N$  (uvećani memorijski i računski zahtjevi) ili efikasnim i preciznim tehnikama interpolacije [34, 35]. U svakom slučaju ovaj efekat je najmanje problematičan od svih koje ćemo opisati.



### B. Statističko odstupanje (bias) u TF estimaciji

Ovaj efekat je karakterističan za nelinearno modulisane signale, odnosno kada faza signala ne može da se zapiše u obliku kvadratne funkcije. Precizno asimptotsko izvođenje biasa je obavljeno u radovima [31, 32]. Ovdje dajemo samo konačnu aproksimativnu i asimptotsku relaciju izvedenu pod uslovima opisanim u [31, 32] uz pretpostavku da autokorelacija signala nije zaobljavana prozorskom funkcijom:

$$E\{\Delta\omega_h(t)\} \approx h^2 \phi'''(t)/40 \quad (18)$$

gdje je  $h=N\Delta t$  širina prozora kod WD. Premda se radi o krajnje simplifikovanoj aproksimaciji sa zanemarenim uticajem članova višeg reda, jasna je glavna poruka: što je prozor širi (veće  $h$ ), to je i veće statističko odstupanje, što je i logično jer sa širenjem prozora gubimo mogućnost dobijanja precizne informacije o lokalnim promjenama TF.

### C. Varijansa TF estimacije

Ova statistika takođe je izvedena u [31, 32] s time da je jedna od najvažnijih pretpostavki da se pozicija maksimuma nalazi u okviru auto-člana, odnosno da nije pomjerena van zone auto-člana. Varijansa se aproksimativno u asimptotskoj formi može zapisati kao:

$$\text{var}\{\Delta\omega_h(t)\} \approx \frac{\Delta t}{12h^3} \frac{\sigma_\xi^2}{2A^2} \left(1 + \frac{\sigma_\xi^2}{2A^2}\right). \quad (19)$$

Forma varijanse slična je srednjoj kvadratnoj greški kod estimatora zasnovanog na momentima, ali ovdje opada sa kubom širine prozora, dok je kod estimatora zasnovanog na momentima konstantna. Iz izraza za bias i varijansu slijedi da je srednja kvadratna greška u procesu estimacije (pod uslovom da je estimacija u okviru auto-člana, odnosno da je uticaj prevashodno šuma relativno mali):

$$\text{MSE}\{\Delta\omega_h(t)\} = \text{var}\{\Delta\omega_h(t)\} + E^2\{\Delta\omega_h(t)\} \approx \frac{\Delta t}{12h^3} \frac{\sigma_\xi^2}{2A^2} \left(1 + \frac{\sigma_\xi^2}{2A^2}\right) + \frac{h^4 [\phi'''(t)]^2}{1600}. \quad (20)$$

Iz relacije je jasno da postoji optimalna širina prozora za koju se srednja kvadratna greška minimizuje. Nažalost, određivanje optimalne širine prozora nije trivijalan problem jer zavisi od viših redova faze signala čija je estimacija

teža nego za TF. Stoga je dizajniran algoritam za TF estimaciju na osnovu presijecanja intervala povjerenja.

#### D. Uticao velikog šuma

Dok je šum relativno mali, pozicija maksimuma nalazi se u okviru auto-člana. Sa povećanjem šuma može da dođe do situacije da maksimum VF transformacije pod uticajem šuma bude potpuno van auto-člana. U tom slučaju prethodno uvedene relacije za *bias* i varijansu ne važe dok glavna greška u estimaciji postaje prouzrokovana velikim šumom. Ovakav šum ima impulsnu formu i može da uzme proizvoljnu vrijednost van signalne komponente. Vjerovatnoća greške prouzrokovana velikim šumom ima oblik [33]:

$$P_E = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi) p(\xi) d\xi \quad (21)$$

$$G(\Xi) = 1 - \left( 1 - 0.5 \operatorname{erfc} \left( \frac{\Xi}{\sqrt{2} \operatorname{var} \{ \Delta \omega_h(t) \}} \right) \right)^M \quad (22)$$

$$p(\Xi) = \frac{\exp \left( -(\Xi - A_{WD})^2 / 2 \operatorname{var} \{ \Delta \omega_h(t) \} \right)}{\sqrt{2\pi} \operatorname{var} \{ \Delta \omega_h(t) \}} \quad (23)$$

gdje je  $A_{WD}$  maksimalna vrijednost na poziciji kada nema uticaja šuma.

Vjerovatnoća greške drastično raste sa smanjivanjem širine prozora. Osnovna ideja za umanjivanje ovoga šuma je da se upotrijebe robusni nelinearni filtri iz grupe median filtra pošto, kao što smo rekli, ovaj šum pokazuje karakteristike impulsnog šuma. Nažalost, performanse ovakve tehnike nijesu zadovoljavajuće. Razlog leži u korelisanosti grešaka: ako se greška dogodi u nekom trenutku, velika vjerovatnoća je da će se desiti i u čitavom prozoru kojem pripadaju odbirci koji su prouzrokovali grešku u TF estimaciji u posmatranom trenutku. Stoga se moralo potražiti rješenje koje će da prevaziđe ograničenja nelinearnog filtriranja u ovoj oblasti. Kao što će biti objašnjeno, ovakvo rješenje postoji i predstavlja varijantu Vitebijevog algoritma (VA).

#### E. Ostali tipovi grešaka u procesu TF estimacije

U procesu TF estimacije mogu se pojaviti i neke druge greške. Ovdje pominjemo tri:

- uticaj unutrašnjih interferencija;

- uticaj kros-članova;
- gubitak dijela komponente.

Unutrašnje interferencije su pojava lažnih oscilatornih komponenti obično gotovo paralelnih signalnim komponentama u VF ravni [4]. Uzrok ovih pojava je u nelinearnosti faze baš kao i kod biasa i djelimično se kontrola uspostavlja smanjivanjem širine prozora ili drugim metodima filtriranja ovih neželjenih efekata. Kod širokih prozora unutrašnje interferencije mogu da dovedu do degradacije VF predstavljanja do potpune neprepoznatljivosti. Ovo je dugo bio fenomen prisutan u telekomunikacijama kod frekvencijske i fazne modulacije gdje je dovodio do zahtjeva za nepotrebno širenje frekvencijskog opsega. U mnogim aspektima unutrašnje interferencije se ponašaju kao i kros-članovi kod multi-komponentnih signala, čak i onda kada nema drugih komponenti.

Kros-članovi kod pojedinih transformacija (WD i srodnih) mogu da budu veći od signalnih komponenti. Srećom mogu se djelimično potisnuti. Veliki problem ovdje je činjenica da signalne komponente mogu da se djelimično nalaze u istom dijelu VF ravni sa kros-članovima. Srećom, ako su različite amplitude ili ako se mogu razdvojiti u nekom drugom domenu, onda postoji mogućnost da se ove komponente individualno estimiraju. Ako ne postoji mogućnost razdvajanja komponenti ni na jedan pomenuti način, postoje radovi [36] u kojima su komponente prepoznavane na osnovu kontinualnosti TF ili faze. Prva mogućnost postoji ako signal nema nagle promjene u frekvenciji, dok se druga mogućnost koristi u slučajevima naglih promjena u frekvenciji, što se plaća inferiornim rezultatima u uslovima šuma.

Treća pomenuta situacije česta je u praksi. Na primjer, kod radarskih signala u dijelu trajanja signala mi ne možemo detektovati postojanje signalne komponente ili dobijamo nelogične rezultate [37]. Ako pretpostavljamo da signal postoji, mogućnost interpolacije TF na osnovu poznatih djelova estimacije, dok ako u postojanje komponente nijesmo sigurni, jedino nam na raspolaganju ostaju statistički testovi kojim testiramo hipotezu o postojanju signalne komponente.

### *III.3. Algoritam zasnovan na presijecanju intervala povjerenja*

Intervali povjerenja su često korišćena sredstva u statističkom testiranju hipoteza. Već smo vidjeli da tačnost TF estimatora znatno zavisi od širine prozora. Sa povećanjem širine prozora smanjuje se uticaj šuma a povećava bias. Dakle, kod užih prozora sigurniji smo da u nekom relativno širokom susjedstvu estimacije (čija širina zavisi od standardne devijacije kod TF estimatora) nalazi se tačna TF. Kako raste širina prozora, tako navedeni interval povjerenja postaje uži, ali istovremeno se pomjera njegova sredina čime postoji mogućnost da se unutar navedenog intervala zbog *biasa* ne nalazi tačna TF vrijednost.

Uspostavljanjem odgovarajućih uslova za širinu intervala povjerenja možemo da dobijemo TF estimaciju koja je kompromis između *biasa* i varijanse (standardnog odstupanja i uticaja šuma). Indikacija dobre estimacije vezana je za najširi prozor kada se intervali povjerenja presijecaju (*bias* je i dalje relativno mali a uticaj šuma umanjen), a u skladu sa odgovarajućom statističkom analizom ponekad se ova širina prozora koristi samo kao indikacija a za estimaciju usvajaju obično one dobijene nešto užim prozorima. Ovaj algoritam je originalno predložen u [39], sa detaljnom statističkom analizom u [31, 32]. Sumirajmo osnovnu varijantu ovog algoritma:

1. Sračunajmo TF reprezentacije sa različitim širinama prozora  $h$ ,  $TF_h(t, \omega)$ ,  $h \in H$  (ili sa nekim drugim parametrom dizajna takvim da postoji različito ponašanje *biasa* i varijanse u zavisnosti od parametra). Najужи prozor označimo sa  $h_0$ , a obično se bira da širine ostalih prozora zadovoljavaju geometrijsku progresiju  $h_i = ah_{i-1}$ ,  $a > 1$ .
2. Odredimo TF estimacije sa različitim širinama prozora:

$$\hat{\omega}_h(t) = \arg \min_{\omega} TF_h(t, \omega), \quad h \in H. \quad (24)$$

3. Za inicijalnu estimaciju usvojimo onu koja je dobijena sa najjužim prozorom:

$$\hat{\omega}_h(t) = \hat{\omega}_{h_0}(t). \quad (25)$$

4. Za svaki vremenski trenutak  $t$  tražimo najveće  $h_i$  iz skupa  $H$  za koje važi pravilo presijecanja intervala povjerenja:

$$|\hat{\omega}_{h_i}(t) - \hat{\omega}_{h_{i-1}}(t)| \leq \kappa [\hat{\sigma}_{h_i} + \hat{\sigma}_{h_{i-1}}]. \quad (26)$$

5. Kao finalna estimacija usvaja se  $\hat{\omega}_h(t) = \hat{\omega}_{h_i}(t)$ .

Nekoliko komentara na algoritam:

- $\kappa$  je osnovni dizajn parameter algoritma, što je veći to sa većom sigurnošću možemo tvrditi da se TF nalazi u intervalu povjerenja, ali isto tako postoji opasnost da procedura provjere presijecanja intervala povjerenja „pođe predaleko”, odnosno ka prozorima koji daju veliki *bias*. Obično se selektuje u granicama 2–5, ali pravilno podešavanje u velikoj mjeri zavisi od konkretne posmatrane VF transformacije te od parametra  $a$ ;
- $l$  se obično selektuje u granicama od 0 (posljednji prozor gdje postoji presijecanje intervala povjerenja), 1 (prethodni) do 2. Razlozi su detaljno

analizirani u [40], a ponovo zavise od posmatrane transformacije, ali sada i od  $\kappa$ ;

- $\hat{\sigma}_{h_i}$  je standardna devijacija u TF estimaciji (pogledati relaciju za varijansu TF estimatora kod WD (19)). Postavlja se naravno pitanje kako odrediti ovu standardnu devijaciju jer u njenom izrazu učestvuju nepoznate veličine: amplituda signala  $A$  i standardna devijacija (varijansa) ulaznog Gausovog šuma  $\sigma_\varepsilon^2$ . Srećom, kod FM signala postoje tehnike koje precizno estimiraju obje ove veličine od kojih se i po tačnosti i po jednostavnosti ističe [41] (primjenjiva za monokomponentne signale sa konstantnom amplitudom u intervalu posmatranja):

$$\hat{A} = \sqrt{2E_2^2 - E_4} \quad \sigma_\varepsilon^2 = |E_2 - \hat{A}^2| \quad (27)$$

gdje je  $E_i = \frac{1}{N} \sum_n |x(n\Delta t)|^i$ .

Predmetna analiza biasa i varijanse je našla primjene i u drugim oblastima [42]. Ipak, u datoj formi ograničena je gotovo isključivo na neparametarsku estimaciju u uslovima povoljnog odnosa signal–šum kada je u stanju da produkuje precizne rezultate, čak i u uslovima naglih promjena parametara signala.

Postoji više pristupa za poboljšanje rezultata u uslovima manje povoljnog odnosa signal–šum. Jedna takva tehnika je predložena u [43]. Skup prozora  $H$  dijeljen je u tri podskupa: uske prozore kod kojih je estimirana vjerovatnoća greške usljed velikog šuma (21) veća od nekog praga  $P_E(h) > P_1$ . Estimacije dobijene ovim prozorima nijesu uzimane u obzir. Prozore srednje širine procijenjena vjerovatnoća greške usljed velikog šuma nalazi u granicama  $P_2 \leq P_E(h) \leq P_1$ . TF estimacije se filtriraju robusnim filtrima iz klase median filtara i takve koristimo u algoritmu sa presijecanjem intervala povjerenja. Konačno, za estimacije koje su dobijene najširim prozorima iz skupa i koje produkuju vjerovatnoću greške usljed velikog šuma koja je manja od  $P_2$  ne provodimo median filtriranje. Postavlja se pitanje izbora pragova vjerovatnoća  $P_i$ ,  $i=1,2$ . Poznato je da su median filtri u stanju da eliminišu i do 50% impulse, a konstatovali smo da su greške prouzrokovane velikom šumom u TF estimaciji impulsne prirode. Međutim, isto tako ove su greške korelirane i grupišu se u pojedine intervale gdje je šum u datoj realizaciji nešto veći. Stoga granica  $P_1$  mora biti manja od 50% (obično se selektuje ne veće od  $1/3=33\%$ ). Sa druge strane median filter donekle deformiše estimaciju pa nije uputno filtrirati one estimacije gdje je malo vjerovatno da se pojave greške usljed velikog šuma. U praksi se stoga  $P_2$  postavlja u granicama 0.1–1%.

### III.4. Kros-Wignerova distribucija (XWD)

Još je u [44] uočeno da se postupkom koji je nazvan kros-Wignerova distribucija (XWD — *cross WD*) mogu dobiti TF estimacije koje su dosta otporne na uticaj velikog šuma. Predmetni postupak se može opisati kao:

- Odrediti WD i odgovarajuću TF estimaciju na osnovu pozicije maksimum WD (označimo sa  $\hat{\omega}_0(t)$  postavimo  $I=0$ ).
- Dok je  $I \leq I_{\max}$  ili dok  $\max |\hat{\omega}_I(t) - \hat{\omega}_{I-1}(t)| \leq \varepsilon_{\max}$  ponavljajmo sljedeće korake:
  - Inkrementirajmo  $I$ ;
  - Rekonstruisati fazu na osnovu TF estimacije:  
 $\hat{\phi}_I(n\Delta t) = \Delta t \sum_{k=k_0}^n \hat{\omega}_I(k\Delta t)$  i odgovarajući signal jedinične amplitude  $\hat{x}_I(t) = \exp(j\hat{\phi}_I(t))$ .
  - Sračunajmo XWD originalnog signala i rekonstruisanog signala  $\hat{x}_I(t)$

$$\text{XWD}_I(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau/2) \hat{x}_I^*(t - \tau/2) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (28)$$

- Predmetna XWD nije realna funkcija pa se na osnovu nje TF estimira na osnovu pozicije maksimuma apsolutne vrijednosti:

$$\hat{\omega}_1(t) = \arg \max_{\omega} |\text{XWD}_1(t, \omega)| \quad (29)$$

Premda je praksa pokazala da je ova metoda dobra sa stanovišta TF estimacije, nije imala veću popularnost do trenutka kada su izvedene asimptotske granice tačnosti u [45]. Rezultati izvođenja pokazuju da je bias veći nego kod WD, a da je varijansa manja. Ovo dalje pokazuje da je optimalna širina prozora manja nego kod WD. Stoga se uz odgovarajući oprez algoritam sa presijecanjem intervala povjerenja može primijeniti i kod XWD, što je i urađeno u [45] gdje su dobijeni veoma dobri rezultati sa značajnim poboljšanjem u odnosu na [31, 32].

Zaključimo razmatranje algoritma sa presijecanjem intervala povjerenja kratkim opisom nekih od najznačajnijih doprinosa koji ovdje nijesu detaljnije razmatrani. U [46] razmatrana je tehnika interpolacije TF u procesu estimacije. Pokazano je da je greška interpolacije istog reda veličine kao *bias* te se algoritam sa presijecanjem intervala povjerenja ne mora vršiti u svakom trenutku, već sa razmakom  $h_{\text{opt}}(t)/8$ , gdje je  $h_{\text{opt}}(t)$  optimalna širina prozora dobijena putem opisanog postupka u trenutku  $t$ . Predmetni postupak je korišćen za dobijanje adaptivnog VF predstavljanja na osnovu algoritma sa samo dvije širine prozora.

Dobijeni rezultati su korišćeni dalje za vremenski-promjenljivo filtriranje. Ekstenzija postupka je obavljena i za višedimenzione signale. Detaljna analiza parametara algoritma sa postupcima njihove optimizacije opisana je u [47, 48].

### III.5. Viterbijev algoritam za TF estimaciju

Težnja da se razvije algoritam koji će biti robustan na veliku količinu aditivnog šuma vodila je detaljnoj analizi vjerovatnoće greške prouzrokovane velikim šumom [33]. Uočena je pojava da ako pozicija maksimuma ne korespondira sa TF, velika je vjerovatnoća da će TF biti na nekoj od najvećih vrijednosti VF predstavljanja u datom trenutku. Približno je uočeno linearno opadanje navedene vjerovatnoće sa rednim brojem u sekvenci sortiranih odbiraka VF predstavljanja u datom trenutku. To je vodilo dizajniranju algoritma koji TF traži na osnovu dva kriterijuma:

- Pozicija odgovara što je moguće većoj vrijednosti VF predstavljanja;
- TF se ne mijenja znatno u uzastopnim vremenskim trenucima.

Ovo se može zapisati kao problem određivanje optimalne putanje  $k(n)$  koja zadovoljava:

$$\omega(n) = \arg \min_{k(n) \in K} \left[ \sum_{n=n_1}^{n_2-1} g(k(n), k(n+1)) + \sum_{n=n_1}^{n_2} f(\text{TF}(n, k(n))) \right] = \arg \min_{k(n) \in K} p(k(n); n_1, n_2) \quad (30)$$

gdje je  $K$  skup diskretnih frekvencijskih pozicija u VF ravni, dok je  $p(k(n); n_1, n_2)$  suma kriterijumskih funkcija  $g(x, y)$  i  $f(x)$ , duž linije  $k(n)$ , od trenutka  $n_1$  do  $n_2$ . Funkciju  $g(x, y)$  postavljamo neopadajuću na  $g(x, y) = g(|x - y|)$  u odnosu na apsolutnu razliku  $x$  i  $y$  (vrijednosti TF u susjednim odbircima  $x = k(n)$  and  $y = k(n-1)$ ). Uobičajeni izbor ove funkcije je:

$$g(x, y) = \begin{cases} c(|x - y| - \Delta) & |x - y| \geq \Delta \\ 0 & |x - y| < \Delta. \end{cases} \quad (31)$$

Detalji izbora parametara  $\Delta$  i  $c$  mogu se naći u [49]. Uobičajeni izbor  $\Delta$  je oko 3 (od 0 do 10), dok je uobičajeni izbor  $c$  oko 5 (od 2 do 15).  $f(x)$  je nerastuća funkcija u po argumentu  $x = \text{TF}(n, k(n))$ . Na ovaj način su veće vrijednosti VF reprezentacije bitniji kandidati za poziciju TF. Funkcija  $f(x)$  formira se sortiranjem  $\text{TF}(n, \omega)$ ,  $\omega \in K$  u nerastući niz:

$$\text{TF}(n, \omega_1) \geq \text{TF}(n, \omega_2) \geq \dots \geq \text{TF}(n, \omega_j) \geq \dots \geq \text{TF}(n, \omega_M), \quad (32)$$

Tada se funkcija  $f(x)$  formira kao

$$f(\text{TF}(n, \omega_j)) = j-1 \quad (33)$$

Postavilo se pitanje kako odrediti predmetnu putanju pošto je broj mogućih podstanja reda  $NM$  gdje su  $N \times M$  dimenzije VF ravni. Srećom, rješenje ovoga problema može se naći putem varijante VA koja je za ovu svrhu analizirana i predložena u [49]. VA imam mnoštvo primjena u nauci. U opštem slučaju koristi se za određivanje „skrivenih“ stanja koja se mogu opisati sistemima uslovnih vjerovatnoća. Predložen je prvobitno u teoriji kodova i do danas je jedan od najpopularnijih postupaka za dekodiranje prije svega konvolucionih i turbo-kodova. Predložio ga je Endrju Viterbi (Andrew Viterbi), a inspiraciju je pronašao u običaju — igri koja se izvodi tokom jevrejskog praznika Purim u kojoj učestvuju pripadnici raznih generacija (kao kod Njegoša „po tri pasa vrte se u kolo“). Viterbi je našao način da poveže prethodnike (pretke), odnosno prethodna stanja ili bite sa dekodiranjem u narednim stanjima (potomcima) [50].

Za svaki trenutak  $n_i$  tehnika određuje najbolje putanje (nazivaju se najboljim parcijalnim putanjama u VA terminologiji) do frekvencijskih odbiraka  $\omega_j$ . U narednom trenutku određivanje parcijalnih najboljih putanja se određuje na osnovu parcijalnih najboljih puteva do prethodnog trenutka, a „kolo“ se nastavlja vezama između frekvencijskih odbiraka u dva trenutka. Složenost određivanja najbolje parcijalne putanje u jednom trenutku je  $N^2$ , a ukupna složenost algoritma je kubna  $O(MN^2)$  uz složenost sortiranja koja je  $O(NM \log M)$ . Složenost samoga algoritma je veća od složenosti izračunavanja VF predstavljanja, ali je prihvatljiva u najvećem broju aplikacija, a pored toga podložna je i brojnim usavršavanjima.

Zapišimo formalno korake algoritma.

a) Neka su određeni parcijalni najbolji putevi koji povezuju trenutak  $n_1$  sa svim frekvencijama u trenutku  $n_i$ . Označimo ih sa  $\pi_i(n; \omega_j)$ ,  $n \in [n_1, n_i]$ ,  $\omega_j \in K$ . Trenutna TF estimacija korespondira onom parcijalnom najboljem putu koji daje najmanju vrijednost kriterijumske funkcije.

b) Parcijalni najbolji putevi u narednom trenutku  $n_{i+1}$  može se prikazati kao konkatencija  $\pi_i(n; \omega_j)$ ,  $n \in [n_1, n_i]$ , sa  $(n_{i+1}, \omega_j)$ , tako da produkuju najmanju vrijednost kriterijumske funkcije za svako  $\omega_j$ . Kriterijumska funkcija može se sračunati kao:

$$p(\pi_i(n; \omega_j); n_i, (n_i, \omega_j)) + g(\omega_i, \omega_j) + f(\text{TF}(n_{i+1}, \omega_j)) \quad (34)$$

Pretragom  $l$  koje daje najmanju vrijednost ove kriterijumske funkcije računamo odgovarajuću najbolju parcijalnu putanju ponavljajući predmetni postupak dok ne prođemo kroz čitavu VF ravan (sve vremenske odbirke) da bi na kraju odluku o TF estimaciji donijeli na osnovu one putanje koja daje najmanju vrijednost kriterijumske funkcije.



U literaturi je ovaj pristup postigao značajan uspjeh. Više radova je posvećeno unapređenju osobina, prije svega vezano za brzinu izračunavanja ili prilagođavanje drugim VF predstavljajima ili okolnostima koje se mogu pojaviti (na primjer multikomponentnim signalima). Činjenica je, međutim, da do danas nije nađen bolji način da se sračunaju kriterijumske funkcije, odnosno izmjene u obliku ovih funkcija nijesu dovele do poboljšanja rezultata što sugerise da su intuitivno određene funkcije  $f()$  i  $g()$  bliske optimalnim, odnosno da vjerovatno korespondiraju sa logaritmom uslovne gustine vjerovatnoće za vrijednosti odbiraka VF reprezentacije (što bi u slučaju VA bilo optimalno). Ovo je i sugerisano numeričkim analizama za vjerovatnoću pojave velikog šuma, ali do sada nije analitički potvrđeno. Spisak bitnijih referenci u oblasti VA [36, 49, 51–58].

Pored ove tehnike vrijedi istaći i mogućnost da se neparametarska estimacija vrši primjenom tehnika evolucionog izračunavanja i koje se ponekad svrstavaju u vještačku inteligenciju. Po fleksibilnosti i jednostavnosti podešavanja parametara ove tehnike su inferiorne u odnosu na VA.

Demonstrirajmo sada predstavljene algoritme na dva primjera. Prvi primjer je linearni FM signal (TF oblika  $\omega(t)=at+b$ ) sa estimatorima zasnovanim na maksimumu pozicije WD (isprekidana linija); jednostavna popravka ovog postupka median filtriranjem (zelena linija) i VA (crvena linija). Vidimo da se već na SNR=-2dB pojavljuju prve pogreške u TF estimaciji putem pozicije maksimuma WD. Median filter uspješno eliminiše ove pogreške sve do -4dB, međutim na -6dB zbog broja pogreški prouzrokovanih velikim šumom i njihove koreliranosti median filter više ne daje zadovoljavajuće rezultate. Međutim, VA daje odlične rezultate sve do SNR=-10dB.

U drugom eksperimentu razmatrali smo srednju kvadratnu grešku u TF estimaciji za slučaj TF oblika  $\omega(t)=a|t|$ . Analizirali smo različite širine prozora kod estimatora zasnovanog na poziciji maksimuma WD i VA kao i modifikovani algoritam zasnovan na presijecanju intervala povjerenja. Vidimo da najširi prozori ne moraju u ovom slučaju da daju najbolje rezultate, čak ni za nizak odnos signal-šum zbog velikog biasa. Vidimo da estimator zasnovan na poziciji maksimuma WD ne može da produkuje tačne rezultate za SNR<2dB. VA, međutim, radi dobro za SNR=-3dB, a može zadovoljavajuće rezultate da obezbijedi i kod širih prozora čak i na SNR=-5dB. Što se tiče modifikovanog algoritma sa presijecanjem intervala povjerenja ima isti prag kao i algoritam na osnovu pozicije maksimuma WD sa najboljim pojedinačnim prozorom. Ovo je i razumno jer je u pitanju šema koja za svaki vremenski trenutak bira jednu od estimacija ostvarenih sa prozorima fiksne širine. Međutim, kao povoljnost za svaki odnos signal-šum iznad toga praga algoritam modifikovani algoritam daje bolje rezultate nego bilo koja WD sa fiksnim prozorom, čime takođe opravdava svoju upotrebu.

#### IV PARAMETARSKI ESTIMATORI NESTACIONARNIH SIGNALA

Kod parametarskih estimatora posjedujemo parametarski model putem kojega signal ili njegovu fazu možemo estimirati samo na osnovu nekoliko parametara. Na primjer, za pravu liniju su nam dovoljna dva parametra, za krug samo tri, parabolu takođe tri, za elipsu četiri itd.

Slična situacija postoji i kod signala čije su frekventne karakteristike brzo promjenljive, odnosno ako smo u stanju da modelujemo ovaj signal, prevashodno njegovu fazu, sa modelom koji ima mali broj parametara problem estimacije možemo svesti na estimiranje tih parametara umjesto da vršimo estimaciju karakteristike u svakom vremenskom trenutku.

Poznati parametarski modeli nestacionarnih signala su:

- polinomijalno-fazni model (PPS-*polynomial phase signal*) [8, 10, 14];
- sinusoidalno-fazni model [9];
- spregnuti (*coupled*) model [59];
- *tex-sec* model [60] itd.

Premda su ovi modeli bitni u različitim aplikacijama, ovdje ćemo se zadržati na onom modelu koji se najčešće proučava, a to je PPS. PPS je suštinski motivisan Vajerštrasovom teoremom po kojoj se svaka neprekidna funkcija može modelovati putem polinomijalne funkcije sa odgovarajućoj tačnosti koja zavisi od reda polinoma.

Dugo su PPS modelovani sa polinomima nižeg reda — drugog, trećeg, eventualno četvrtog. Obrazloženja je bilo nekoliko: navedeni redovi polinoma su dovoljni; performanse estimatora padaju sa povećanjem reda polinoma; signal možemo podijeliti u kraće segmente koji se mogu modelovati PPS nižeg reda... Istinski rečeno, problem je što nijesmo raspolagali tehnikama koje su u stanju da estimiraju signal višeg reda sa zadovoljavajućom tačnošću.

PPS može se definisati na sljedeći način:

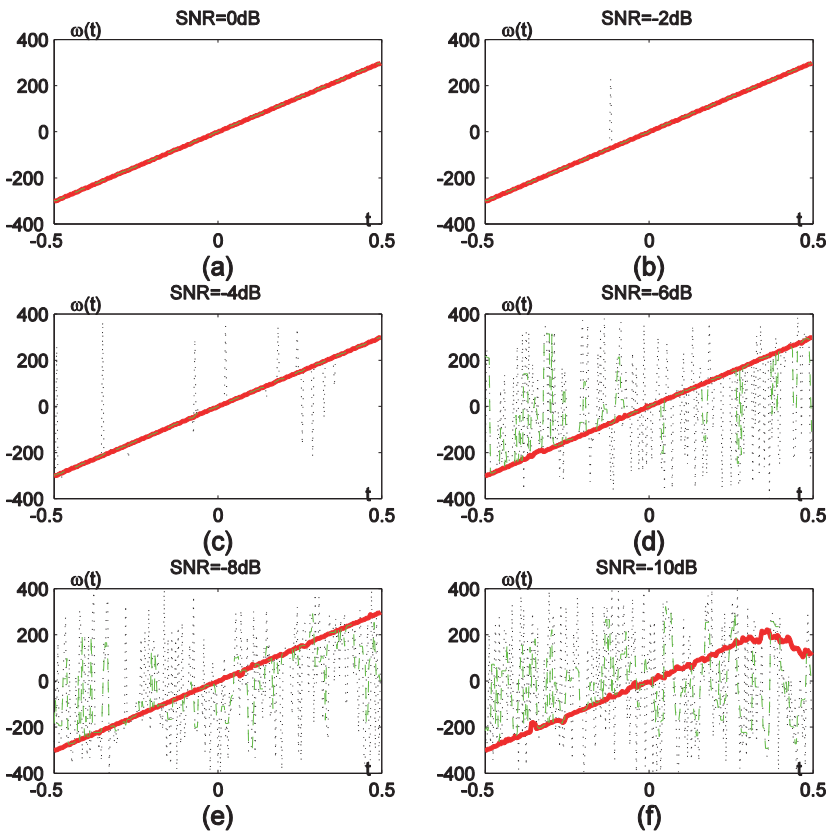
$$x(t) = A(t) \exp \left( j \sum_{m=0}^M c_m a_m t^m \right) \quad (35)$$

Radi pojednostavljenja analize, smatraćemo da su signali sa konstantnom amplitudom  $A(t)=A$ . Koeficijenti  $a_m$  predstavljaju parametre koje želimo estimirati, dok su  $c_m$  zapravo konstantni koeficijenti koji se na različit način uvode u radovima doprinoseći konfuziji. Naime, ovi koeficijenti se najčešće definišu kao  $c_m=1$  za svako  $m$ ,  $c_m=1/m!$  za svako  $m$  i  $c_m=1/m$  za  $m>0$ , pa u skladu sa time nije ponekad sasvim jednostavno porediti rezultate koji su dobijeni i prezentirani baš zbog ovih koeficijenata, a ponekad i zbog činjenice da se diskretni signal definiše kao:

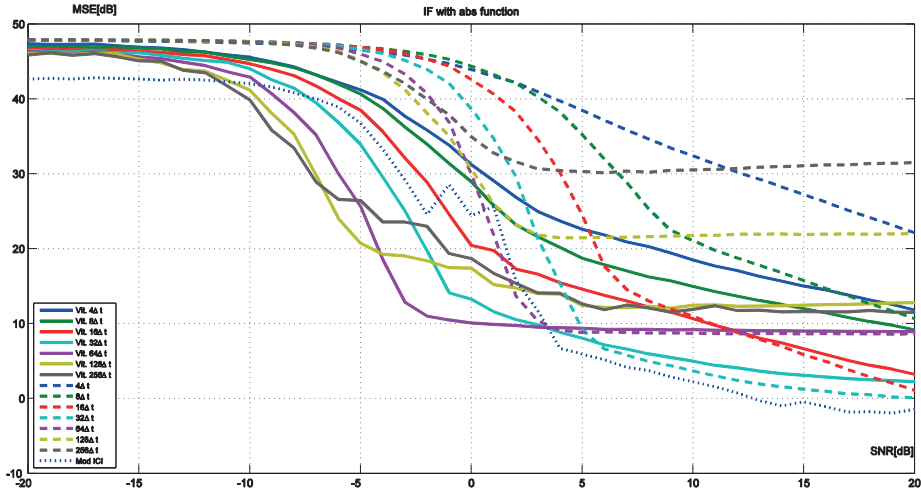
$$x(n) = A(n) \exp \left( j \sum_{m=0}^M c_m a_m n^m (\Delta t)^m \right) \quad (36)$$

inkorporirajući u definiciju koeficijenata korak odabiranja što rade pojedini naučnici.

Granica tačnosti estimacije parametara je dobro poznata i predstavlja CRLB za dati model [12]. Na primjer, za  $M=4$ -ti CRLB su  $\text{CRLB}\{a_0\}=225\sigma^2/128NA^2$ ,  $\text{CRLB}\{a_1\}=75\sigma^2/2N^3A^2(\Delta t)^2$ ,  $\text{CRLB}\{a_2\}=2205\sigma^2/2N^5A^2(\Delta t)^4$ ,  $\text{CRLB}\{a_3\}=1400\sigma^2/N^7A^2(\Delta t)^6$ ,  $\text{CRLB}\{a_4\}=22050\sigma^2/N^9A^2(\Delta t)^8$ . U opštem slučaju CRLB za koeficijent  $a_m$  signala polinomijalno  $M$ -tog reda je  $C_{m,M}=c_{m,M}\sigma^2/A^2N^{2m+1}(\Delta t)^{2m}$ , gdje je  $c_{m,M}$  koeficijent koji zavisi od reda signala  $M$  i od koeficijenta signala  $m$ .



Slika 1: TF estimatori za linearni FM signal: isprekidana linija — pozicija maksimuma WD; zelena linija popravka putem median filtriranja; crvena linija — VA. Odnosi signal–šum za koje su eksperimenti provedeni naznačeni su na vrhu svakog podgrafika.



Slika 2: Srednja kvadratna greška u TF estimaciji za TF oblika  $\omega(t)=a|t|$ : isprekidane linije — estimatori zasnovani na poziciji maksimuma WD; pune linije — estimatori zasnovani na VA; tačkasta linija — modifikovani algoritam sa presijecanjem intervala povjerenja

Tri osnovne grupe polinomijalno-faznih signala su:

- estimatori maksimalne vjerodostojnosti (*maximum likelihood* — ML);
- estimatori sa faznim odmotavanjem;
- estimatori sa faznim diferenciranjima.

#### A. Maksimalna vjerodostojnost (*maximum likelihood* — ML)

Prva tehnika razvijena je još ranih šezdesetih godina prošlog vijeka u radovima [61, 62]. Tehnika predstavlja ML estimator parametara signala i definisana je kao:

$$M(b_1, b_2, \dots, b_M) = \left| \sum_n y(n) \exp \left[ - \sum_{m=1}^M j b_m n^m (\Delta t)^m \right] \right| \quad (37)$$

$$(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_M) = \max_{(b_1, b_2, \dots, b_M)} \arg M(b_1, b_2, \dots, b_M) \quad (38)$$

Faza i amplituda se sada mogu estimirati na trivijalan način iz signala kojem je odrađen *dechirping* (demodulacija), odnosno kome su eliminisani članovi višeg reda:

$$\hat{A} = \frac{1}{N} \left| \sum_n y(n) \exp \left[ - \sum_{m=1}^M j \hat{a}_m n^m (\Delta t)^m \right] \right| \quad (39)$$

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{N} \text{R} \sum_n y(n) \exp \left[ -\sum_{m=1}^M j \hat{a}_m n^m (\Delta t)^m \right] \quad (40)$$

Pretraživanje za parametre u (37)–(38) zahtijeva prostor dimenzija  $N^M$  pod pretpostavkom da nam duž svake koordinate treba  $N$  različitih parametara. Operacije dodatno zahtijevaju sumiranje  $N$  članova tako da je ukupna kompleksnost ove tehnike reda  $O(N^{M+1})$ . Tehnika je donekle pojednostavljena izdvajanjem estimacije dva parametra (amplitude  $A$  i faznog člana  $a_0$ ), što smanjuje domen pretraživanja sa  $N^{M+2}$  na  $N^M$ , ali i dalje je ovo izuzetno kompleksno. Ujedno greška u estimaciji koeficijenata  $\{a_1, \dots, a_M\}$  utiče na tačnost u estimaciji amplitude i faze ali se pokazuje da je navedeni uticaj mali u odnosu na uticaj šuma. Suštinski ovakva procedura se za signale reda većeg od  $M=2$  rijetko provodi zbog mnoštva lokalnih optimuma i složenosti pretraživanja. Kako su u doba kada je ova tehnika predložena računski resursi i razvijenost brzih algoritama za obradu podataka u spektralnom domenu bili na znatno nižem nivou nego danas, to je postala uobičajena praksa da se redukuju dimenzije problema te da se smanji prostor za pretraživanje.

### B. Fazno odmotavanje (*phase unwrapping*)

Razumno je postaviti pitanje zbog čega se ne može izvršiti estimacija parametara PPS direktno iz faze. Naime, ako možemo da iz signala  $x(t)=A \exp(j\phi(t))$  odredimo fazu  $\phi(t)$ , onda prostom polinomijalnom interpolacijom možemo da odredimo koeficijente polinoma koji se nalazi u fazi signala. Međutim, problem je daleko od jednostavnog. Na osnovu opservacije signala mi ne možemo odrediti tačnu fazu, već imamo neodređenost u odnosu na njenu vrijednosti jer svaka faza  $\phi(t)+2k\pi$  gdje je  $k \in \mathbf{Z}$  daje isti rezultat kao i  $\phi(t)$ . Kako se može pretpostaviti da je faza kontinualna funkcija, problem se svodi da na granicama gdje fazna funkcija prelazi preko umnožaka periode  $2\pi$  i gdje imamo prekid funkcije koja određuje ugao signala odredimo da je do preskoka došlo i kreiramo kontinualnu funkciju dodajući  $2\pi$  u željenom pravcu. Procedura se naziva *phase unwrapping* (odmotavanje faze). Relativno dobro funkcioniše kod radarskih signala iz više razloga: signali su dvodimenzioni pa je uvijek moguće koristiti činjenicu da bi faza trebalo biti glatka funkcija po obje koordinate, spektralni sadržaj signala mijenja se relativno sporo, šumno okruženje je često umjereno itd. Pregled tehnika sa nekim od najboljih primjera faznog odmotavanja dati su u referencama [63–66]. Kod nas primjena je ograničena potrebom stvaranja „povoljnih uslova“ pod čime podrazumijevamo da u nekoliko odbiraka fazna funkcija ne napravi promjene reda nekoliko perioda  $2\pi$  kao i uslove umjerenog šuma. Dakle, ove tehnike mogu se primijeniti tek

nakon što se obezbijede navedeni „povoljni uslovi“. Jedan od načina obezbjeđivanja povoljnih uslova je predstavljen u [67] na primjeru sinusoide. Posmatrajmo sinusoidu:

$$x(t) = A \exp(j\omega_0 t + j\varphi) + v(t) \quad (41)$$

Sada odredimo autokorelaciju:

$$r_{xx}(t, \tau) = x(t+\tau)x^*(t) = A^2 \exp(j\omega_0 \tau) + \text{šum} \quad (42)$$

Uzimajući da se  $r_{xx}(t, \tau)$  računa za fiksno  $\tau$ , i za svako raspoloživo  $t$  možemo procijeniti frekvenciju kao:

$$\hat{\omega}_0 = \frac{1}{\tau} \text{mean}\{\text{angle}(r_{xx}(t, \tau))\} \quad (43)$$

Ova tehnika estimacije frekvencije je veoma uspješna i pored činjenice da autokorelacija povećava uticaj šuma a razlog je u činjenici da je došlo do smanjivanja dinamike u fazi signala i da (čak i bez *unwrappinga*) na osnovu faze autokorelacije može se izvršiti estimacija frekvencije sinusoide. Posebno su korisne u uslovima kada nemamo „čisti“ Gausov šum, već kada je signal zahvaćen obojenim šumom ili kada pored jedne postoje i druge komponente koje potiču od signala a koje su eventualne oslabljene snage i zakašnjele u odnosu na osnovnu komponentu. Ovakav slučaj signala je čest u telekomunikacijama gdje signal osim po direktnoj putanji može da propagira i po drugim putanjama koje uključuju odbijanje od objekata, zidova, zemlje, atmosfere itd. Na prijemu imamo više komponenti, jedna direktna koju želimo da estimiramo i nekoliko njenih oslabljenih i zakašnjelih „duhova“ a te komponente po pravilu loše utiču na rezultate estimacije dok se na predmetni način mogu stvoriti uslovi za smanjivanje njihovog uticaja.

### C. Fazno diferenciranje

Iz dosadašnjeg izlaganja jasno slijedi da ML tehnike zahtijevaju višedimenzionu pretragu što i danas za  $M > 3$  je jedino moguće obaviti u realnom vremenu na superkompjuterima, a za  $M > 5$  ni na njima. Sa druge strane, tehnike faznog odmotavanja su osjetljive na šum i jedino prilagodljive za niskofrekventne signale. Stoga je za preko 20 godina (od negdje sredine 1990-ih do sredine 2010-ih) glavni pravac istraživanja bile su tehnike faznog diferenciranja. Osnovna ideja faznog diferenciranja je da se putem diferenciranja smanji red polinoma u

fazi te da se pretraga izvrši u nižedimenzionom prostoru. Postoji veliki broj ovih tehnika.

### HAF tehnike

Najpoznatija tehnika za redukovanje dimenzija je zasnovana na *high-order ambiguity function* (HAF) — *ambiguity* funkciji višeg reda. Ova tehnika je izuzetno dobro proučena sa brojnim ekstenzijama [62, 63]. Ponekad se umjesto termina HAF koriste termin DPT — diskretna polinomijalna transformacija i HIM — *high-order instantaneous moment* (trenutni moment višeg reda). DPT je nekorektan termin jer se može zamijeniti ML tehnikama kod kojih se polinomijska funkcija javlja u fazi kod integralnog člana, dok je HIM pojam koji se odnosi na lokalne autokorelacije koje su sastavni dio ove transformacije odnosno a ne na samu *ambiguity* funkciju koja je glavni sastojak ove tehnike. Kod ove tehnike se u svakom koraku vrši računanje autokorelacije po sljedećem pravilu:

$$y_1(t; \tau_1) = y(t + \tau_1) y^*(t - \tau_1) \quad (44)$$

$$y_2(t; \tau_1, \tau_2) = y_1(t + \tau_2; \tau_1) y_1^*(t - \tau_2; \tau_1) \quad (45)$$

...

$$y_{M-1}(t; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{M-1}) = y_{M-1}(t + \tau_{M-1}; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{M-2}) y_{M-1}^*(t - \tau_{M-1}; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{M-2}). \quad (46)$$

Na ovaj način vršimo pojednostavljenje prostora pretraživanja jer smo dobili signal koji je sinusoida, a njene parametre možemo estimirati na osnovu pozicije FT. Pozicija maksimuma FT signala  $x_{M-1}(t; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{M-1})$  korespondira koeficijentu najvišeg reda faze  $a_M$  čime dobijamo odgovarajuću estimaciju ovog parametra. Za ovu priliku usvojimo da je  $c_m = 1/m!$  pa je FT koncentrisana na frekvenciji koja je proporcionalna koeficijentu  $a_M$ :

$$Y_{M-1}(\omega) = \sum_n y_{M-1}(n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{M-1}) \exp(-j\omega n(\Delta t)) \quad (47)$$

$$\hat{a}_M = \frac{1}{\prod_{m=1}^{M-1} \tau_m} \arg \max_{\omega} |Y_{M-1}(\omega)|. \quad (48)$$

HAF ima dobitak u računskoj jednostavnosti koja se ogleda u pretraživanju samo po jednoj koordinati i korišćenju brzih algoritama za računanje  $Y_{M-1}(\omega)$

dovodi do znatnog gubitka tačnosti. Nabrojimo neke od problema asociiranih sa HAF-om. Estimacija parametara nižeg reda se obavlja na demodulisanom signalu na osnovu parametara estimiranih prethodno:

$$\hat{y}(t) = y(t) \exp(-j\hat{a}_M t^M / M!). \quad (49)$$

Ovo znači da pogreška koja se neumitno pojavljuje u estimaciji koeficijenata višeg reda propagira na estimaciju koeficijenata nižeg reda. Uticaj šuma je serijom autokorelacija znatno uvećan. U [70] je pokazano da prag odnosa signal–šum za Gausovu smetnju raste za 6dB sa inkrementacijom reda signala. Tako se dešava da za  $M > 4$  tehnike rade dobro za  $\text{SNR} > 20\text{dB}$ , što je daleko od zahtjeva savremenih aplikacija. Situacija je slična i u slučaju multikomponentnih signala. Ako signal ima  $Q$  komponenti prva autokorelacija  $y_1(t; \tau_1)$  ima  $Q(Q-1)/2$  kros-komponenti kao posljedica nelinearnosti u predmetnoj transformaciji, situaciji je još lošija za naredne autokorelacije višeg reda gdje je veoma teško izdvojiti signalne komponente od interferentnih (lažnih) kao i za transformacije sa više komponenti. Djelimično se ovaj problem prevazilazi putem produktne forme HAF-a (PHAF).

Interesantan problem koji smo razmatrali kod HAF-a je činjenica da broj parametara PPS je znatno manji nego broj odbiraka signala potreban da bi bila zadovoljena teorema o odabiranju. Ovo implicira da je moguće izvršiti estimaciju parametara signala i kada nije zadovoljena teorema o odabiranju ili kada HIM ne zadovoljavaju teoremu o odabiranju, odnosno kada se parametri signala u HAF-u pojavljuju na pogrešnim pozicijama zbog *aliasinga* prouzrokovanom nedovoljnim brojem odbiraka. Efikasnu proceduru koja se bori sa aliasingom kod HAF-a predložili smo u [71].

### PHAF

PHAF tehniku su u [72] predložili Barbarossa, Scaglione i Giannakis sa ciljem prevazilaženja nekih nedostataka koji postoje u HAF-u. Ovo je veoma popularna tehnika koja je analizirana u mnoštvu radova od kojih izdvajamo [73, 74]. Kod ove transformacije računa se više autokorelacija:  $y_{M-1}^q(n; \tau_1^q, \tau_2^q, \dots, \tau_{M-1}^q)$ . Frekvencija signalnih komponenti su u pojedinim  $Y_{M-1}^q(\omega)$  su pomjerene u skladu sa izabranim lagovima, ali na način koji nam je unaprijed poznat. Skalirani HAF-ovi  $Y_{M-1}^r(\omega \prod_{j=1}^{M-1} \tau_j^1 / \prod_{j=1}^{M-1} \tau_j^r)$  imaju komponente koje potiču od signala sve na istim frekvencijama, dok su komponente koje potiču od šuma i kros-komponente pomjerene. Stoga je predloženo da se množe skalirani HAF-ovi (zato se tehnika naziva produktnom) i da se na taj način istaknu komponente koje potiču od signala, dok će komponente koje potiču od interferencija biti pomnožene sa



nultim vrijednostima koje se pojavljuju u drugim HAF-ovima, odnosno zbog pomjeranja neće biti pomnožene sa vrijednostima koje potiču od interferencija pa će one biti znatno umanjene. PHAF se sada može zapisati kao:

$$\Pi_{M-1}(\omega) = \prod_{r=1}^R \left| Y_{M-1}^r \left( \omega \prod_{j=1}^{M-1} \tau_j^1 / \prod_{j=1}^{M-1} \tau_j^r \right) \right| \quad (50)$$

Koeficijenti najvišeg reda signala se mogu estimirati na osnovu dominantnih maksimuma funkcije  $\Pi_{M-1}(\omega)$ . Dobre strane PHAF-a su činjenica da se umanjuju efekti prouzrokovani pojavom interferentnih komponenti kod multikomponentnih signala, a pored toga na ovaj način se umanjuju i efekti uzrokovani šumom. Stoga su karakteristike PHAF-a obično znatno bolje od onih kod HAF-a. Sa druge strane, složenost nije značajno uvećana već samo za broj izračunatih PHAF-ova ( $R$  puta) i potrebu za interpolacijom. Sa druge strane, efekat propagacije pogreški ostaje kao kod HAF-a jer se u jednom koraku estimiraju samo koeficijenti najvišeg reda pa se zatim na dechirpovanom signalu ponavlja procedura za estimaciju preostalih koeficijenata. Drugi problem koji je veoma značajan vezan za PHAF je „zdravo za gotovo“ podrazumijevanje da će ove tehnike eliminisati kros-članove. Posmatrajmo jednostavan slučaj signala četvrtog reda  $M=4$  gdje se moraju tri puta raditi autokorelacije. To znači da se pojavljuje umnožak osam signalnih komponenti. Ako signal ima dva PPS signala, ovi će se nalaziti na 2 frekvencije, ali će pored toga postojati do  $2^8-2=254$  interferentne komponente prouzrokovane interferencijom komponenti. Ako je signal dužine  $N=256$ , što je tipična sekvenca i ako su lagovi  $\tau$  reda 20 odbiraka, što je ponovo uobičajeno, radićemo sa sekvencama koje imaju maksimalno  $256-4 \times 2 \times \tau$  odbiraka, odnosno oko 96 odbiraka, odnosno velika je vjerovatnoća da nijedan od odbiraka neće biti ostavljen bez komponente koja potiče od interferencije. Situacija je dodatno komplikovana u slučaju kada imamo šum koji se pojavljuje na svim frekvencijama. Ovo jasno ukazuje na činjenicu da je PHAF limitiran sa stanovišta broja komponenti, reda i dužine signala i jačine šuma. Navedeni lako provjerljivi zaključci u suprotnosti su sa uobičajenim mišljenjima o upotrebljivosti PHAFa koja su potvrđena uglavnom na slučaju signala nižeg reda (do  $M=3,4$ ).

Prije nego nastavimo sa opisom drugih tehnika za estimaciju parametara, vrijedi nešto saopštiti vezano sa selekciju skupa pomjeraja — *lagova*  $\tau_1, \dots, \tau_{M-1}$  u HAF-u i PHAF-u. Gotovo da je očigledno da simetričnost problema i autokorelacija ukazuju na činjenicu da bi trebalo da su ovi *lagovi* isti. To je i potvrđeno u [72] gdje je preporučeno za korišćenje vrijednost  $\tau_i=N/2M$ . U nekim radovima optimalna vrijednost za stepene višeg reda se uzima kao  $\tau_i=N/2(M+2)$ .

Razlika postoji po tome što je prvi rezultat dobijen kao optimizacija rezolucije (preciznosti) koju algoritam može da produkuje dok je drugi izbor aproksimativna vrijednost koja se odnosi na minimizaciju varijanse u izboru koeficijenata. Postavlja se pitanje kako selektovati *lagove* za slučaj PHAF-a pošto se tada ne možemo zadovoljiti jednim skupom. Gotovo po pravilu naučnici i istraživači u ovoj oblasti se opredjeljuju da izaberu skup lagova tako da je proizvod  $\prod_{j=1}^{M-1} \tau_j^r$  bude konstantan  $\prod_{j=1}^{M-1} \tau_j^1 = \prod_{j=1}^{M-1} \tau = \tau^{M-1}$ . Osnovni razlog za ovakav izbor je u činjenici da u ovom slučaju nije potrebno skalirati frekvencije u (50), premda skaliranje frekvencija ne mora biti operacija koja je naročito složena.

### CPF

Značajan doprinos ublažavanju nekih od navedenih problema dao je Peter O'Shea koji je u [27] predložio CPF za estimaciju parametara signala sa kubičnom fazom. Poznato je da se prvi izvod faze signala (TF) može aproksimirati kao:

$$\phi'(t) \approx \frac{\phi(t + \tau/2) - \phi(t - \tau/2)}{\tau}. \quad (51)$$

Ovakva aproksimacija suštinski vodila je ka definiciji WD. Posmatrajmo sada kako se može vršiti estimacija drugog izvoda faze (*chirp ratea*). Ponovo se srijecemo sa prostom aproksimativnom formulom:

$$\phi''(t) \approx \frac{\phi(t + \tau) - 2\phi(t) + \phi(t - \tau)}{\tau^2}. \quad (52)$$

Članovi  $\phi(t \pm \tau)$  korespondiraju sa signalnim članovima  $x(t \pm \tau)$ , dok  $\phi(t)$  korespondira signalu  $x(t)$ , dok proizvod imenioca na desnoj strani i člana na lijevoj strani korespondira sa kompleksnim eksponencijalom  $\exp(-j\Omega\tau^2)$ . Signal  $x(t)$  je FM sa konstantnom amplitudom, a ujedno ne zavisi od *laga*  $\tau$  po kojem se vrši integraljenje pa se član  $x^2(t)$  (konjugovan zbog predznaka minus) može izvesti ispred integrala, odnosno izostaviti. Predmetna analiza ukazuje da je transformacija koja se naziva CPF i koja se koncentriše u blizini *chirp-ratea*:

$$C(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)x(t - \tau) \exp(-j\Omega\tau^2) d\tau. \quad (53)$$

Za signale sa kubnom fazom (PPS  $M=3$ -reda) CPF je idealno koncentrisana na *chirp-rateu*. Uzmimo u (35) da je  $c_m=1/m!$ , dolazimo do toga da je za slučaj signala sa kubnom fazom  $C(t,\Omega)$  koncentrisana na *chirp-rateu*:

$$\Omega(t)=a_3t+a_2 \quad (54)$$

Stoga se estimacija dva parametra najvišeg reda može obaviti na sljedeći način:

$$\hat{a}_2 = \arg \max_{\Omega} |C(0, \Omega)| \quad (55)$$

$$\hat{\Omega}(t) = \arg \max_{\Omega} |C(t, \Omega)| \quad (56)$$

$$\hat{a}_3 = \frac{\hat{\Omega}(t) - \hat{a}_2}{t} \quad (57)$$

Performanse ove tehnike su detaljno razmatrane u [27]. Očigledno je da se estimacija  $a_2$  parametra treba obaviti u sredini intervala kako se autokorelacijom  $x(t+\tau)x(t-\tau)$  ne bi izgubili odbirci kao kod HAF-a. Međutim, postoji problem u kojoj tački intervala računati estimaciju (56) jer će ona dovesti do skraćivanja korelacije proporcionalno za  $2t$  odbiraka. Pokazano je da je dobar broj odbiraka reda veličine  $t/\Delta t \approx N/11$  gdje je  $N$  broj odbiraka u signalu. Naime, pogodno je da je gubitak odbiraka što je moguće manji (manje  $t/\Delta t$ ). Međutim, bliski odbirci pokazuju visoku korelaciju pa na taj način imamo povećanje greške. Stoga se pokazuje da je  $N/11$  kompromis u smislu srednje kvadratne greške u estimaciji koeficijenta  $a_3$ . Srednja kvadratna greška kod kubnog faznog signala je oko 1.6dB iznad CRLB što je prihvatljivo. Pored toga, tehnika ima nižu granicu rada (*breakdown point*) u odnosu na HAF za oko 6dB za kubne signale.

Više radova je posvećeno generalizaciji ove tehnike za slučaj PPS višeg reda [75, 76], modifikacije za rad su uslovima impulsnog šuma su analizirane u [77], proširenje na 2D signale je razmatrano u [78,79], problem u radu sa multikomponentnim signalima razmatran je u [80], poboljšanje preciznosti i aspekti vezani za evaluaciju ove transformacije u [81], dok je primjena u estimaciji DOA i parametara signala razmatrana u [82]. Uopšteno gledano, potencijal ove tehnike je veliki ali za sada moramo konstatovati da postoje problemi kod kojih znamo način da primijenimo HAF/PHAF a ne znamo CPF. Takođe, teorijske performanse za HAF/PHAF su dobro proučene, dok kod CPF to nije slučaj. Jedan značajan dio našeg istraživanja vezan je za bolje teorijsko fundiranje CPF-a, te za primjenu i unapređenja ove metode.

CPF je doživjela ekspanziju u nauci posljednjih godina. To nas je motivisalo da napišemo pregledni rad o njenoj upotrebi, modifikacijama i karakteristikama gdje je iznijeto mnogo detalja o ovom prostom a opet efektivnom estimatoru sa mnogim proširenjima [83,84]. Ovdje ćemo nešto više reći o tehnici koju smo nazvali hibridni HAF-CPF pristup [85]. Procedura je takva da, umjesto da računamo sve autokorelacije, odnosno za signal  $P$ -tog reda  $P-1$ -autokorelaciju kao kod HAF svođenjem signala na sinusoidu, da odradimo  $P-3$  autokorelaciju i svedemo signal na kubični-fazni signal

$$PD^{P-3}[n; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] = A^{2^{P-3}} \exp[jC_3 a_P (n\Delta t)^3 + jC_2 a_{P-2} (n\Delta t)^2 + j(C'_1 a_{P-2} + C''_1 a_P)(n\Delta t) + j(C'_0 a_{P-3} + C''_0 a_{P-1})] + v_x(n) \quad (58)$$

Parametri ovoga signala su

$$C_3 = 2^{P-4} \frac{P! \prod_{i=1}^{P-3} (\tau_i \Delta t)}{3} \quad C_2 = 2^{P-4} (P-1)! \prod_{i=1}^{P-3} (\tau_i \Delta t) \\ C'_1 = 2^{P-3} (P-2)! \prod_{i=1}^{P-3} (\tau_i \Delta t) \quad (59)$$

$$C''_1 = 2^{P-4} \frac{P!}{3} \left[ \sum_{i=1}^{P-3} (\tau_i \Delta t)^2 \right] \prod_{i=1}^{P-3} (\tau_i \Delta t) \quad C'_0 = 2^{P-3} (P-3)! \prod_{i=1}^{P-3} (\tau_i \Delta t) \\ C''_0 = 2^{P-4} \frac{(P-1)!}{3} \left[ \sum_{i=1}^{P-3} (\tau_i \Delta t)^2 \right] \prod_{i=1}^{P-3} (\tau_i \Delta t) \quad (60)$$

dok je  $v_x(n)$  član koji predstavlja rezultujućii uticaj šuma na ovu faznu diferencu. Evaluacijom CPF-a ove funkcije u dva trenutka  $n=0$  i  $n=n_1$  možemo estimirati dva koeficijenta najvišeg reda:

$$\hat{a}_{P-1} = \hat{\Omega}_0 / (2C_2) \quad \hat{a}_P = (\hat{\Omega}_{n_1} - \hat{\Omega}_0) / (6n_1 (\Delta t) C_3) \quad (61)$$

$$\hat{\Omega}_0 = \arg \max_{\Omega} |C(0, \Omega)|^2 \quad \hat{\Omega}_{n_1} = \arg \max_{\Omega} |C(n_1, \Omega)|^2 \quad (62)$$

$$C(0, \Omega) = \sum_k PD^{P-3}[k; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] PD^{*(P-3)}[-k; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] \exp(-j\Omega(k\Delta t)^2) \quad (63)$$

$$C(n_1, \Omega) = \sum_k PD^{P-3}[n_1 + k; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] PD^{*(P-3)}[n_1 - k; \tau_1, \dots, \tau_{P-3}] \exp(-j\Omega(k\Delta t)^2) \quad (64)$$

Estimacija koeficijenata faze nižeg reda može se obaviti ponavljanjem iste procedure na demodulisanom signalu:

$$\mathcal{Y}(n) = x(n) \exp(-j\hat{a}_p(n\Delta t)^p - j\hat{a}_{p-1}(n\Delta t)^{p-1}) \quad (65)$$

dok se u nekim varijantama  $a_{p-2}$  i  $a_{p-3}$  mogu estimirati dechirpovanjem fazne razlike  $\text{PD}^{p-3}[n; \tau_1, \dots, \tau_{p-3}]$ :

$$\text{PD}^{p-3}[n; \tau_1, \dots, \tau_{p-3}] \exp[-jC_3 a_p(n\Delta t)^3 - jC_2 a_{p-2}(n\Delta t)^2] \quad (66)$$

Pokazuju se da oba pristupa daju približnu tačnost. Na prvi pogled mala modifikacija utiče značajno na popravku tačnosti kroz smanjivanje broja autokorelacija (svaka redukcija autokorelacije daje 6dB u odnosu na *breakdown* tačku) a takođe primičemo se CRLB. Takođe, signal se manje skraćuje u odnosu na HAF što donosi dodatno poboljšanje. Vršene su dalje modifikacije ove transformacije: produktna forma za multikomponentne signale, modifikacija za signale sa više dimenzija te je generalizovana i za slučaj negausovskih šumova.

### IGAF

Integralna generalizovana *ambiguity* funkcija (IGAF) je nastala sa sličnom idejom kao HAF/PHAF ali sa jednom izmjenom koja dozvoljava višedimenziono pretraživanje [86, 87]. Ova tehnika takođe je zasnovana na faznom diferenciranju, ali jednim manje nego u slučaju HAF/PHAF. Umjesto  $y_{M-1}(n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{M-1})$  računamo autokorelaciju  $y_{M-2}(n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{M-2})$  koja ima upola članova manje u odnosu na HAF. Druga činjenica koju vrijedi izdvojiti je da je dobijen signal odnosno autokorelacija polinomijalno fazna funkcija drugog reda (linearni FM signal). Stoga su autori predložili da se dva najviša koeficijenta estimiraju odjednom. Estimaciju parametara PPS-a putem IGAF-a možemo zapisati kao:

$$\Psi(g, h; \tau_1, \dots, \tau_{M-2}) = \sum_n y_{M-2}(n; \tau_1, \dots, \tau_{M-2}) \exp \left[ -j2^{M-2} (gn + hn^2 / 2) \prod_{m=1}^{M-2} \tau_m \right] \quad (67)$$

$$P_y^M(g, h) = \frac{1}{2} \sum_{\tau_1} \dots \sum_{\tau_{M-2}} |\Psi(g, h; \tau_1, \dots, \tau_{M-2})|^2. \quad (68)$$

Dva koeficijenta najvišeg reda mogu se estimirati kao:

$$(\hat{a}_{M-1}, \hat{a}_M) = \arg \max_{(g, h)} P_y^M(g, h). \quad (69)$$

Ostali koeficijenti se mogu dobiti iz dechirpovanog signala istom ili nekom sličnom procedurom:

$$y^{(1)}(t) = y(t) \exp \left( -j\hat{a}_M \frac{t^M}{M!} - j\hat{a}_{M-1} \frac{t^{M-1}}{(M-1)!} \right). \quad (70)$$

Ova tehnika na prvi pogled nosi brojne prednosti. Uočavamo za činjenicu da je broj autokorelacija umanjen za jednu što znači da je broj kros-članova umanjen kao i uticaj šuma. Međutim, to nije osnovna prednost ove metode. Druga činjenica koja se uočava su sumiranja i u (67) i (68) koja nemaju negativne efekte na autokomponente ali uprosječavaju šum i oscilatorne kros-članove. Na ovaj način predmetna tehnika daje znatno kvalitetnije rezultate nego HAF/PHAF. Odjednom se estimiraju dva najviša koeficijenta u fazi signala pa se time smanjuje efekat propagacije pogreške. Postavlja se pitanje kakve su mane predmetne tehnike. Suštinski vjerovatno je bolje pitanje da li je ova tehnika uopšte upotrebljiva. Naime, za  $M=2$  ona se svodi na ML tehniku. Za  $M=3$  radimo jednu autokorelaciju ali u svakom slučaju su tehnike zasnovane na CPF efikasnije. Za  $M=4$  imamo dvije autokorelacije i dvije sume u izrazu (68), dok je funkcije  $\Psi()$  izračunata preko sume a ujedno imamo pretraživanje po dva parametra. Sve ovo daje složenost koja je visoka i uporediva ako ne veća od ML pretrage. Ova složenost se uvećava kako raste red signala i prevazilazi onu koja se postiže kod ML tehnika. Dakle, možemo zaključiti da je područje primjene ove tehnike svedeno ako uopšte postoji pošto računaska složenost sa rastom  $M$  postaje veća od složenosti kod ML tehnike. Za niže redove  $M$  posjedujemo tehnike koje daju iste ili približne rezultate sa znatno manjom složenošću.

### HO-CPF i HO-WD

Kao što smo vidjeli, CPF predstavlja značajan prodor u oblasti PPS estimacije zahvaljujući činjenici da inteligentnom autokorelacijom smanjujemo njihov broj čime popravljamo rezultate koji se ostvaruju na ovaj način. Mana navedene tehnike je u činjenici da nije prilagođena estimaciji parametara PPS-ova koji imaju red veći od  $M=3$ . Stoga su se istraživali načini da se estimiraju parametri višeg reda na osnovu kombinacije — višedimenziona pretraga sa malim brojem autokorelacija. Sa ovom namjenom su definisane dvije transformacije koje nazivamo HO-CPF i (HO-WD) [88, 89]:

$$\text{HO-CPF}(t; \Omega_2, \Omega_4, \dots, \Omega_{2K}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(t-\tau) \exp(-j\Omega_2\tau^2 - j\Omega_4\tau^4 - \dots - j\Omega_{2K}\tau^{2K}) d\tau \quad (71)$$

$$\text{HO-WD}(t, \Omega_1, \Omega_3, \dots, \Omega_{2K-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2) \exp(-j\Omega_1\tau - \dots - j\Omega_{2K-1}\tau^{2K-1}) d\tau. \quad (72)$$

U slučaju da je  $2K \leq M+1$  predmetne transformacije su bez biasa i koncentrišu se u prvom slučaju na parnim izvodima a u drugom slučaju na neparnim izvodima faze signala. Ako smo u stanju da sračunamo ovu transformacije u dvije tačke, onda možemo da estimiramo i ostale izvode (u prvom neparne a u drugom slučaju parne). Na osnovu dobijenih izvoda možemo odrediti sve koeficijente PPS signala. Vrijedi istaći da je HO-WD razvijena u VF analizi [90] za potrebe bolje vizuelizacije i predstavljanja nestacionarnih signala. Ovakva transformacija je razmatrana i u [91] mada indirektno u smislu parametarske estimacije dok je tek više godina kasnije shvaćen njen puni značaj u estimaciji parametara signala [89]. Sudbina HO-CPF je u ovom pogledu bila nešto svjetlija jer je njena osnova CPF uvedena primarno u pravcu estimacije parametara PPS pa nije bilo lutanja u primjeni. Kako se u ovim transformacijama koristi jedna autokorelacija to je uticaj šuma i interferencija razuman i ne raste sa redom signala ali se sa rastom reda signal povećava potreba da se vrši višedimenziona pretraga. Na primjer, za  $M=4$  i  $M=5$  HO-CPF zahtijeva 2D pretraživanje, dok za  $M=3$  i  $M=4$  HO-WD zahtijeva 2D pretraživanje. 3D pretraživanje omogućava estimaciju parametara  $M=6$  i  $M=7$  reda signala kod HO-CPF, dok ovaj nivo pretraživanja omogućava estimaciju parametara reda  $M=5$  i  $M=6$  putem HO-WD. U zavisnosti od toga da li imamo mogućnost da vršimo 2D pretraživanje možemo na ovaj način da estimiramo parametre do reda  $M=5$ , odnosno ako je moguće, 3D pretraživanje do  $M=7$  reda. Obično pretraživanje višeg reda nije moguće u bilo kakvom razumnom i prihvatljivom vremenu. Uočimo još nekoliko detalja. Kod HO-CPF sumiranje se obavlja direktno, odnosno, nije moguće korišćenje brzih algoritama dok se kod HO-WD mogu koristiti brzi algoritmi što pojednostavljuje pretragu po barem jednoj koordinati (u ovom slučaju  $\Omega_1$ ). Još jedan detalj na koji vrijedi skrenuti pažnju u ovom uvodnom poglavlju tiče se kros-članova. Naime, kros-članovi kod HO-WD su po svemu slični kros-članovima kod WD, odnosno njihova priroda i geometrija su dobro poznati na osnovu dugogodišnjih istraživanja u oblasti VF analize pa se zna da se prozorima u vremenskom odnosno frekvencijskom domenu može značajno umanjiti njihov uticaj. Međutim, ovo pravilo ne važi za HO-CPF jer ni mehanizmi pojave kros-članova i uticaja drugih komponenti na auto-članove nijesu do danas dovoljno poznati. U [92–94] upotrijebili smo genetički algoritam kao meta-heurističku tehniku pretraživanja kako bismo umanjili prostor za pretraživanja i testirali da li je moguće obaviti pretragu za signale visokog reda na predmetni način. Pokazano je da genetički algoritmi rade dobro do petodimenzione pretrage što za PPS znači do signala desetog reda. Pored toga, pokazano je u [94] da je bolje izračunati HO-CPF i HO-WD u centru dostupnog signala i iskoristiti dobijene

rezultate za dobijanje svih faznih koeficijenata (HO-CPF za one uz parne stepene a HO-WD za one uz neparne stepene) nego da se dva puta evaluiraju ista transformacija jednom u centru i jednom dislocirano iz centra dostupnog intervala. Razlozi su u tačnosti, smanjivanje broja dostupnih odbiraka, te problem da se na osnovu jedne (onih uz neparne ili onih uz parne stepene u fazi) dobije druga klasa koeficijenata.

#### D. Estimator kvazimaksimalne vjerodostojnosti (QML)

Od prethodno opisane klase estimatora očigledno je da su najbolje razvijeni estimatori zasnovani na diferenciranju faze jer su robusniji u odnosu na fazno odmotavanje a jednostavniji za računanje u odnosu na ML estimatore. Međutim, niz problema i kod ove klase estimatora postoji koji nas sprečavaju da budu valjan izbor za sve probleme koji se u praksi pojavljuju. Prije svega uticaj šuma raste kako raste broj autokorelacija (faznog diferenciranja) što se manifestuje rastom srednje kvadratne greške ali još i gore povećanjem *breakdown* tačke algoritma (smanjivanjem operativne zone u kojoj algoritmi mogu da funkcionišu). Davno su za druge probleme u obradi nestacionarnih signala predložene tehnike poboljšanja tačnosti — *refinement* koje su relativno nedavno dobile svoje ishodište i u estimaciji parametara PPS [29, 95, 96]. Suštinski koristile su se za smanjivanje srednje kvadratne greške u PPS estimaciji prema CRLB u uslovima kada je gruba estimacija dobijena faznim diferenciranjem relativno tačna, odnosno za odnose signal–šum preko *breakdown* tačke. Dakle, ove tehnike nijesu bile u stanju da smanje *breakdown* tačku estimatora.

Očigledno je da sa porastom ukupnog stepena sa kojima se pojavljuju signalni članovi u izrazima za estimatore sa faznim diferenciranjem dolazi do slabljenja performansi estimatora. Jedan od rezultata koji je dobijen ovim rastom stepena je poništavanje statističkog odstupanja — *biasa* koje je plaćano osjetljivošću na šum. Pokušaji da se upotrijebe transformacije sa stepenima nižeg reda nijesu urodili plodom. Premda se teorijski može pokazati da se signalni članovi mogu stepenovati stepenima koji su manji od 1 sa bezbiasnom estimacijom predmetne tehnike nijesu upotrebljive za visok uticaj šuma [47]. Takvo stepenovanje (korjenovanje) nije trivijalno te se svodi na problem faznog odmotavanja koji je za visoki šum složeniji od same PPS estimacije. Dakle, početkom 2010-ih postajalo je jasno da na osnovama do tada uvedenih tehnika, odnosno prije svega faznih diferencijatora nije moguće popraviti estimaciju parametara PPS niti produkovati rezultate koje praktične aplikacije očekuju.

Kako nije moguće upotrijebiti transformacije višeg reda u našim istraživanjima, okrenuli smo se *biasnim* transformacijama nižeg reda — prije svega STFT. Neizostavan problem je da ćemo dobiti *biasnu* estimaciju ali isto tako na tu



estimaciju možemo primijeniti tehniku *refinementa* i prevazići gotovo sve probleme sa kojima se praksa do sada susrijetala.

Objasnimo postupak PPS estimacije na osnovu STFT.

Posmatračemo skup prozora u STFT. Širi prozori daju veći *bias* ali su manje osjetljivi na šum, dok je kod užih prozora obrnuta situacija. STFT se računaju za svaki prozor iz skupa:

$$\text{STFT}_h(n, \omega) = \sum_k x(n+k)w_h(k) \exp(-j\omega(k\Delta t)) \quad (73)$$

gdje je prozor  $w_h(k) \neq 0$  u intervalu  $|k\Delta t| \leq h/2$ . Za svaki prozor iz skupa odredimo TF estimaciju:

$$\hat{\omega}_h(n) = \arg \max_{\omega} |\text{STFT}_h(n, \omega)| \quad n \in [-N/2 + h/2\Delta t, N/2 - h/2\Delta t]. \quad (74)$$

Grubu estimaciju koeficijenata  $\{a_1, \dots, a_p\}$  signala dobijamo interpolacijom TF, uz zavisnost ovih koeficijenata od širine prozora u STFT:

$$\hat{\mathbf{a}}_h = (\mathbf{X}_h^T \mathbf{X}_h)^{-1} \mathbf{X}_h^T \bar{\mathbf{y}}_h \quad (75)$$

gdje je

$$\mathbf{X}_h = \begin{bmatrix} 1 & -(T-h)/2 & [-(T-h)/2]^2 & \dots & [-(T-h)/2]^{p-1} \\ 1 & -(T-h)/2 + \Delta t & [-(T-h)/2 + \Delta t]^2 & \dots & [-(T-h)/2 + \Delta t]^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (T-h)/2 - \Delta t & [(T-h)/2 - \Delta t]^2 & \dots & [(T-h)/2 - \Delta t]^{p-1} \\ 1 & (T-h)/2 & [(T-h)/2]^2 & \dots & [(T-h)/2]^{p-1} \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_h = [\hat{\omega}_h(-(T-h)/2) \quad \hat{\omega}_h(-(T-h)/2 + \Delta t) \quad \dots \quad \hat{\omega}_h((T-h)/2)] \quad (77)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_h = [\hat{a}_{1,h}, \hat{a}_{2,h}, \dots, \hat{a}_{p,h}]. \quad (78)$$

Na grubu estimaciju sada možemo primijeniti *refinement* koga je predložio O'Shea prvobitno za popravku TF estimacije davne 1987. godine [97], a nakon 20-ak godina i za estimaciju PPS parametara [96]. Glavno ograničenje ovoga postupka je bilo primjena na *bezbiasne* estimatore koji su zbog uticaja šuma inherentno neprecizni. Ovdje ih primjenjujemo na *biasni* estimator (73)–(78) koji je robustan na uticaj šuma. Prvi korak je primjena dechirpinga:

$$\mathcal{Y}(n) = y(n) \exp \left( -j \sum_{p=0}^P \hat{a}_{p,h} (n\Delta t)^p \right) \quad (79)$$

gdje su  $\hat{a}_{p,h}$  parametri dobijeni u procesu grube estimacije. Dobijen je PPS sa koeficijentima  $\{a_0, a_1 - \hat{a}_{1,h}, a_2 - \hat{a}_{2,h}, \dots, a_P - \hat{a}_{P,h}\}$  zahvaćen šumom koji ima iste karakteristike kao i šum u polaznom signalu. Na ovaj način smanjena je brzina promjena u fazi signala čime smo korak bliže stvaranju povoljnih uslova za estimaciju parametara signala. Zatim vršimo niskofrekventno filtriranje putem filtra sa pokretnom sredinom kako bismo umanjili šum i kako bi se još više primakli uslovima koji se mogu smatrati povoljnim za primjenu tehnika faznog odmotavanja:

$$\mathcal{X}(n) = \frac{1}{L+1} \sum_{k=n-L}^{n+L} \mathcal{Y}(k). \quad (80)$$

Signal  $\mathcal{X}(n)$  je pogodan za fazno odmotavanje jer je niskofrekventan (dobijeno demodulacijom (79)) i sa redukovanim šumom (dobijeno filtriranjem (80)). O'Shea je inicalno predložio da se signal pododabere radi stabilnosti dalje procedure sa faktorom  $Q$ :

$$\hat{y}(i) = \mathcal{X}(n_0 + iQ) \quad (81)$$

gdje je  $n_0$  početna tačka intervala. Sada možemo da izvršimo rekonstrukciju faze signala:

$$v(i) = \text{unwrap}(\text{phase}(\hat{y}(i))). \quad (82)$$

Finu estimaciju parametara signala možemo dobiti na sljedeći način:

$$\delta \hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{\Xi}^T \mathbf{\Xi})^{-1} \mathbf{\Xi}^T \bar{\mathbf{u}} \quad (83)$$

gdje je:

$$\mathbf{\Xi} = \begin{bmatrix} 1 & n_0 & n_0^2 & \dots & n_0^P \\ 1 & n_0 + Q & (n_0 + Q)^2 & \dots & (n_0 + Q)^P \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n_0 + Q(R-1) & (n_0 + Q(R-1))^2 & \dots & (n_0 + Q(R-1))^P \\ 1 & n_0 + QR & (n_0 + QR)^2 & \dots & (n_0 + QR)^P \end{bmatrix}. \quad (84)$$

Zbir grube i fine estimacije daje:

$$\hat{\theta}_{m,h}^f = \hat{a}_{m,h} + m \frac{\delta a_{m,h}}{L^m}, \quad m = 1, \dots, P \quad (85)$$

$$\hat{\theta}_{0,h}^f = \hat{a}_{0,h}. \quad (86)$$

Naša praksa i intenzivna eksperimentalna analiza pokazuju da se upotrebom pododabiranja ne dobija popravka rezultata tako da po pravilu biramo  $Q=1$ . Postavlja se pitanje šta da radimo sa estimacijama dobijenim sa različitim prozorima u STFT. Očigledno neke od estimacija mogu biti pod uticajem *biasa* takve da se ne mogu popraviti, dok druge zbog uticaja šuma mogu biti takođe takve da se ne mogu primaći CRLB. U prvom radu sa ovom temom [15] ovaj problem je zapisan u obliku algoritma vezanog za optimizaciju odnosa *bias*-varijansa. Ovakva tehnika se pokazala dosta složenom što je vodilo daljem istraživanju koje je pokazalo da se predmetni optimizacioni problem može zapisati u obliku ML [8, 14].

Za svaku širinu prozora računamo kvazi-ML funkciju:

$$M(h) = \left| \sum_n x(n) \exp \left( -j \sum_{p=1}^P \hat{a}_{p,h}^f (n\Delta t)^p / p \right) \right|. \quad (87)$$

Optimalna širina prozora je:

$$\hat{h} = \arg \max_h M(h). \quad (88)$$

Finalna estimacija parametara je tada:

$$\hat{\mathbf{a}} = [\hat{a}_{0,\hat{h}}^f, \hat{a}_{1,\hat{h}}^f, \hat{a}_{2,\hat{h}}^f, \dots, \hat{a}_{P,\hat{h}}^f]. \quad (89)$$

Predmetna tehnika je dobila naziv QML estimator. Naime, kriterijumska funkcija je ista kao kod ML estimatora ali se pretraga vrši samo po jednom parametru (širini prozora), a ne po višedimenzionom prostoru parametara. Sa druge strane, kao sastavni dio ovog algoritma je fazno odmotavanje primijenjeno na izmijenjenom demodulisanom i filtriranom signalu, čime su postignuti povoljni uslovi za njegovu primjenu. Dakle, tri sastojka: STFT, fazno odmotavanje sa algoritmom *refinement* i ML kriterijumska funkcija su u stanju da prevaziđu sve ključne probleme koji postoje kod estimatora sa faznim diferenciranjem.

Prije nego pokažemo rezultate rada ove tehnike bitno je da razmotrimo računsku složenost. Pretpostavimo da je prostor za pretraživanje po bilo kom koeficijentu  $N$ , tada evaluacija ML funkcije zahtijeva  $O(N^{M+1})$  operacija. Predložena tehnika zahtijeva jednu petlju po skupu prozora. U našim simulacijama to je reda veličine  $N/4$ . Najkomplikovanija procedura u petlji je evaluacija STFT koja zahtijeva  $O(N^2 \log N)$  operacija pošto su matricno množenje i evaluacija inverzne matrice obavljani na matricama dimenzija  $(N-h/\Delta t) \times P$  i  $Q \times (P+1)$ , gdje je  $P = Q < N$ . Dodatno, izrazi tipa  $(\mathbf{X}_{h,P}^T \mathbf{X}_{h,P})^{-1} \mathbf{X}_{h,P}^T$  mogu se pohraniti u memoriji nakon što se sračunaju samo jednom. Kompleksnost predložene procedure nije veća od  $O(N^3 \log N)$  i brža je od ML procedure za  $M=3$  ili je barem istog reda složenosti dok je za  $M>3$  znatno jednostavnija. Napominjemo da se kod ML, HAF i PHAF procedura obično mora vršiti dodatna popravka tačnosti koju ovdje i ne uzimamo u obzir a njena složenost je slična onoj koju provodimo kod O'Shea procedure. Kompleksnost HAF-a je  $O(NP \log N)$  ali je povećanje složenosti u odnosu na HAF donijelo velike popravke u rezultatima. Postoji nekoliko mogućnosti za dalje umanjivanje složenosti. Svi STFT-ovi se računaju za isti skup podataka. Pretpostavimo da je STFT za najširi prozor širine  $N$  sračunati putem rekurzivne procedure koja je opisana u [98]:

$$\text{STFT}_{(N\Delta t)}(n, \omega) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} x(n+k) \exp(-j\omega(k\Delta t)) \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \text{STFT}_{((N-2)\Delta t)}(n, \omega) &= \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} x(n+k) \exp(-j\omega(k\Delta t)) = \text{STFT}_{(N\Delta t)}(n, \omega) - \\ &- x(n+N/2-1) \exp(-j\omega((N/2-1)\Delta t)) - x(n-N/2) \exp(j\omega(N/2)\Delta t). \end{aligned} \quad (91)$$

Ako je  $\text{STFT}_{(N\Delta t)}(n, \omega)$  računato unaprijed, STFT-ovi se mogu računati sa složenošću koja nije veća od  $O(N^2)$  što je umanjeno u odnosu na  $O(N^2 \log N)$  pa će se i ukupna kompleksnost umanjiti na  $O(N^3)$  sa originalne  $O(N^3 \log N)$ . Postoji još značajan prostor za dalje umanjivanje kompleksnosti kao što je na primjer

TF estimacija samo u nekim tačkama intervala i interpolacija rezultata. Broj sračunatih STFT-ova može biti mali pošto se TF računa kao ulaz u polinomijalnu regresiju a STFT-ove sa sličnim širinama prozora produkujju rezultate slične tačnosti i dobijeni rezultati su dosta stabilni slabo zavisni od širine prozora. Napominjemo da su ovo teme na kojima vrijedi raditi u budućnosti.

Predmetni estimator je primijenjen ili prilagođen brojnim situacijama:

- PPS nepoznatog reda [8,14];
- Signalima sa nepoznom modulacijom (čime se po prvi put za dugo vremena parametarski estimatori primjenjuju kod istog problema kao i neparametarski, odnosno koji obezbjeđuju konvergenciju parametarskih i neparametarskih estimatora) [9];
- Sinusoidalno modulirane signale kao i brojne varijante signala koji se javljaju kod radarskih signala kao i u slučajevima alijasinga [9, 37];
- Primjenu kod radara preko horizonta — OTHR (*over-the-horizon-radar*) [99];
- Kombinovani *coupled* model gdje se pored polinomijalne komponente u sinusoidalnoj komponenti u argumentu javlja polinomijalna komponenta (model signala koji se javlja kod određenih modulatora) [59];
- U toku je analiza primjene na signale sa *tan-sec* modulatora koji se javljaju kod CDMA-MIMO radara [60] itd.

Parametri ovoga estimatora detaljno su analizirani u [100] gdje su date preporuke vezane za izbor skupa prozora u STFT kao i širinu prozora u fazi popravke tačnosti.

Ovdje ćemo demonstrirati još jednu modifikaciju QML algoritma. Kako je predmetni algoritam predložen da radi tamo gdje ne mogu drugi algoritmi, a posebno da radi za što je niži moguće odnos signal–šum, to nam je bilo bitno da provjerimo da li je moguće da dodatno smanjimo *breakdown* tačku algoritma. Problem koji ograničava ovaj progres nalazi se u TF estimaciji (74). Naime, ako se u toj estimaciji desi impulsna greška prouzrokovana velikim šumom, onda ni interpolacija (75) ne radi tačno. Dok god postoji makar jedan prozor kod koga se ovo ne dešava u QML estimatoru radi ispravno. Nažalost, otporniji su širi prozori koji mogu da imaju veliki *bias* a što ograničava tačnost QML estimatora. Pretpostavimo da imamo TF estimator sa znatnim procentom netačnih TF odbiraka ali da znamo koji od tih odbiraka su korektni, odnosno kod kojih ne postoji greška uzrokovana velikim šumom. Tada možemo da odredimo interpolaciju korišćenjem samo tih odbiraka. Međutim, ne zna se koji su odbirci „dobri“, posebno u uslovima kada je procenat „loših“ odbiraka visok. Stoga smo se opredijelili da primijenimo tehniku koja je nazvana RANSAC — *random samples consensus*. Ova tehnika je veoma popularna prije svega u oblasti analize videa i slike gdje je dovela do prave male revolucije prije 20-ak godina [101,

102]. RANSAC omogućava da se traženi oblici u slici ili videu pronađu u uslovima kada se može izvršiti parametrizacija izobličenja objekata putem modela sa relativno malim brojem parametara. Kao neposredna inspiracija za primjenu ovog algoritma poslužilo je predavanje prof. Ondreja Chuma koje je održao u CANU 2015. godine [103]. Za pravilnu interpolaciju potrebno nam je  $P$  tačaka TF estimacije koje nijesu zahvaćene velikim šumom. Za određivanje ovih tačaka provodimo  $\Lambda$  pretraga na osnovu slučajne selekcije. Broj  $\Lambda$  može da ide i do nivoa  $10^5$  pa čak i više. Međutim, to je često prihvatljivo za  $P > 4$  posebno za ekstremno nizak odnos signal–šum. Odluka koji od izbora je najbolji donosi se na isti način kao kod QML estimatora putem funkcije (87). Na ovu temu je publikovano nekoliko radova među kojima [104–106].

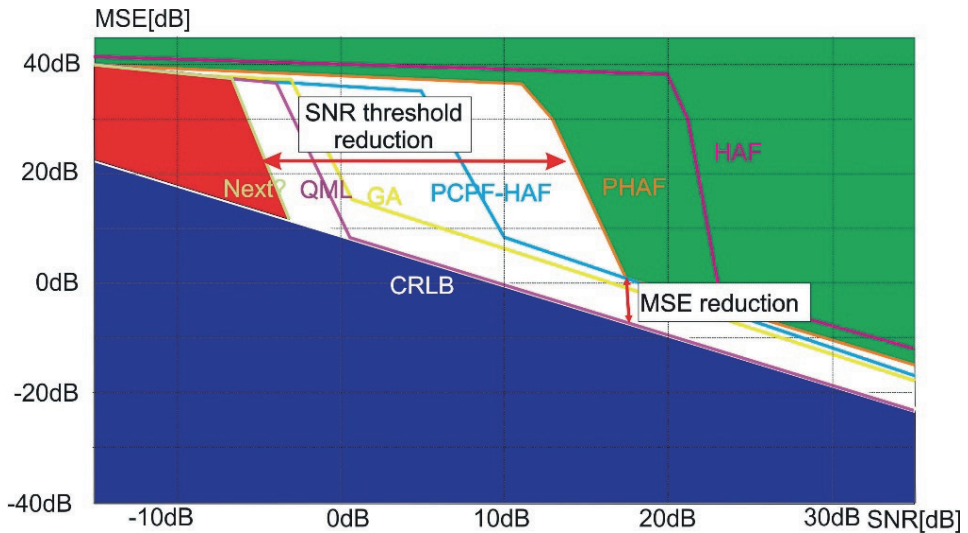
Ovdje posmatramo samo jedan primjer sa tačnošću u estimaciji koeficijenta najvišeg reda za PPS sedmog reda (slika 3). Pored klasičnih estmatora HAF i PHAF, posmatrani su estimatori koje smo predložili: produktna verzija CPF-HAF estimatora, kombinovani HO-WD/HO-CPF sa primjenom genetičkog algoritma (GA), QML i njegova modifikacija sa RANSAC-om (označena kao NEXT odnosno estimator buduće generacije). Plava zona na grafiku označava nedostižne srednje kvadratne greške koje su ispod CRLB, zelena zona su vrijednosti srednje kvadratne greške koje su se mogle postići prije istraživanja koje smo obavili, crvena zona je region koji je dostupan za eventualna dalja unapređenja, dok bijela zona predstavlja progres u smanjivanju *breakdown* tačke koji iznosi ogromnih 20-ak dB za posmatrani signal, kao i umanjeње srednje kvadratne greške na prema CRLB (ovdje nešto oko 8 dB). Vjerujemo da ostvareni progres sa primjenom predloženih estimatora čini ih bitnim u odnosnim istraživanjima u narednih 20-ak godina.

## V ZAKLJUČCI

U ovom radu, formi koja je odabrana za obilježavanje Jubileja 50. godina Crnogorske akademije nauka i umjetnosti, u kratkim crtama dao sam izvode nekih od rezultata koji su postignuti u prethodnih 20-ak godina na polju neparametarske i parametarske estimacije nestacionarnih FM signala. Dva najbitnija rezultata su VA za neparametarsku estimaciju i QML algoritam za parametarsku estimaciju. U nepovoljnim uslovima niskog odnosa signal–šum ova dva estimatora prevazilaze sve alternative što je više puta i pokazano od strane raznih istraživača [107, 108]. Takođe, obje ove tehnike su poslužile i kao temelj za razvoj drugih metoda. Postoji još dosta prostora za unapređenje, a najviše u oblasti multikomponentnih signala te u uslovima složenih šumova. Jedna partikularno interesantna aplikacija pokazala se u obradi prostornih signala, odnosno u uslovima kada pored parametara signala treba da estimiramo i pravac ili poziciju koja je izvor signala [109, 110]. Veoma bitno bi bilo i dalja

analiza prostora za generalizaciju tehnika na opšte modele FM signala kao i posebno pitanje računске složenosti i implementacije koja je hardverski obrađena u [111].

U danima kada su ova istraživanja započela nekada široko polje sa brojnim istraživačkim grupama koje su ga intenzivno izučavale svelo se na svega tri istraživačke grupe u svijetu (u Kini i Australiji). Danas broj istraživača koji se bave ovim temama je znatno uvećan i broji 30-ak. Radovi se publikuju kako u teorijskim časopisima a još više u onima koji se odnose na aplikacije ovih tehnika.



Slika 3: Srednja kvadratna greška u estimaciji koeficijenta uz najviši stepen faze za signal sedmog reda: CLRb; HAF; PHAF; PCPF-HAF; GA — kombinacija HO-WD i HO-CPF sa pretraživanjem putem genetičkog algoritma; QML; NEXT — kombinacija QML-RANSAC. Bijela zona predstavlja redukciju srednje kvadratne greške i praga odnosa signal-šum koji su postignuti u našim istraživanjima.

Ova istraživanja ne bi bila moguća bez kolega i saradnika. Temelj istraživanja obrade nestacionarnih signala na Univerzitetu Crne Gore uspostavio je akademik Ljubiša Stanković. Značajan dio istraživanja u oblasti parametarske estimacije obavljen je tokom izrade doktorske disertacije kolege Marka Simeunovića (posebno u dijelu PCPF-HAF-a a kasnije i primjena). Početna istraživanja PPS su obavljena zajedno sa kolegom Pu Wangom. Razrade pojedinih tema iz ovog istraživanja vršene su sa naučnicima iz SAD, Francuske, Finske, Ukrajine, Ruske Federacije, Pakistana, Kine, Njemačke itd.



## LITERATURA

- [1] E. Wigner, "On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium", *Physical Review*, Vol. 40, No. 5, June 1932, pp. 749–759.
- [2] J. Ville, "Theorie et applications de la notion de signal analytique", *Cables et Transmission*, Vol. 2A, pp. 61–74, 1948.
- [3] J. R. Carson, "Notes on the theory of modulation", *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, Vol. 10, No. 1 pp. 57–64, 1922.
- [4] Lj. Stanković, M. Daković, T. Thayaparan, Time-frequency signal analysis with applications, Arthec House, 2013.
- [5] B. Boashash, ed. Time-frequency signal analysis and processing, A comprehensive reference, Academic Press, 2015.
- [6] P. Flandrin, Time-frequency/time-scale analysis, Academic press, 1999.
- [7] E. Sejdić, I. Djurović, J. Jiang, Lj. Stanković, Time-frequency based feature extraction and classification: Considering energy concentration as a feature using the Stockwell transform and related approaches, VDM, 2009.
- [8] I. Djurović, M. Simeunović, "Review of the quasi maximum likelihood estimator for polynomial phase signals", *Digital Signal Processing*, Vol. 72, Jan. 2018, pp. 59–74.
- [9] I. Djurović, V. Popović-Bugarin, M. Simeunović, "The STFT-based estimator of micro-Doppler parameters", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronics Syst.*, Vol. 53, No. 3, June 2017, pp. 1273–1283.
- [10] B. Porat, B. Friedlander, "Asymptotic statistical analysis of the high-order ambiguity function for parameter estimation of polynomial-phase signals", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 42, No. 3, May 1996, pp. 995–1001.
- [11] I. Djurović, "Estimation of sinusoidal frequency modulated signal parameters in high noise environment", *Signal, Image and Video Processing*, Vol. 11, No. 8, Nov. 2017, pp. 1537–1541.
- [12] B. Ristić, B. Boashash, "Comments on "The Cramer-Rao lower bounds for signals with constant amplitude and polynomial phase", *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, Vol. 46, No. 6, June 1998, pp. 1708–1709.
- [13] V. Katkovnik, "A new method for varying adaptive bandwidth selection", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 47, No. 9, Sept. 1999, pp. 2567–2571.
- [14] I. Djurović, Lj. Stanković, "Quasi maximum likelihood estimator of polynomial phase signals", *IET Signal Processing*, Vol. 13, No. 4, June 2014, pp. 347–359.
- [15] I. Djurović, Lj. Stanković, "STFT-based estimator of polynomial phase signals", *Signal Processing*, Vol. 92, No. 11, pp. 2769–2774, Nov. 2012.
- [16] E. Sejdić, I. Djurović, J. Jiang "Time-frequency feature representation using energy concentration: an overview of recent advances", *Digital Signal Processing*, Vol. 19, No. 1, Jan. 2009, pp. 153–183.
- [17] D. Gabor, "Theory of communication. Part 1: The analysis of information", *Jour. of the Ins. of Elec.Eng. - Part III: Radio and Communication Engineering*, Vol. 93, No. 26, Nov. 1946, pp. 429–441.
- [18] I. Daubachies, "The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 36, No. 5, Sept. 1990, pp. 961–1005.
- [19] R. G. Stockwell, L. Mansinha, "The localization of the complex spectrum: S-transform", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 44, No. 4, April 1996, pp. 998–1001.
- [20] I. Djurović, E. Sejdić, J. Jiang: "Frequency based window width optimization for S-transform", *AEU—International Journal of Electronics and Communications*, Vol. 62, No. 4, pp. 245–250, Apr. 2008.



- [21] L. B. Almeida, "The fractional Fourier transform and time-frequency representations", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 42, No. 11, Nov. 1994, pp. 3084–3091.
- [22] X. Li, G. Bi, S. Stanković, A. M. Zoubir, "Local polynomial Fourier transform: A review on recent developments and applications", *Signal Processing*, Vol. 91, No. 6, June 2011, pp. 1370–1393.
- [23] Lj. Stanković, "An analysis of some time-frequency and time-scale distributions", *Annales des Telecommunications*, Vol. 49, No. 9–10, Sep./Oct. 1994, pp. 505–517.
- [24] B. Barkat, B. Boashash, "Design of higher order polynomial Wigner-Ville distributions", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 47, No. 9, Sept. 1999, pp. 2608–2610.
- [25] S. Stanković, Lj. Stanković, "An approach to the polynomial Wigner-Ville distributions", in *Proc. of IEEE Symp. on TFTA*, Paris, June 1996, pp. 153–156.
- [26] Lj. Stanković, "Local polynomial Wigner distribution", *Sig. Proc.*, Vol. 59, No. 1, 1997, pp. 123–128.
- [27] P. O'Shea, "A new technique for instantaneous frequency rate estimation", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 9, no. 8, August 2002, pp. 251–252.
- [28] B. Boashash, "Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal — Part 1: Fundamentals", *Proc. of IEEE*, Vol. 80, No. 4, Apr. 1992, pp. 520–538.
- [29] B. Boashash, "Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal — Part 2: Algorithms and Applications", *Proc. of IEEE*, Vol. 80, No. 4, Apr. 1992, pp. 540–568.
- [30] Lj. Stanković, I. Djurović, S. Stanković, M. Simeunović, M. Daković, "Instantaneous frequency in time-frequency analysis: Enhanced concepts and performance of estimation algorithms", *Digital Signal Processing*, Vol. 35, Dec. 2014, pp. 1–13.
- [31] V. Katkovnik, Lj. Stanković, "Instantaneous frequency estimation using the Wigner distribution with varying and data-driven window length", *IEEE Tr. Sig. Proc.*, Vol. 46, No. 9, Sept. 1998, pp. 2315–2325.
- [32] Lj. Stanković, V. Katkovnik, "Algorithm for the instantaneous frequency estimation using time-frequency distributions with adaptive window width", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 5, No. 9, Sept. 1998, pp. 224–227.
- [33] I. Djurović, Lj. Stanković: "Influence of high noise on the instantaneous frequency estimation using time-frequency distributions", *IEEE Sig. Proc. Letters*, Vol. 7, No. 11, Nov. 2000, pp. 317–319.
- [34] E. Aboutanios, B. Mulgrew, "Iterative frequency estimation by interpolation on Fourier coefficients", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 53, No. 4, April 2005, pp. 1237–1242.
- [35] I. Djurović, "Estimation of the sinusoidal signal frequency based on the marginal median DFT", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 55, No. 5, May. 2007, pp. 2043–2051.
- [36] C. Conru, I. Djurović, C. Ioana, A. Quinquis, Lj. Stanković: "Time-frequency detection using Gabor filter banks and Viterbi based grouping algorithm", in *Proc. of IEEE ICASSP'2005*, Philadelphia, USA, Mar. 2005, Vol. 4, pp. 497–500.
- [37] I. Djurović, M. Simeunović, "Estimation of higher-order polynomial phase signals in impulsive noise", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 54, No. 4, Aug. 2018, pp. 1790–1798.
- [38] J. Kiefer, "Conditional confidence statements and confidence estimators (with discussion)", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 72, No. 360, Dec. 1977, pp. 789–808.
- [39] V. Katkovnik, "Nonparametric estimation of instantaneous frequency", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 43, No. 1, Jan. 1997, pp. 183–189.

- [40] Lj. Stanković, "Adaptive instantaneous frequency estimation using TFDs", in *Time-Frequency Signal Analysis and Processing*, ed. B. Boashash, Elsevier, 2003, pp. 429–436.
- [41] S.-C. Sekhar, T.V. Creenivas, "Signal to noise ratio estimation using higher order moments", *Signal Processing*, Vol. 86, pp. 716–732, 2006.
- [42] J. Astola, V. Katkovnik, K. Egiazarian, *Local approximation techniques in signal and image processing*, SPIE Press Monograph, PM 157, 2006.
- [43] I. Djurović, Lj. Stanković, "Modification of the ICI rule based IF estimator for high noise environments", *IEEE Transactions Signal Processing*, Vol. 52, No. 9, 2004, pp. 2655–2661.
- [44] B. Boashash, P. O'Shea, "Use of the cross Wigner-Ville distribution for estimation of instantaneous frequency", *IEEE Transactions Signal Processing*, Vol. 41, No. 3, Mar. 1993, pp. 1439–1445.
- [45] I. Djurović, Lj. Stanković, "XWD-algorithm for the instantaneous frequency estimation revisited: statistical analysis", *Signal Processing*, Vol. 94, No. 1, Jan. 2014, pp. 642–649.
- [46] Lj. Stanković, I. Djurović, R. M. Laković, "Instantaneous frequency estimation by using the Wigner distribution and linear interpolation", *Signal Processing*, Vol. 83, No. 3, Mar. 2003, pp. 483–491.
- [47] Lj. Stanković, V. Katkovnik, "Instantaneous frequency estimation using higher order distributions with adaptive order and window length", *IEEE Trans. on Inf. Th.*, Vol. 46, No. 1, Jan. 2000, pp. 302–311.
- [48] J. Lerga, V. Sučić, "Nonlinear IF estimation based on the pseudo WVD adapted using the improved sliding pairwise ICI rule", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 16, No. 11, Nov. 2009, pp. 953–956.
- [49] I. Djurović, Lj. Stanković, "An algorithm for the Wigner distribution based instantaneous frequency estimation in a high noise environment", *Signal Processing*, Vol. 84, No. 3, Mart 2004, pp. 631–643.
- [50] A. J. Viterbi, "Convolutional codes and their performance in communication systems", *IEEE Transactions on Communication Theory*, Vol. 19, No. 5, Oct. 1971, pp. 751–771.
- [51] Lj. Stanković, I. Djurović, A. Ohsumi, H. Ijima, "Instantaneous frequency estimation by using Wigner distribution and Viterbi algorithm", in *Proc. of ICASSP 2003*, Hong Kong, China, Apr. 2003, Vol. VI, pp. 121–124.
- [52] I. Djurović, "Viterbi algorithm for chirp-rate and instantaneous frequency estimation", *Signal Processing*, Vol. 91, No. 5, May 2011, pp. 1308–1314.
- [53] I. Djurović, "Combination of the Viterbi algorithm and cross-Wigner distribution for the instantaneous frequency estimation phase signals", *Jour. on El. and Comp. Eng.*, Vol. 69, No. 3, June 2018, pp. 264–267.
- [54] N. A. Khan, M. Mohammadi, I. Djurović, "A modified Viterbi algorithm based IF estimation algorithm for adaptive directional time-frequency distributions", *Circuits, Systems and Signal Processing*, Vol. 38, No. 5, May 2019, pp. 2227–2244.
- [55] N. A. Khan, S. Ali, K. Choi, "An efficient direction of arrival estimation algorithm for sources with intersecting signature in the time–frequency domain", *Applied Science*, Vol. 11, No. 4, 1849, <https://doi.org/10.3390/app11041849>.
- [56] K. Re, L. Du, X. Lu, Z. Zhou, L. Li, "Instantaneous frequency estimation based on modified kalman filter for cone-shaped target", *Remote sensing*, Vol. 12, No. 17, 2766; <https://doi.org/10.3390/rs12172766>.
- [57] Z. Ma, W. Ruan, M. Chen, X. Li, "An improved time-frequency analysis method for instantaneous frequency estimation of rolling bearing", *Shock and Vibration*, Vol. 2018, Art. Id. 8710190, <https://doi.org/10.1155/2018/8710190>.
- [58] P. Li, Q.-H. Zhang, "An improved Viterbi algorithm for IF extraction of multi-component signals", *Signal Image Video Process.*, Vol. 12, No. 1, pp. 171–179, 2017.

- [59] I. Djurović, P. Wang, M. Simeunović, P. Orlik, "Parameter estimation of coupled polynomial phase and sinusoidal FM signals", *Signal Processing*, Vol. 149, Aug. 2018, pp. 1–13.
- [60] G. Solodky, O. Logman, S. Villeval, I. Bilik, "CDMA-MIMO radar with tansec waveform", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 57, No. 1, Feb. 2021, pp. 76–89.
- [61] E. J. Kelly, I. S. Reed and W. L. Root, "The detection of radar echoes in noise Part I", *Jour. Soc. Ind. Appl. Math.*, Vol. 8, June 1960, pp. 309–341.
- [62] E. J. Kelly, I. S. Reed and W. L. Root, "The detection of radar echoes in noise Part II", *Jour. Soc. Ind. Appl. Math.*, Vol. 8, Sep. 1960, pp. 481–507.
- [63] Q. Lin, J. F. Vesecky, H. A. Zebker, "Phase unwrapping through fringe-line detection in synthetic aperture radar interferometry", *Applied Optics*, Vol. 33, No. 2, 1994, pp. 201–208.
- [64] X. G. Xia, G. Wang, "Phase unwrapping and a robust chinese remainder theorem", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 14, No. 4, April 2007, pp. 247–250.
- [65] A. Amar, A. Leshem, A. J. van der Veen, "A low complexity blind estimator of narrowband polynomial phase signals", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 58, No. 9, pp. 4674–4683, Sept. 2010.
- [66] A. Zeira, B. Friedlander, "Direction of arrival estimation using parametric signal models", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 44, No. 2, Feb. 1996, pp. 339–350.
- [67] S. Kay, "A fast and accurate single frequency estimator", *IEEE Transactions on Acous. Speech and Signal Processing*, Vol. 37, No. 12, Dec. 1989, pp. 1987–1990.
- [68] S. Peleg, B. Porat, "Estimation and classification of polynomial-phase signals", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 37, No. 2, Mar. 1991, pp. 422–430.
- [69] S. Peleg, B. Friedlander, "The discrete polynomial-phase transform", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 43, No. 8, Aug. 1995, pp. 1901–1914.
- [70] B. Porat, B. Friedlander, "Asymptotic statistical analysis of the high-order ambiguity function for parameter estimation of polynomial-phase signals", *IEEE Trans. on Infor. Th.*, Vol. 42, No. 3, May 1996, pp. 995–1001.
- [71] S. Djukanović, I. Djurović, "Aliasing detection and resolving in the estimation of polynomial-phase signal parameters", *Signal Processing*, Vol. 92, No. 1, Jan. 2012, pp. 235–239.
- [72] S. Barbarossa, A. Scaglione and G. B. Giannakis, "Product high-order ambiguity function for multicomponent polynomial-phase signal modeling", *IEEE Tran. Sig. Proc.*, Vol. 46, No. 3, March 1998, pp. 691–708.
- [73] Y. Wang, G. Zhou, "On the use of high-order ambiguity function for multi-component polynomial phase signals", *Signal Processing*, Vol. 65, No. 2, March 1998, pp. 283–296.
- [74] C. Ioana, A. Quinquis, "Time-frequency analysis using warped-based high-order phase modeling", *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, Vol. 2005, Jan. 2005, pp. 2856–2873.
- [75] M. Farquharson, P. O'Shea, G. Ledwich, "A computationally efficient technique for estimating the parameters of polynomial-phase signals from noisy observations", *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, Vol. 53, No. 8, Aug. 2005, pp. 3337–3342.
- [76] M. Farquharson, P. O'Shea, "Extending the performance of the cubic phase function algorithm", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 55, No. 10, Oct. 2007, pp. 4767–4774.
- [77] I. Djurović, P. Wang, and C. Ioana, "Modification of the robust chirp-rate estimator for impulse noise environments", *Signal Processing*, Vol. 90, No. 5, May 2010, pp. 1730–1736.

- [78] I. Djurović, P. Wang, C. Ioana, M. Simeunović, "Cubic phase function for two-dimensional polynomial-phase signals", in *Proc. of EUSIPCO 2010*, Aalborg, Danska, Aug. 2010, pp. 1033–1037.
- [79] I. Djurović, P. Wang, C. Ioana, "Parameter estimation of 2-D polynomial cubic signals using cubic phase function with genetic algorithms", *Signal Processing*, Vol. 90, No. 9, Sep. 2010, pp. 2698–2707.
- [80] P. Wang, J. Yang, "Multicomponent chirp signals analysis using product cubic phase function", *Digital Signal Processing*, Vol. 16, No. 6, Nov. 2006, pp. 654–669.
- [81] M. Simeunović, S. Djukanović, I. Djurović, "A fine search method for the cubic-phase function-based estimator", in *Proc. of EUSIPCO 2012*, Bucharest, Romania, Aug. 2012, pp. 924–928.
- [82] I. Djurović, S. Djukanović, M. Simeunović, P. Raković, B. Barkat, "An efficient joint estimation of wideband polynomial-phase signal parameters and direction-of-arrival in sensor array", *Eurasip Journal on Advances in Signal Processing*, Special issue Special Issue on Advances in Time Frequency and Array Processing of Nonstationary Signals, <http://asp.eurasipjournals.com/content/2012/1/43>, 2012, 10 pages.
- [83] I. Djurović, M. Simeunović, P. Wang, "Cubic phase function: A simple solution for polynomial phase signal analysis", *Signal Processing*, Vol. 135, June 2017, pp. 48–66.
- [84] M. Simeunović, I. Djurović "CPF-HAF estimator of polynomial-phase signals", *IET Electronics Letters*, Vol. 47, No.17, Aug. 2011, pp. 965–966.
- [85] I. Djurović, M. Simeunović, S. Djukanović, P. Wang, "A hybrid CPF-HAF estimation of polynomial-phase signals: detailed statistical analysis", *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, Vol. 60, No. 10, Oct. 2012, pp. 5010–5023.
- [86] S. Barbarossa and V. Petrone, "Analysis of polynomial-phase signals by the integrated generalized ambiguity function", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 45, No. 2, February 1997, pp. 316–327.
- [87] I. Djurović, Lj. Stanković, J. F. Böhme: "Estimation of FM signal parameters in impulse noise environment", *Signal Processing*, Vol. 85, No. 4, Apr. 2005, pp. 821–835.
- [88] J. Wang, P. Wang, J. Xiong, "An algorithm for parameter estimation of multicomponent chirp signals", in *Proc. of IEEE ICASSP 2006*, Vol. 3, May 2006.
- [89] Lj. Stanković, "Local polynomial Wigner distribution", *Signal Processing*, Vol. 59, No. 1 1997, pp. 123–128.
- [90] P. Wang, H. Li, I. Djurović, J. Yang, "Instantaneous frequency rate estimation for high-order polynomial-phase signal", in *Proc. of the IEEE ICASSP 2009*, April 2009, pp. 3009–3012.
- [91] V. Katkovnik, "A new method for varying adaptive bandwidth selection", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 47, No. 9, Sept. 1999, pp. 2567–2571.
- [92] I. Djurović, M. Simeunović, B. Lutovac, "Are genetic algorithms useful for the parameter estimation of FM signals", *Digital Signal Processing*, Vol. 22, No. 6, pp. 1137–1144, Nov. 2012.
- [93] I. Djurović, M. Simeunović, "Parameter estimation of non-uniform sampled polynomial-phase signals using the HOC PF-WD", *Signal Processing*, Vol. 106, No. 1, Jan. 2015, pp. 253–258.
- [94] I. Djurović, M. Simeunović, "Parameter estimation of 2D polynomial phase signals using non-uniform sampling and 2D CPF", *IET Signal Processing*, Vol. 12, No. 9, Dec. 2018, pp. 1140–1145.
- [95] P. O'Shea and B. Boashash, "Some robust instantaneous frequency estimation techniques with application to non-stationary transient detection", in *Proc. EUSIPCO '90*, Sept. 1990, pp. 165–168.

- [96] P. O'Shea, "On refining polynomial phase signal parameter estimates", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*, Vol. 46, No. 3 July 2010, pp. 978–987.
- [97] B. Boashash, P. O'Shea, B. Ristić, „Statistical/computational comparison of some estimators for instantaneous frequency“, in *Proc. of ICASSP*, 1991, pp. 3193–3196.
- [98] A. Papoulis, *Signal analysis*, McGraw Hill, New York, 1977.
- [99] I. Djurović, Y. D. Zhang, “Accurate parameter estimation of over-the-horizon radar signals using RANSAC and MUSIC algorithms“, *Progress in Electromagnetics Research M*, Vol. 67, pp. 85–93, 2018.
- [100] I. Djurović, "On parameters of the QML PPS estimator", *Sig. Proc.*, Vol. 116, Nov. 2015, pp. 1–6.
- [101] O. Chum, "Two-view geometry estimation by random saample and consensus", doktorska disertacija, Czech Technical University in Prague.
- [102] S. Choi, T. Kim, W. Yu, “Performance evaluation of RANSAC family”, in *Proc. of British Machine Vision Conference*, BMVC 2009, London.
- [103] <http://www.bio-ict.ac.me/VijestiDogadjaji.php?tip=vijest&vijestID=92>
- [104] I. Djurović, “A WD-RANSAC instantaneous frequency estimator”, *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 23, No. 5, May 2016, pp. 757–761.
- [105] I. Djurović, “QML-RANSAC: PPS and FM signals estimation in heavy noise environments“, *Signal Processing*, Vol. 130, Jan. 2017, pp. 142–151.
- [106] I. Djurović, “QML-RANSAC IF estimator for overlapping multicomponent signals in the TF plane“, *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 25, No. 3, Mar. 2018, pp. 447–451.
- [107] R. G. McKilliam, B. G. Quinn, I. V. L. Clarkson, B. Moran, B. N. Vellambi, "Polynomial phase estimation by least squares phase unwrapping", *IEEE Trans. Signal Process.*, Vol. 62, pp. 1962–1975, Apr. 2014.
- [108] P. Wang, P. V. Orlik, K. Sadamoto, W. Tsujita, F. Gini, "Parameter estimation of hybrid sinusoidal FM-polynomial phase signal", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 24, No. 1, pp. 66–70, Jan. 2017.
- [109] P. Raković, M. Simeunović, I. Djurović, “On improvement of joint estimation of DOA and PPS coefficients impinging on ULA”, *Signal Processing*, Vol. 134, Maj 2017, pp. 209–213.
- [110] I. Djurović, M. Simeunović, V. V. Lukin, “Estimating DOA and PPS parameters of signal receiver by ULA in heavy tailed noise environment”, *Journal of Elec. Eng.*, Vol. 71, No. 3, pp. 175–184, 2020.
- [111] N. R. Brnović, V. N. Ivanović, I. Djurović, M. Simeunović, “Multi-core hardware realization of the QML PPS estimator”, *IET Computer & Digital Techniques*, Vol. 14, No. 5, Sep. 2020, pp. 187–192.

*Igor Djurović*

**AN OVERVIEW OF PARAMETRIC AND NONPARAMETRIC  
ESTIMATORS OF FM SIGNALS**

*Abstract*

Nonparametric and parametric estimators for nonstationary frequency modulated (FM) signals are reviewed. Focus in the area of the nonparametric estimation is on the Viterbi algorithm (VA) for instantaneous frequency (IF). It is also applicable to estimation of other parameters of nonstationary FM signals. The quasi maximum likelihood (QML) is presented as the best existing parametric estimator. The QML can be applied also on nonparametric estimation.