ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 14, 2002.
ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 14, 2002.
THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS
GLASNIK OF THE SECTION OF NATURAL SCIENCES, 14, 2002.

UDK 512.53

Blagoje Cerović *

BAZISNA KLASA U SMISLU LJAPINA ZA KLASU ANTI-INVERZNIH PRSTENA

Izvod

Cilj rada je da se odredi bazisna klasa u smislu Ljapina, za klasu anti-inverznih prstena $\mathcal{AR}$ razmatranih u [2] u odnosu na klasu svih prstena.

Ključne riječi: anti-inverzni prsteni, bazisne klase

Mathematical Subject Classification (2000): 16N20, 16U99

BASIS CLASS IN THE SENSE OF LJAPIN FOR THE CLASS OF ANTI-INVERSE RINGS

Abstract

The intention of this work is to determine basis class in the sense of Ljapin for the class of anti-inverse rings $\mathcal{AR}$ considered in [2] in relation to the class of all rings (Theoreme 2.1).

*Prof. dr Blagoje Cerović, University of Montenegro, Faculty of Philosophy, 81400 Nikšić, Montenegro, Yugoslavia

1. U [1] je razmatrana klasa A *anti-inverznih* semigrupa, tj. klasa semigrupa u kojima važi

$$(\forall x)(\exists y)(xyx = y \wedge yxy = x).$$

Jedna karakterizacija klase A ([1] Teorema 2.1.) je:

Neka je S semigrupa. Važi:

$$S \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (\forall x \in S)(\exists y \in S)(x^2 = y^2 \wedge yx = x^3y \wedge x^3 = x).$$

U [2] je razmatrana klasa *anti-inverznih* prstena AR definisana na sljedeći nacin:

Prsten (R, +, .) je anti-inverzan, ako za svaki njegov element x postoji njemu anti-inverzni element y , tj.

$$(\forall x)(\exists y)(xyx = y \wedge yxy = x).$$

Za anti-inverzne prstene važi:

(a) Svaki anti-inverzni prsten je komutativan.

(b) Svaki anti-inverzni prsten je regularan.

(c) Svaki neinvertibilni element anti-inverznog prstena je djelitelj nule.

(d) Svaki prosti ideal anti-inverznog prstena je maksimalan.

(e) Svaki anti-inverzni prsten je poluprimitivan, tj. Jacobsonov radikal anti-inverznog prstena je (0).

U [2] je data jedna karakterizacija klase prstena AR (Propozicija 2.2.):

Neka je R prsten. Važi:

$$R \in \mathcal{AR} \Leftrightarrow (\forall x \in R)(x^3 = x).$$

Takođe je u [2] (Propozicija 2.2.) dokazano:

Neka je $R \in \mathcal{AR}$. Tada R je polje ako i samo ako R ima dva elementa 0 i 1 ili ima tri elementa 0, 1 i - 1.

U [2] (Lema 1.2) je dokazano:

Ako je R prsten, takav da važi

$$(\forall x \in R)(x^n = x),$$

onda je

$$(\forall x \in R)((2^n - 2)x = 0).$$

Odavde, neposredno slijedi:
Ako $R \in \mathcal{AR}$, onda važi

$$(\forall x \in R)(6x = 0).$$

2. *Definicija 2.1. Neka su $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ tri klase prstena, pri čemu je $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. Klasa $\mathcal{B}$ je bazisna klasa u smislu Ljapina za klasu $\mathcal{C}$ u odnosu na klasu $\mathcal{D}$ ako važi:*
(a) Svaki prsten iz $\mathcal{C}$ je unija prstena izomorfnih sa nekim od prstena iz klase $\mathcal{B}$.
(b) Svaki prsten iz klase $\mathcal{D}$, koji je jednak uniji prstena izomorfnih sa nekim od prstena iz klase $\mathcal{B}$ pripada klasi $\mathcal{C}$.
(c) Nijedna podklasa $\mathcal{B}^*$ klase prstena $\mathcal{B}$ ne zadovoljava uslov (a).

Cilj ovoga rada je određivanje bazisne klase u smislu Ljapina za klasu anti-inverznih prstena $\mathcal{AR}$ u odnosu na klasu svih prstena $\mathcal{R}$.

Prvo razmotrimo neke primjere anti-inverznih prstena, generisanih elementom x anti-inverznog prstena R, što će biti od značaja za određivanje tražene bazisne klase u smislu Ljapina.

Primjer 2.1. Neka $R \in \mathcal{AR}, x \in R, x \neq 0$ i neka je $2x = 0$. Tada važi

$$(x + x^2) = x^2 + x^4 = x^2 + x^2 = 2x^2 = 0,$$

odakle je $x + x^2 = 0$, odnosno $x^2 = x$.
Dakle, za $2x = 0$ element x generiše prsten od dva elementa 0 i x:

$+$	0	x
0	0	x
x	x	0

$\cdot$	0	x
0	0	0
x	0	x

koji je izomorfan sa prstenom Z_2.
Primjer 2.2. Neka $R \in \mathcal{AR}, x \in R, x \neq 0$ i neka je $3x = 0$.
Za $x^2 = x$ dobijamo prsten od tri elementa $0, x$ i $2x$, pri čemu je

$+$	0	x	$2x$
0	0	x	$2x$
x	x	$2x$	0
$2x$	$2x$	0	x

$\cdot$	0	x	$2x$
0	0	0	0
x	0	x	$2x$
$2x$	0	$2x$	x

a za $x^2 = 2x$ prsten, takođe od tri elementa $0, x$ i $2x$, pri čemu je

$+$	0	x	$2x$
0	0	x	$2x$
x	x	$2x$	0
$2x$	$2x$	0	x

$\cdot$	0	x	$2x$
0	0	0	0
x	0	$2x$	x
$2x$	0	x	$2x$

U oba slučaju dobijeni prsteni su izimorfni sa Z_3.

Primjer 2.3. Neka $R \in \mathcal{AR}, x \in R, x \neq 0$ i neka je $3x = 0$. Neka, dalje, za razliku od prethodnog primjera, važi $x2 \neq x$ i $x2 \neq 2x$.

Zbog

$$\begin{aligned}
&2x^2 = x \Rightarrow 4x^2 = 2x \Rightarrow 3x^2 + x^2 = 2x \Rightarrow x^2 = 2x,\\
&2x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^3 = x^3 \Rightarrow 2x = x \Rightarrow x = 0,\\
&2x^2 = 2x \Rightarrow 2x + x^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = x
\end{aligned}$$

važi $2x^2 \neq x, x^2 \neq x^2, 2x^2 \neq 2x$.

Iz

$$\begin{aligned}
&x + x^2 = x \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x + x^2 = 2x \Rightarrow x^2 = x,\\
&x + x^2 = x^2 \Rightarrow x = 0, x + x^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = x
\end{aligned}$$

slijedi da je $x + x^2 \neq x, x + x^2 \neq 2x, x + x^2 \neq x^2, x + x^2 \neq 2x^2$.

Dalje, iz

$$\begin{aligned}
&x + 2x^2 = x \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x + 2x^2 = 2x \Rightarrow 2x^2 = x,\\
&x + 2x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = x, x + 2x^2 = 2x^2 \Rightarrow x = 0,\\
&x + 2x^2 = x + x^2 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,
\end{aligned}$$

slijedi da je $x + 2x^2 \neq x, x + 2x^2 \neq 2x, x + 2x^2 \neq x^2, x + 2x^2 \neq 2x^2, x + 2x^2 \neq x + x^2$.

Iz

$$\begin{aligned}
&2x + x^2 = x \Rightarrow x^2 = 2x, 2x + x^2 = 2x \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\\
&2x + x^2 = x^2 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0, 2x + x^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 2x,\\
&2x + x^2 = x + x^2 \Rightarrow x = 0, 2x + x^2 = x + 2x^2 \Rightarrow x^2 = x
\end{aligned}$$

slijedi $2x + x^2 \neq x, 2x + x^2 \neq 2x, 2x + x^2 \neq x^2, 2x + x^2 \neq 2x^2, 2x + x^2 \neq x + x^2$ i $2x + x^2 \neq x^2$.

Takođe, zbog

$$\begin{aligned}
&2x + 2x^2 = x \Rightarrow 2x^2 = 2x, 2x + 2x^2 = 2x \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\\
&2x + 2x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2x, 2x + 2x^2 = 2x^2 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0,\\
&2x + 2x^2 = x + x^2 \Rightarrow x + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2x, 2x + 2x^2 = x + 2x^2 \Rightarrow x = 0,\\
&2x + 2x^2 = 2x + x^2 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,
\end{aligned}$$

važi $2x + 2x^2 \neq x, 2x + 2x^2 \neq 2x, 2x + 2x^2 \neq x^2, 2x + 2x^2 \neq 2x^2, 2x + 2x^2 \neq x + x^2, 2x + 2x^2 \neq x + 2x^2, 2x + 2x^2 \neq 2x + x^2$.

Dakle, ako $R \in \mathcal{AR}, x \in R, x \neq 0$, pri čemu je $3x = 0, x^2 \neq x$ i $x^2 \neq 2x$, onda element x generiše podprsten R_9 od 9 elemenata $0, x, 2x, x^2, 2x^2, x + x^2, x + 2x^2, 2x + x^2$ i $2x + 2x^2$.

Primjer 2.4. Neka je $R \in \mathcal{AR}, x \in R, x \neq 0$. Tada, kao što smo vidjeli, važi $6x = 0$.

Pretpostavimo da je $2x \neq 0$ i $3x \neq 0$. Tada je

$$\begin{aligned}
&x^2 = 2x \Rightarrow x^3 = 2x^2 \Rightarrow x = 2x^2 \Rightarrow x = 4x \Rightarrow 3x = 0,\\
&x^2 = 3x \Rightarrow x^3 = 3x^2 \Rightarrow x = 3x^2 \Rightarrow x = 9x \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow 2x = 0,\\
&x^2 = 4x \Rightarrow x^3 = 4x^2 \Rightarrow x = 4x^2 \Rightarrow x = 16x \Rightarrow 3x = 0,
\end{aligned}$$

pa, prema tome, važi: $x^2 \neq 2x, x^2 \neq 3x$ i $x^2 \neq 4x$.

Zbog $6x^2 = 6x = 0$, važi

$$x^2 = x \Leftrightarrow 5x^2 = 5x i 2x^2 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 = 4x.$$

Iz $x^2 = x$ neposredno slijedi da je $2x^2 = 2x$. Neka je $2x^2 = 2x$. Kako je $(x + 5x^2)^3 = 4x + 2x^2 = 6x = 0$, to je $x + 5x^2 = 0$, odnosno $x^2 = x$. Dakle, važi

$$x^2 = x \Leftrightarrow 5x^2 = 5x,$$

odnosno, dokazali smo da važi

$$x^2 = x \Leftrightarrow 5x^2 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 = 4x.$$

Zbog $6x^2 = 6x = 0$, takođe, važi

$$x^2 = 5x \Leftrightarrow 5x^2 = x i 2x^2 = 4x \Leftrightarrow 4x^2 = 2x.$$

Iz $x^2 = 5x$ slijedi $2x^2 = 10x = 4x$. Neka je, sada $2x^2 = 4x$. Tada je $(x + 5x^2)^3 = 4x + 2x^2 = 2x$, odakle je $x + 5x^2 = 2x$, odnosno $x^2 = 5x$.

Dokazali smo da je

$$x^2 = x \Leftrightarrow 5x^2 = 5x,$$

odnosno, dokazali smo da važi

$$x^2 = 5x \Leftrightarrow 5x^2 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 = 4x \Leftrightarrow 4x^2 = 2x.$$

Dakle, ako je $R \in \mathcal{AR}, x \in R, x \neq 0, 2x \neq 0, 3x \neq 0$ i $x^2 = x$, tada element x generiše prsten R_6 od 6 elemenata $0, x, 2x, 3x, 4x$ i $5x$, pri čemu je:

$+$	0	x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$
0	0	x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$
x	x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$	0
$2x$	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$	0	x
$3x$	$3x$	$4x$	$5x$	0	x	$2x$
$4x$	$4x$	$5x$	0	x	$2x$	$3x$
$5x$	$5x$	0	x	$2x$	$3x$	$4x$

$\cdot$	0	x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$
0	0	0	0	0	0	0
x	0	x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$
$2x$	0	$2x$	$4x$	0	$2x$	$4x$
$3x$	0	$3x$	0	$3x$	0	$3x$
$4x$	0	$4x$	$2x$	0	$4x$	$2x$
$5x$	0	$5x$	$4x$	$3x$	$2x$	x

Ako je $R \in \mathcal{AR}, x \in R, x \neq 0, 2x \neq 0, 3x \neq 0$ i $5x^2 = x$, tada element x takođe generiše prsten R_9 od 9 elemenata $0, x, 2x, 3x, 4x$ i $5x$, pri čemu je:

$+$	0	x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$
0	0	x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$
x	x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$	0
$2x$	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$	0	x
$3x$	$3x$	$4x$	$5x$	0	x	$2x$
$4x$	$4x$	$5x$	0	x	$2x$	$3x$
$5x$	$5x$	0	x	$2x$	$3x$	$4x$

$\cdot$	0	x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$
0	0	0	0	0	0	0
x	0	$5x$	$4x$	$3x$	$2x$	x
$2x$	0	$4x$	$2x$	0	$4x$	$2x$
$3x$	0	$3x$	0	$3x$	0	$3x$
$4x$	0	$2x$	$4x$	0	$2x$	$4x$
$5x$	0	x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$

Oba ova prstena su izomorfna sa prstenom Z_6.

Primjer 2.5. Neka $R \in \mathcal{AR}, x \in R, x \neq 0, 6x = 0, 2x \neq 0, 3x \neq 0, x^2 \neq x$ i $x^2 \neq 5x$.

Kao što smo vidjeli (Primjer 2.4) iz $2x \neq 0$ i $3x \neq 0$ slijedi $x^2 \neq 2x, x^2 \neq 3x$ i $x^2 \neq 4x$.

Kako

$$2x^2 = x \Rightarrow 2x3 = x^2 \Rightarrow x^2 = 2x,$$
$$2x^2 = 3x \Rightarrow 2x3 = 3x^2 \Rightarrow 2x = 3x^2 \Rightarrow 4x = 6x^2 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow 2x = 0,$$
$$2x^2 = 5x \Rightarrow 2x3 = 5x^2 \Rightarrow 2x = 5x^2 \Rightarrow 4x = 10x^2 \Rightarrow 4x = x \Rightarrow 3x = 0,$$

to je $2x^2 \neq x, 2x^2 \neq 3x, 2x^2 \neq 5x$.

Takođe, iz

$$x^2 = x \Leftrightarrow 2x^2 = 2x \text{ i } x^2 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 = 4x,$$

slijedi $2x^2 \neq 2x$ i $2x^2 \neq 4x$.

Očigledno je $2x^2 \neq x^2$, jer bi bilo $x^2 = 0$, odnosno $x = 0$.

Zbog

$$\begin{array}{lll}
3x^2 = x & \Rightarrow 3x3 = x^2 & \Rightarrow x^2 = 3x, \\
3x^2 = 2x & \Rightarrow 3x3 = 2x^2 & \Rightarrow 2x^2 = 3x, \\
3x^2 = 4x & \Rightarrow 3x3 = 4x^2 & \Rightarrow 3x = 4x + x^2 \Rightarrow x^2 = 5x, \\
3x^2 = 5x & \Rightarrow 3x3 = 5x^2 & \Rightarrow 3x = 5x^2 \Rightarrow x^2 = 3x, \\
3x^2 = x^2 & \Rightarrow 3x3 = x3 & \Rightarrow 3x = x \Rightarrow 2x = 0, \\
3x^2 = 2x^2 & \Rightarrow 3x3 = 2x3 & \Rightarrow 3x = 2x \Rightarrow x = 0,
\end{array}$$

važi $3x^2 \neq x, 3x^2 \neq 2x, 3x^2 \neq 4x, 3x^2 \neq 5x, 3x^2 \neq x^2$ i $3x^2 \neq 2x^2$.

Primijetimo da je moguće da bude $3x^2 = 3x$.

Važi

$$\begin{array}{lll}
4x^2 = x & \Rightarrow 4x3 = x^2 & \Rightarrow x^2 = 4x, \\
4x^2 = 2x & \Rightarrow x^2 = 5x, & \\
4x^2 = 3x & \Rightarrow 4x3 = 3x^2 & \Rightarrow 3x^2 = 4x, \\
4x^2 = 4x & \Rightarrow x^2 = x, & \\
4x^2 = 5x & \Rightarrow 4x3 = 5x^2 & \Rightarrow 5x^2 = 4x \Rightarrow x^2 = 2x, \\
4x^2 = x^2 & \Rightarrow 4x = x & \Rightarrow 3x = 0, \\
4x^2 = 2x^2 & \Rightarrow 4x = 2x & \Rightarrow 2x = 0, \\
4x^2 = 3x^2 & \Rightarrow 4x = 3x & \Rightarrow x = 0,
\end{array}$$

pa je $4x^2 \neq x, 4x^2 \neq 2x, 4x^2 \neq 3x, 4x^2 \neq 4x, 4x^2 \neq 5x, 4x^2 \neq x^2, 4x^2 \neq 2x^2$ i $4x^2 \neq 3x^2$.

Dalje je

$$\begin{array}{lll}
5x^2 = x & \Rightarrow x^2 = 5x, & \\
5x^2 = 2x & \Rightarrow 5x3 = 2x^2 & \Rightarrow 2x^2 = 5x, \\
5x^2 = 3x & \Rightarrow 5x3 = 3x^2 & \Rightarrow 3x^2 = 5x, \\
5x^2 = 4x & \Rightarrow 5x3 = 4x^2 & \Rightarrow 4x^2 = 5x, \\
5x^2 = 5x & \Rightarrow x^2 = x, & \\
5x^2 = x^2 & \Rightarrow 5x = x & \Rightarrow 2x = 0, \\
5x^2 = 2x^2 & \Rightarrow 5x = 2x & \Rightarrow 3x = 0, \\
5x^2 = 3x^2 & \Rightarrow 5x = 3x & \Rightarrow 2x = 0, \\
5x^2 = 4x^2 & \Rightarrow 5x = 4x & \Rightarrow x = 0,
\end{array}$$

pa je $5x^2 \neq x, 5x^2 \neq 2x, 5x^2 \neq 3x, 5x^2 \neq 4x, 5x^2 \neq 5x, 5x^2 \neq x^2, 5x^2 \neq 2x^2, 5x^2 \neq 3x^2, 5x^2 \neq 4x^2$.

Ako pretpostavimo da uz polazne uslove $R \in \mathcal{AR}, x \in R, x \neq 0, 6x = 0, 2x \neq 0, 3x \neq 0, x^2 \neq x$ i $x^2 \neq 5x$ važi još $3x^2 = 3x$, onda je

$$3x + x^2 = 4x^2, \quad 4x + x^2 = x + 4x^2, \quad 5x + x^2 = 2x + 4x^2,$$

$$3x + 2x^2 = 5x^2, \quad 4x + 2x^2 = x + 5x^2, \quad 5x + 2x^2 = 2x + 5x^2,$$

$$3x + 4x^2 = x^2, \quad 4x + 4x^2 = x + x^2, \quad 5x + 4x^2 = 2x + x^2,$$

$$3x + 5x^2 = 2x^2, \quad 4x + 5x^2 = x + 2x^2, \quad 5x + 5x^2 = 2x + 2x^2.$$

Kako, zbog $x^3 = x$, za svaki element x antinverznog prstena R i svaki prirodan broj n element x^n jednak je nekom od elemenata $0, x, x^2, x^3$, a zbog $6x = 0$, element nx jednak nekom od elemenata $0, x, 2x, 3x, 4x, 5x$, to pod ovim datim uslovima element x generiše prsten R_{18} od 18 elemenata $a_1 = 0, a_2 = x, a_3 = 2x, a_4 = 3x, a_5 = 4x, a_6 = 5x, a_7 = x^2, a_8 = 2x^2, a_9 = 4x^2, a_{10} = 5x^2, a_{11} = x + x^2, a_{12} = x+2x^2, a_{13} = x+4x^2, a_{14} = x+5x^2, a_{15} = 2x+x^2, a_{16} = 2x+2x^2, a_{17} = 2x + 4x^2$ i $a_{18} = 2x + 5x^2$, pri čemu je

$+$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
a_2	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_9	a_{10}	a_7	a_8
a_3	a_3	a_4	a_5	a_6	a_1	a_2	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_9	a_{10}	a_7	a_8	a_{13}	a_{14}	a_{11}	a_{12}
a_4	a_4	a_5	a_6	a_1	a_2	a_3	a_9	a_{10}	a_7	a_8	a_{13}	a_{14}	a_{11}	a_{12}	a_{17}	a_{18}	a_{15}	a_{16}
a_5	a_5	a_6	a_1	a_2	a_3	a_4	a_{13}	a_{14}	a_{11}	a_{12}	a_{17}	a_{18}	a_{15}	a_{16}	a_7	a_8	a_9	a_{10}
a_6	a_6	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_{17}	a_{18}	a_{15}	a_{16}	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_7	a_7	a_{11}	a_{15}	a_9	a_{13}	a_{17}	a_8	a_4	a_{10}	a_1	a_{12}	a_5	a_{14}	a_2	a_{16}	a_6	a_{18}	a_3
a_8	a_8	a_{12}	a_{16}	a_{10}	a_{14}	a_{18}	a_4	a_9	a_1	a_7	a_5	a_{13}	a_2	a_{11}	a_6	a_{17}	a_3	a_{15}
a_9	a_9	a_{13}	a_{17}	a_7	a_{11}	a_{15}	a_{10}	a_1	a_8	a_4	a_{14}	a_2	a_{12}	a_5	a_{18}	a_3	a_{16}	a_6
a_{10}	a_{10}	a_{10}	a_{18}	a_8	a_{12}	a_{16}	a_1	a_7	a_4	a_9	a_2	a_{11}	a_5	a_{13}	a_3	a_{15}	a_6	a_{17}
a_{11}	a_{11}	a_{15}	a_9	a_{13}	a_{17}	a_7	a_{12}	a_5	a_{14}	a_2	a_{16}	a_6	a_{18}	a_3	a_{10}	a_1	a_8	a_4
a_{12}	a_{12}	a_{16}	a_{10}	a_{14}	a_{18}	a_8	a_5	a_{13}	a_2	a_{11}	a_6	a_{17}	a_3	a_{15}	a_1	a_7	a_4	a_9
a_{13}	a_{13}	a_{17}	a_7	a_{11}	a_{15}	a_9	a_{14}	a_2	a_{12}	a_5	a_{18}	a_3	a_{16}	a_6	a_8	a_4	a_{10}	a_1
a_{14}	a_{14}	a_{18}	a_8	a_{12}	a_{16}	a_{10}	a_2	a_{11}	a_5	a_{13}	a_3	a_{15}	a_6	a_{17}	a_4	a_9	a_1	a_7
a_{15}	a_{15}	a_9	a_{13}	a_{17}	a_7	a_{11}	a_{16}	a_6	a_{18}	a_3	a_{10}	a_1	a_8	a_4	a_{14}	a_2	a_{12}	a_5
a_{16}	a_{16}	a_{10}	a_{14}	a_{18}	a_8	a_{12}	a_6	a_{17}	a_3	a_{15}	a_1	a_7	a_4	a_9	a_2	a_{11}	a_5	a_{13}
a_{17}	a_{17}	a_7	a_{11}	a_{15}	a_9	a_{13}	a_{18}	a_3	a_{16}	a_6	a_8	a_4	a_{10}	a_1	a_7	a_5	a_{13}	a_{12}
a_{18}	a_{18}	a_8	a_{12}	a_{16}	a_{10}	a_{14}	a_{13}	a_{15}	a_6	a_{17}	a_4	a_9	a_1	a_7	a_5	a_{13}	a_2	a_{11}

$\cdot$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1
a_2	a_1	a_7	a_8	a_4	a_9	a_{10}	a_2	a_3	a_5	a_6	a_{11}	a_{15}	a_{13}	a_{17}	a_{12}	a_{16}	a_{14}	a_{18}
a_3	a_1	a_8	a_9	a_1	a_8	a_9	a_3	a_5	a_3	a_5	a_{16}	a_{14}	a_{16}	a_{14}	a_{17}	a_{11}	a_{17}	a_{11}
a_4	a_1	a_4	a_1	a_4	a_1	a_4	a_4	a_1	a_1	a_4	a_1	a_4	a_4	a_1	a_4	a_1	a_1	a_4
a_5	a_1	a_9	a_8	a_1	a_9	a_8	a_5	a_3	a_5	a_3	a_{11}	a_{17}	a_{11}	a_{17}	a_{14}	a_{16}	a_{14}	a_{16}
a_6	a_1	a_{10}	a_9	a_4	a_8	a_7	a_6	a_5	a_3	a_2	a_{16}	a_{12}	a_{18}	a_{14}	a_{15}	a_{11}	a_{17}	a_{13}
a_7	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
a_8	a_1	a_3	a_5	a_1	a_3	a_5	a_8	a_9	a_8	a_9	a_{16}	a_{17}	a_{16}	a_{17}	a_{14}	a_{11}	a_{14}	a_{11}
a_9	a_1	a_5	a_3	a_1	a_5	a_3	a_9	a_8	a_9	a_8	a_{11}	a_{14}	a_{11}	a_{14}	a_{17}	a_{16}	a_{17}	a_{16}
a_{10}	a_1	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_{10}	a_9	a_8	a_7	a_{16}	a_{15}	a_{18}	a_{17}	a_{12}	a_{11}	a_{14}	a_{13}
a_{11}	a_1	a_{11}	a_{16}	a_1	a_{11}	a_{16}	a_{11}	a_{16}	a_{11}	a_{16}	a_{16}	a_1	a_{16}	a_1	a_1	a_{16}	a_1	a_{16}
a_{12}	a_1	a_{15}	a_{14}	a_4	a_{17}	a_{12}	a_{12}	a_{17}	a_{14}	a_{15}	a_1	a_{12}	a_4	a_{14}	a_{15}	a_1	a_{17}	a_{14}
a_{13}	a_1	a_{13}	a_{16}	a_4	a_{11}	a_{18}	a_{13}	a_{16}	a_{11}	a_{18}	a_{16}	a_4	a_{18}	a_1	a_4	a_{11}	a_1	a_{13}
a_{14}	a_1	a_{17}	a_{14}	a_1	a_{17}	a_{14}	a_{14}	a_{17}	a_{14}	a_{17}	a_1	a_{14}	a_1	a_{14}	a_{17}	a_1	a_{17}	a_1
a_{15}	a_1	a_{12}	a_{17}	a_4	a_{14}	a_{15}	a_{15}	a_{14}	a_{17}	a_{12}	a_1	a_{14}	a_1	a_{17}	a_{12}	a_1	a_{14}	a_4
a_{16}	a_1	a_{16}	a_{11}	a_1	a_{16}	a_{11}	a_{16}	a_{11}	a_{16}	a_{11}	a_{11}	a_1	a_{11}	a_1	a_1	a_{16}	a_1	a_{16}
a_{17}	a_1	a_{14}	a_{17}	a_1	a_{14}	a_{17}	a_{17}	a_{14}	a_{17}	a_{14}	a_1	a_{17}	a_1	a_{17}	a_{14}	a_1	a_{14}	a_1
a_{18}	a_1	a_{18}	a_{11}	a_4	a_{16}	a_{13}	a_{18}	a_{11}	a_{16}	a_{13}	a_{11}	a_4	a_{13}	a_1	a_4	a_{16}	a_1	a_{18}

Primjer 2.6. Neka $R \in \mathcal{AR}, x \in R, x \neq 0, 6x = 0, 2x \neq 0, 3x \neq 0, x^2 \neq x$ i $x^2 \neq 5x$. Pretpostavimo, za razliku od Primjer 2.5., da je $3x^2 \neq 3x$.

U Primjeru 2.5. vidjeli smo da važi $x^2 \neq 2x, x^2 \neq 3x, x^2 \neq 4x, 2x^2 \neq x, 2x^2 \neq 3x, 2x^2 \neq 5x, 3x^2 \neq x, 3x^2 \neq 2x, 3x^2 \neq 4x, 3x^2 \neq 5x, 4x^2 \neq x, 4x^2 \neq 3x, 4x^2 \neq 5x, 5x^2 \neq 2x, 5x^2 \neq 4x$, pa u ovome slučaju element x generiše prsten R_{36} od 36 elemenata: $0, x, 2x, 3x, 4x, 5x, x^2, 2x^2, 3x^2, 4x^2, 5x^2, x+x^2, x+2x^2, x+3x^2, x+4x^2, x+5x^2, 2x+x^2, 2x+2x^2, 2x+3x^2, 2x+4x^2, 2x+5x^2, 3x+x^2, 3x+2x^2, 3x+3x^2, 3x+4x^2, 3x+5x^2, 4x+x^2, 4x+2x^2, 4x+3x^2, 4x+4x^2, 4x+5x^2, 5x+x^2, 5x+2x^2, 5x+3x^2, 5x+4x^2$ i $5x+5x^2$.

Teorema 2.1. Klasa $\mathcal{B} = \{R_1, R_2, R_3, R_6, R_9, R_{18}, R_{36}\}$, gdje je R_1 trivijalni prsten, $R_2 = Z_2, R_3 = Z_3, R_6 = Z_6$, i R_9, R_{18}, R_{36} prsteni iz Primjera 2.4, 2.5 i 2.6, je bazisna klasa u smislu Ljapina za klasu antiinverznih prstena $\mathcal{AR}$ u odnosu na klasu svih prstena $\mathcal{R}$.

D o k a z. (a) Dokazaćemo prvo da je svaki prsten $R \in \mathcal{AR}$ unija svojih podprstena, koji su izomorfni sa prstenima iz klase B.

Neka $R \in \mathcal{AR}$ i neka je x proizvoljni element prstena R, pri čemu je $x \neq 0$. Tada, važi $x^3 = x$ i važi jedan od slučajeva: 1) $2x = 0$, 2) $3x = 0$ i 3) $6x = 0, (2x \neq 0, 3x \neq 0)$.

1) Ako je $2x = 0$, onda kao što smo vidjeli u Primjeru 2.1, važi $x^2 = x$ i element x generiše prsten R_2 izomorfan sa prstenom Z_2.

2) Neka je $3x = 0$.

Tada, kao što smo vidjeli u Primjeru 2.2, za $x^2 = x$ ili $x^2 = 2x$ element x generiše prsten R_3 izomorfan sa prstenom Z_3.

Ako je $x^2 \neq x$ i $x^2 \neq 2x$, onda prema Primjeru 2.3. , element x generiše prsten R_9.

3) $x = 0, (2x \neq 0, 3x \neq 0)$. Tada je, prema Primjeru 2.4, $x^2 \neq 2x, x^2 \neq 3x$ i $x^2 \neq 4x$.

Ako je za $x^2 = xilix^2 = 5x$, onda prema istom primjeru element x generiše prsten R_6 izomorfan sa prstenom Z_6.

Ako je $x^2 \neq x$ i $x^2 \neq 2x$, onda prema razmatranju u Primjeru 2.5., važi $3x^2 \neq x, 3x^2 \neq 2x, 3x^2 \neq 4x$ i $3x^2 \neq 5x$.

Prema istom primjeru, za $3x^2 = 3x$ element x generiše prsten R_{18}.

I, konačno, za $3x^2 \neq 3x$, prema Primjeru 2.6., element x generiše prsten R_{36}.

Dakle, proizvoljni element x anti-inverznog prstena R pripada njegovom podprstenu izomorfnom sa nekim prstenom iz klase $\mathcal{B}$, tj. prsten R je unija prstena is klase $\mathcal{B}$.

b) Ako je proizvoljan prsten R jednak uniji prstena iz klase $\mathcal{B}$, onda za cvaki njegov element važi $x^3 = x$, tj. prsten R je anti-inverzan.

c) Iz dokaza 1) neposredno slijedi da ne postoji prava podklasa klase $\mathcal{B}$, koja bi zadovoljavala uslov 1).

Literatura

[1] S. Bogdanović, S. Milić, V. Pavlović, *Anti-inverse semigroups*, Publ. Inst. Math. 24 (38), (1978), 19-28.

[2] B. Cerović, *Anti-inverse rings*, Publ. Inst. Math. 29 (43), (1981), 45-48.

[3] N. Jacobson, *Strukture theori for algebras of baudend degree*, Annals Math. Vol. 46 (1945), 695-707.

[4] И. Ламбек, *Кольца и модули*, "Мир", Москва, 1971.