

*Ranislav M. Bulatović**

О СТАБИЛНОСТИ ДИНАМИЧКИХ СИСТЕМА
СА ГИРОСКОПСКИМ, ЦИРКУЛАЦИОНИМ
И ПОТЕНЦИЈАЛНИМ СИЛАМА

I z v o d

U radu se istražuje stabilnost linearnog nekonzervativnog mehaničkog sistema sa giroskopskim, cirkulacionim i potencijalnim silama. Dokazuje se nekoliko teorema koje sadrže uslove stabilnosti (nestabilnosti) formulisanih, direktno ili indirektno, preko koeficijenata opisnih matrica sistema.

ON THE STABILITY OF DYNAMICAL SYSTEMS WITH
GYROSCOPIC, CIRCULATORY AND POTENTIAL FORCES

A b s t r a c t

The paper investigates the stability of linear non-conservative mechanical systems subjected to potential, gyroscopic and circulatory forces. Several stability theorems are proved. The stability (instability) conditions given by the theorems are either directly or indirectly in terms of the coefficients of system matrices.

* Prof. dr Ranislav Bulatović, Mašinski fakultet, 81000 Podgorica.

1. UVOD

U radu razmatramo linearni autonomni dinamički (mehanički) sistem sa konačnim brojem stepena slobode opisan vektorsko-matričnom diferencijalnom jednačinom

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + (N + C)q = 0, \quad q \in \mathfrak{R}^n \quad (1)$$

gdje su: A -inercijska matrica koja je simetrična i pozitivno definitna ($A = A^T > 0$); $B = -B^T$ i $N = -N^T$ – matrice koeficijenata giroskopskih i cirkulacionih (položajno nepotencijalnih) sila, respektivno; $C = C^T$ – matrica potencijalnih (konzervativnih) sila. Linearnom zamjenom koordinata $x = A^{1/2}q$, gdje $A^{1/2}$ predstavlja pozitivno definitni kvadratni korijen matrice A , sistem (1) se transformiše na prostiji oblik

$$\ddot{x} + G\dot{x} + (P + K)x = 0, \quad (2)$$

od koga će se polaziti u daljim razmatranjima, a gdje je

$$G = -G^T = A^{-1/2}BA^{-1/2}, \quad P = -P^T = A^{-1/2}NA^{-1/2} \text{ i}$$

$$K = K^T = A^{-1/2}CA^{-1/2}.$$

Stabilnost opisanog sistema definiše se kao stabilnost, po Ljapunovu, trivijalnog rješenja jednačine (1), odnosno (2), i ona je, u skladu sa teorijom linearnih sistema, u potpunosti određena prirodom sopstvenih vrijednosti karakteristične matrice pridružene jednačini (2) (v., npr., [1]). Međutim, ispitivanje spektra karakteristične matrice sistema (2) sa velikim brojem stepena slobode je komplikovano, naročito kada matrice pojedinih sila nijesu specificirane već zavise od određenih fizičkih i/ili geometrijskih parametara. Stoga, od primarnog značaja su dovoljni i/ili neophodni uslovi stabilnosti iskazani direktno ili indirektno preko koeficijenata opisnih matrica sistema. Najstariji rezultat toga tipa je Lagranžova (Lagrange) teorema, koja pokazuje da je za stabilnost konzervativnog sistema ($G = 0, P = 0$) neophodno i dovoljno da matrica potencijalnih sila bude pozitivno definitna. Pitanje stabilnosti konzervativno-giroskopskog sistema ($P=0$) je klasičan zadatak postavljen u radovima Tomsona (Thomson, Lord Kelvin) i Tete (Tait) 1879. godine, a koji još uvijek nije riješen u cjelosti (v. [2], [3]). Stabilnost sistema (2) u odsustvu giroskopskih sila ($G=0$) razmatrana je u radu [4], gdje je dat i pregled ranijih rezultata. Osim toga, poznato je da sistem (2) pri istovremenom dejstvu potencijalnih, giroskopskih i cirkulacionih sila ne može biti asimptotski stabilan, kao i da je sistem nestabilan ako je ispunjen bar jedan od sljedećih uslova:

- A) $K < 0$ i n neparno [5];
- B) $K < 0$ i $P = \alpha G$, gdje je α realan broj različit od nule [6];
- C) $PG = GP$ i $K = \alpha I$, gdje je α realan broj a I je jedinična matrica [7];
- D) $Tr(GP) \neq 0$ [7], [8];
- E) $4K - G^2 < 0$ [8].

U ovom radu, u narednom odjeljku, izveden je kriterijum stabilnosti sistema (2) formulisan preko uslova pozitivne definitnosti jedne matrice Hankelovog (Hankel) tipa čiji su koeficijenti, posredstvom Njutnovih (Newton) formula, povezani sa koeficijentima karakterističnog polinoma. U trećem odjeljku prvo se pokazuje da pod uslovom E korijeni karakterističnog polinoma ne mogu biti čisto imaginarni brojevi, a zatim se dokazuju dva nova kriterijuma nestabilnosti koji su formulisani direktno preko opisnih matrica sistema.

2. KRITERIJUM STABILNOSTI

Pretpostavljajući rješenje jednačine (2) u obliku $x = X \exp(\lambda t)$, gdje je X konstantni kompleksni vektor, a t vrijeme, dolazi se do sopstvenog zadatka

$$(\lambda^2 I + \lambda G + P + K)X = 0, \quad (3)$$

odakle slijedi karakteristična jednačina

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda^2 I + \lambda G + P + K) = 0,$$

ili, u razvijenom obliku,

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{2n} + a_1 \lambda^{2n-1} + a_2 \lambda^{2n-2} + \dots + a_{2n} = 0 \quad (4)$$

gdje su a_i polinomi u odnosu na koeficijente opisnih matrica sistema. Za razmatrani sistem je $a_1 = 0$, pa je za stabilnost sistema neophodno da svi koeficijenti uz neparne stepene karakterističnog polinoma budu jednaki nuli. U protivnom, ako je bar jedan od tih koeficijenata različit od nule, karakteristična jednačina (4) će imati korijen sa pozitivnim realnim dijelom [8] i, dakle, sistem će biti nestabilan.

Pretpostavimo da su:

$$a_{2i-1} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Pošto je tada $\Delta(\lambda) = \Delta(-\lambda)$, sistem (2) će biti stabilan ako i samo ako su realni djelovi svih korijena karakteristične jednačine jednaki nuli i ti korijeni kvaziprosti (tj., svakom korijenu λ višestrukosti k odgovara k nezavisnih sopstvenih vektora X), što implicira da sva rješenja jednačine n -tog stepena

$$\mu^n + b_1\mu^{n-1} + \dots + b_n = 0, \quad b_i = a_{2i} \quad (5)$$

dobijene iz (4) smjenom $\mu = \lambda^2$, treba da budu nepozitivni realni brojevi.

Uvedimo Njutnove sume (simetrične funkcije korijena μ_j jednačine (5))

$$s_k = \sum_{j=1}^n \mu_j^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

i pomoću njih formirajmo Hankelovu kvadratnu formu

$$S_n(y, y) = y^T H_n y, \quad y \in \mathfrak{R}^n \quad (6)$$

gdje je

$$H_n = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdot & \cdot & \cdot & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdot & \cdot & \cdot & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdot & \cdot & \cdot & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdot & \cdot & \cdot & s_{2n-2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Veličine s_k mogu se izraziti preko koeficijenata b_i , odnosno a_i , posredstvom Njutnovih formula:

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= n, s_k = -s_{k-1}a_2 - \dots - s_1 a_{2(k-1)} - k a_{2k}, k \leq n \\ s_k &= -s_{k-1}a_2 - \dots - s_{k-n} a_{2n}, k = n+1, n+2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Diskriminanta $\delta = \det H_n$ kvadratne forme (6) jednaka je diskriminanti karakteristične jednačine (4), tj.

$$\delta = \prod_{i < j} (\mu_i - \mu_j)^2,$$

a broj različitih realnih rješenja te jednačine jednak je signaturi forme (6) (v., npr., [9]). Odavde, imajući u vidu i Dekartovu teoremu o broju pozitivnih korijena polinoma [10], slijedi da su korijeni jednačine (5) različiti negativni realni brojevi ako i samo ako su svi koeficijenti te jednačine pozitivni a kvadratna forma (6) pozitivno definitna. Tako je dokazana

Teorema 1. *Ako su ispunjeni sljedeći uslovi*

a) $a_{2i-1} = 0$, ($i = 2, \dots, n$); b) $a_{2j} > 0$ ($j = 1, \dots, n$); c) $H_n > 0$
 onda je sistem (2) stabilan.

Napomena 1. Za klasu sistema za koju je $\delta \neq 0$, što je dovoljno opšti slučaj, uslovi prethodne teoreme su neophodni i dovoljni za stabilnost sistema, dok je teorema neprimjenljiva u slučaju kada je $\delta = 0$.

Iz kriterijuma D slijedi da je sistem (2) sa dva stepena slobode pri istovremenom dejstvu girokopskih i cirkulacionih sila nestabilan nezavisno od potencijalnih sila. Sljedeći primjer pokazuje da sistemi sa tri stepena slobode mogu zadovoljavati uslove teoreme 1, tj. takvi sistemi mogu biti stabilni.

Primjer 1. Razmotrimo sistem (2) sa tri stepena slobode opisan matricama

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = p \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Karakteristična jednačina ovog sistema je

$$\lambda^6 + 9\lambda^4 + (9 + 3p^2)\lambda^2 + 3p^2 + 1 = 0$$

i njeni koeficijenti, očigledno, zadovoljavaju uslove a i b teoreme 1. Ostaje da se provjeri uslov c. Pomoću formula (8) nalaze se koeficijenti matrice H_3 :

$$s_0 = 3, \quad s_1 = -9, \quad s_2 = -6p^2 + 63$$

$$s_3 = 3(24p^2 - 163), \quad s_4 = 9(2p^4 - 84p^2 + 427).$$

Prema Silvestrovom (Sylvester) kriterijumu, odgovarajuća matrica H_3 je pozitivno definitna ako i samo ako je

$$18(6 - p^2) > 0$$

$$\delta = 54(5 - p^2)(p^2 - 2)^2 > 0$$

pa je, na osnovu teoreme 1, sistem (2), (9) stabilan ako je $p^2 \in [0, 2) \cup (2, 5)$. Prema napomeni 1, za ostale vrijednosti parametra p , osim za $p^2 = 2$ i $p^2 = 5$ kad je $\delta = 0$, sistem je nestabilan.

3. KRITERIJUMI NESTABILNOSTI

Kriterijum E, dokazan u radu [8], ustanovljen je primjenom direktnog metoda Ljapunova. U tom slučaju, bližu informaciju o prirodi korijena karakteristične jednačine daje

Teorema 2. *Kad je $4K - G^2 < 0$, tada korijeni karakteristične jednačine (4) ne mogu biti čisto imaginarni.*

Dokaz. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju teoreme 2, da je $\lambda = i\omega$, $\omega \in \mathfrak{R}$, korijen karakteristične jednačine (4), a $X = X_1 + iX_2$, $X_1, X_2 \in \mathfrak{R}^n$, jedinični sopstveni vektor ($X^*X = 1, X^* = X_1^T - iX_2^T$) koji odgovara tom korijenu. Množeći (3) skalarno sa X i stavljajući $\lambda = i\omega$ slijedi

$$-\omega^2 + i\omega X^*GX + X^*PX + X^*KX = 0. \quad (10)$$

Pošto je $G^T = -G$, $P^T = -P$ i $K^T = K$, to je $X^*GX = 2iX_1^TGX_2$, $X^*PX = 2iX_1^TPX_2$ i $X^*KX = X_1^TKX_1 + X_2^TKX_2$. Ako se uvedu realne veličine $g = 2X_1^TGX_2$, $p = 2X_1^TPX_2$ i $k = X^*KX$, jednačina (10) postaje

$$\omega^2 + \omega g - ip - k = 0,$$

odakle slijedi da je $p = 0$ i da je

$$\omega^2 + \omega g - k = 0.$$

Dobijena kvadratna jednačina po ω ima realno rješenje samo ako je

$$g^2 + 4k \geq 0. \quad (11)$$

S druge strane, na osnovu Koši-Švarcove (Cauchy-Schwarz) nejednačine je

$$g^2 = |X^*GX|^2 \leq -X^*G^2X$$

pa je

$$g^2 + 4k \leq X^*(4K - G^2)X.$$

Odavde, zbog negativne definitnosti matrice $4K - G^2$, slijedi da je $g^2 + 4k < 0$, a to je u suprotnosti sa (11). Postoji, dakle, kontradikcija, i time je teorema 2 dokazana.

Teorema 3. *Ako je $P \neq 0$, a matrice G, P i K međusobno komutativne, onda je sistem (2) nestabilan.*

Kad je $K = \alpha I$, $\alpha \in \mathfrak{R}$, prethodna teorema se svodi na kriterijum C, tj. ona predstavlja uopštenje tog rezultata.

Dokaz. Pošto su matrice $G = -G^T$, $P = -P^T$ i $K = K^T$ međusobno komutativne, na osnovu teoreme o istovremenoj redukciji više matrica na kanonske oblike [11], slijedi da postoji ortogonalna matrica Q takva da su:

$$Q^T G Q = \tilde{G} = \text{diag} \left(g_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, g_k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, 0, \dots, 0 \right), \quad k \leq \left[\frac{n}{2} \right], \quad g_j \in \mathfrak{R};$$

$$Q^T P Q = \tilde{P} = \text{diag} \left(p_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, p_m \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, 0, \dots, 0 \right), \quad m \leq \left[\frac{n}{2} \right], \quad p_j \in \mathfrak{R};$$

$$Q^T K Q = \tilde{K} = \text{diag} \left(k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, k_r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, k_{2r+1}, \dots, k_n \right), \quad r = \max(k, m), \quad k_j \in \mathfrak{R}.$$

Uvodeći novu promjenljivu y smjenom $x = Qy$, jednačina (2) se transformiše na jednačinu

$$\ddot{y} + \tilde{G}\dot{y} + \tilde{P}y + \tilde{K}y = 0$$

koja, zbog $P \neq 0$, sadrži najmanje jedan podsistem sa dva stepena slobode sa cirkulacionim silama, a čija je matrica krutosti proporcionalna jediničnoj ili nula matrica. Iz nestabilnosti takvog podsistema slijedi nestabilnost polaznog sistema (2).

Neka je $Tr(K)$ trag matrice K a $N(G)$ euklidska norma matrice G , tj.

$$Tr(K) = \sum k_{ii}, \quad N(G) = \sum g_{ij}^2.$$

Teorema 4. *Sistem (2) je nestabilan ako je*

$$2Tr(K) + N(G) \leq 0. \quad (12)$$

Kad je $G = 0$, uslov (12) svodi se na kriterijum nestabilnosti cirkulaciono-potencijalnog sistema [7], a ako je $P = 0$ i $K \neq 0$, on se poklapa sa nedavno izvedenim uslovom nestabilnosti konzervativno-giroskogopskog sistema [12].

Dokaz. Pošto je $G^T = -G$, postoji ortogonalna matrica Q koja matricu G transformiše na kanonski oblik

$$Q^T G Q = \hat{G} = \text{diag} \left(\hat{g}_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \hat{g}_k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, 0, \dots, 0 \right), \quad k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Smjenom $x = Qy$, jednačina (2) postaje

$$\ddot{y} + \hat{G}\dot{y} + \hat{P}y + \hat{K}y = 0,$$

gdje je $\hat{P} = -\hat{P}^T = Q^T P Q$ i $\hat{K} = \hat{K}^T = Q^T K Q$. Sada je lako pokazati da je u karakterističnom polinomu

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda^2 I + \hat{G}\lambda + \hat{P} + \hat{K})$$

koeficijent uz λ^{2n-2} :

$$a_2 = \sum \hat{k}_{ii} + \sum \hat{g}_i^2 = \text{Tr}(\hat{K}) + \frac{1}{2} N(\hat{G}),$$

odnosno

$$a_2 = \text{Tr}(K) + \frac{1}{2} N(G),$$

jer su euklidska norma i trag matrice invarijantni u odnosu na ortogonalne transformacije.

Pokažimo da iz uslova (12) slijedi nestabilnost sistema. Zaista, s obzirom na strukturu članova karakterističnog polinoma $\Delta(\lambda)$, moguća su dva slučaja.

Prvi slučaj: $\Delta(\lambda) \neq \Delta(-\lambda)$. Tada je, u skladu sa razmatranjima odjeljka 2, sistem je nestabilan nezavisno od koeficijenta a_2 .

Drugi slučaj: $\Delta(\lambda) = \Delta(-\lambda)$. Pretpostavimo da su realni djelovi svih korijena karakteristične jednačine jednaki nuli, tj. $\lambda_{j,j+1} = \pm i\omega_j$, $\omega_j \in \mathfrak{R}$, $j = 1, \dots, n$. Prema Vietovim (Viète) formulama je

$$a_2 = \sum_{j < k} \lambda_j \lambda_k = \sum \omega_j^2,$$

što je pozitivno ako je bar jedno $\omega_j \neq 0$. Dakle, ako je zadovoljen uslov (12), svi korijeni karakteristične jednačine biće jednaki nuli (to je moguće samo ako je $a_2 = 0$) ili će postojati korijen čiji je realni dio različit od nule. U prvom slučaju sistem je očigledno nestabilan, a u drugom, nestabilnost slijedi iz činjenice da, zbog parnosti funkcije $\Delta(\lambda)$, postoji korijen karakteristične jednačine sa pozitivnim realnim dijelom.

Da uslov teoreme 4 nije sadržan u kriterijumima A-E, pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 2. Razmotrimo sistem (2) sa opisnim matricama

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Očigledno je da sistem (2), (13) ne zadovoljava uslove kriterijuma A i C, a pošto je $Tr(GP) = 0$ i $4K - G^2 = \text{diag}(-3, -3, 2)$, to nijesu ispunjeni ni uslovi kriterijuma D i E. Dalje je $Tr(K) = -3/2$ i $N(G) = 2$, tj. $2Tr(K) + N(G) = -1 < 0$, pa, na osnovu teoreme 4, slijedi da je sistem (2), (13) nestabilan.

LITERATURA

- [1] Четаев Н. Г., *Устойчивость движения. Работы по аналитической механике*. Москва 1962.
- [2] Walker J. A., Stability of linear conservative gyroscopic systems // *Journal of Applied Mechanics*, V. 58, 1991, pp. 229-232.
- [3] Булатович Р. М., Об устойчивости линейных потенциальных гироскопических систем в случаях, когда потенциальная энергия имеет максимум // *Прикладная математика и механика (ПММ)*, Т. 61, 1997, с. 385-390.
- [4] Bulatovic R. M. On the stability of linear circulatory systems // *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, u štampi.
- [5] Меркин Д. Р., *Гироскопические системы*. Москва 1956.
- [6] Агафонов С. А., Об устойчивости неконсервативных систем // *Вестн. МГУ. Сер. Матем., механ.*, $N_0 4$, 1972, с. 87-90.
- [7] Лахаданов В. М., О стабилизации потенциальных систем // *Прикладная математика и механика (ПММ)*. Т. 39, 1975, с. 53-58.
- [8] Карапетян А. В., Об устойчивости неконсервативных систем // *Вестн. МГУ. Сер. Матем., механ.*, $N_0 4$, 1975, с. 109-113.
- [9] Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*. Москва 1988.
- [10] Кугера Ђ., *Viša algebra*, knjiga II, Zagreb 1965.
- [11] Horn R. A., Johnson E. R., *Matrix analysis*, London 1986.
- [12] Lancaster P., Zizler P., On the stability of gyroscopic systems // *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61, 1998, pp. 715-717.

