ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 14, 2002.
ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 14, 2002.
THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS
GLASNIK OF THE SECTION OF NATURAL SCIENCES, 14, 2002.

UDK 517.951

Siniša Stamatović *

TEOREMA PRENOSA ZA ČLANOVE UOPŠTENOG VARIJACIONOG REDA

Izvod

U radu je data definicija uopštenog varijacionog reda i naveden je primjer modela u kojem se pojavljuje ovaj pojam. Formulisana je i dokazana teorema prenosa za centralne članove uopštenog varijacionog reda.

TRANSFER THEOREM FOR THE CENTRAL COMPONENTS OF GENERAL VARIATIONAL SEQUENCE

Abstract

Definition of general variational sequence is given. One model with this term is adduced. Transfer theorem for the central components of general variational sequences is formulated and proofed.

2000. Mathematics Subject Classification. 60F05, 62E20.
Ključne riječi i fraze. Uopšteni varijacioni red, teorema prenosa.

*Prof. dr Siniša Stamatović, University of Montenegro, Faculty of Natural Sciences, 81000 Podgorica, Montenegro, Yugoslavia; e-mail: sins@rc.pmf.cg.ac.yu

1. UVOD

Neka je X_n, $n = 1, 2, \ldots$ niz nezavisnih jednakoraspodjeljenih slučajnih veličina zadatih na vjerovatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $F(x) = P\{X_k < x\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Na prostoru ishoda Ω zadajmo funkciju ξ_k^n tako da je

$$\xi_k^n(\omega) = l_k\left(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\right) \text{ za} \forall\, \omega \in \Omega,$$

gdje $l_k\,(a_1, \ldots, a_n)$ predstavlja k–tu po veličini iz skupa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $a_1 \in R, \ldots, a_n \in R$. Elementarno se pokazuje da je ξ_k^n slučajna veličine na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definicija 1.1 Ukupnost slučajnih veličina ξ_k^n, $k = 1, 2, \ldots, n$, predstavlja varijacioni red nad kompleksom slučajnih veličina $X_1, \ldots, X_n$.

Iz definicije neposredno zaključujemo da članovi varijacionog reda obrazuju rastući niz $\xi_n^1 \leq \xi_n^2 \leq \ldots \leq \xi_n^n$. Veličinu $\frac{k}{n}$ zvaćemo rangom člana ξ_k^n. Neka je $k(n) : N \longrightarrow N$, funkcija za koju važi $k(n) \leq n$. Eventualni $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n}$ ćemo označavati sa λ. Očigledno, $0 \leq \lambda \leq 1$. Niz $\xi_{k(n)}^n$ za koji je $0 < \lambda < 1$ zvaćemo centralnim nizom. Ako je $\lambda = 0$ ili je pak $\lambda = 1$, govorićemo o nizu krajnjih članova.

Slučajnoj veličini ξ_k^n zadatoj Definicijom 1.1, možemo dati još jednu interpretaciju. Neka je zadat uzorak obima n obilježja X čija je funkcija raspodjele $F(x)$. Pod ovim uslovima slučajna veličina ξ_k^n predstavlja statistiku koja nad realizovanim uzorkom ukazuje na k–tu po veličini iz realizacija. Ovako zadata statistika iz razumljivih razloga nosi naziv statistika poretka.

Neka je $G_{k,n}(x) = P\{\xi_k^n < x\}$. Neka je

$$E_x^{(m)} = \{\omega \mid X_m(\omega) < x\}.$$

Događaji $E_x^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots, n$, su međusobno nezavisni i važi $P\{E_x^{(m)}\} = F(x)$. Označimo sa $S_n(x)$ relativnu učestalost realizacija n nezavisnih događaja $E_x^{(1)}, E_x^{(2)}, \ldots, E_x^{(n)}$. Očigledno, slučajna veličina $nS_n(x)$ ima $\mathcal{B}(n,\, F(x))$ raspodjelu. Dakle,

$$P\left\{nS_n(x) = m\right\} = \binom{n}{m} F^m(x)(1 - F(x))^{n-m},\ m = 1, 2, \ldots, n. \quad (1.1)$$

Takođe,

$$P\{\xi_k^n < x\} = P\{nS_n(x) \geq k\}. \tag{1.2}$$

Iz (1.1) i (1.2) slijedi

$$G_{k,n}(x) = \sum_{m=k}^{n} P\{nS_n(x) = m\} = \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m} F^m(x)(1-F(x))^{n-m}. \tag{1.3}$$

Polazeći od rezultata

$$\int_0^a x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx = \frac{a^k(1-a)^{n-k}}{k} + \cdots + \frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{k(k+1)\cdots n}a^n,$$

iz (1.3) se dobija

$$G_{k,n}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^{F(x)} x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx. \tag{1.4}$$

Navešćemo već klasičnu teoremu koja daje potrebne i dovoljne uslove pod kojima centrirani i normirani niz centralnih članova varijacionog reda konvergira u raspodjeli.

Teorema 1.1 Za nizove $a_n > 0$ i b_n važi

$$P\left\{\frac{\xi_{k(n)}^n - b_n}{a_n} < x\right\} = G_{k(n),n}(a_n x + b_n) \longrightarrow G(x),\ n \to \infty,$$

gdje

$$\frac{k(n)}{n} \longrightarrow \lambda,\ n \to \infty,\ 0 < \lambda < 1,$$

u svakoj tački neprekidnosti funkcije raspodjele $G(x)$ ako i samo ako

$$\overline{u}_n(x) = \frac{F(a_n x + b_n) - \lambda_{k(n),n}}{\tau_{k(n),n}} \longrightarrow u(x),\ n \to \infty,$$

gdje je $\lambda_{k(n),n} = \dfrac{k(n)}{n}$, $v_{k(n),n} = \dfrac{n-k(n)}{n}$, $\tau_{k(n),n} = \sqrt{\dfrac{v_{k(n),n}\cdot\lambda_{k(n),n}}{n}}$,

u svakoj tački neprekidnosti funkcije $u(x)$ koja se pak jednoznačno određuje iz jednačine

$$G(x) = N(u(x)),\ N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{v^2}{2}} dv.$$

Uzorak sa slučajnim brojem elemenata nameće se u mnogim statističkim eksperimentima. Formirajući statistike poretka u ovom modelu, dolazimo do pojma uopštene statistike poretka–uopštenog varijacionog reda. Prije nego što damo formalnu definiciju pomenutog pojma, navešćemo jedan konkretan primjer.

Energija koju nose kosmičke čestice što padaju na neki lokalitet je slučajna veličina ξ. Broj čestica koje na taj lokalitet padnu u toku vremena t je slučajna veličina sa $\mathcal{P}(\lambda t)$ raspodjelom. Uređivanjem po veličini energija koje su donijele čestice, dobijamo uopšteni varijacioni red. Ocjena, recimo, medijane slučajne veličine ξ je prirodan zadatak čije rješavanje nameće potrebu da se postave osnove teorije uopštenih varijacionih redova.

Definicija 1.2 Neka je X_n, $n = 1, 2, \ldots$, niz nezavisnih jednakoraspodjeljenih slučajnih veličina zadatih na vjerovatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $F(x) = P\{X_k < x\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Neka je niz ν_n, $n = 1, 2, \ldots$, zadat na istom prostoru vjerovatnoće, neka je nezavisan od niza X_n i neka je

$$P\{\nu_n = k\} = p_{nk},\ n = 1, 2, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots .$$

Na prostoru vjerovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ćemo zadati slučajnu veličinu η_n^k na sljedeći način

$$\eta_n^k(\omega) = \xi_{k(\nu_n(\omega))}^{\nu_n(\omega)}(\omega) = \xi_{k(m)}^{m}(\omega),\ \nu_n(\omega) = m,$$

gdje je slučajna veličina $\xi_{k(m)}^{m}$ određena Definicijom 1.1. Ukupnost slučajnih veličina η_n^k po svim funkcijama $k(n) : N \longrightarrow N$, $k(n) \leq n$, zvaćemo uopštenim varijacionim redom.

Potražimo,

$$\left(\eta_n^k\right)^{-1}(-\infty, x) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{\omega \mid \nu_n^{-1}(j) \cap {\xi_{k(j)}^{j}}^{-1}(-\infty, x)\right\} \in \mathcal{F},\ x \in R.$$

Na ovaj način potvrđena je valjanost definicije slučajne veličine η_n^k.

Slučajnu veličinu η_n^k možemo tretirati kao statistiku poretka nad uzorkom $(X_1, X_2, \ldots, X_{\nu_n})$.

2. NEKA ZA DOKAZ TEOREME PRENOSA VAŽNA TVRĐENJA

Formulisaćemo i dokazati neka tvrđenja na koja ćemo se pozvati tokom dokaza teoreme prenosa.

Teorema 2.1 Neka

$$\frac{k([ny])}{ny} \longrightarrow \lambda,\ n \to \infty,\ 0 < \lambda < 1,$$

gdje je y fiksirani broj strogo veći od 0. Tada funkcionalni niz

$$R_{k([ny]),[ny]}(x) = G_{k([ny]),[ny]}(a_n x + b_n) - N(w_{n,y}(x)),$$

$$\text{gdje je} \qquad w_{n,y}(x) = \frac{F(a_n x + b_n) - \lambda_{k([ny]),[ny]}}{\tau_{k([ny]),[ny]}},$$

dok su funkcije λ i τ zadate kao u formulaciji Teoreme 1.1, ravnomjerno konvergira ka 0.

Dokaz. ▶ Neka je ε proizvoljan broj veći od 0. Uvijek postoji $T > 0$ tako da je

$$1 - N(t) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad \frac{4}{2-\lambda} < \varepsilon T^2. \tag{2.1}$$

Ako je $w_{n,y} \leq -T$, tada za dovoljno veliko n važi

$$\frac{\lambda}{2} < \frac{k([ny])}{[ny]} < 1,$$

a odavde slijedi

$$F(a_n x + b_n) \leq \lambda_{k([ny]),[ny]} - T\tau_{k([ny]),[ny]} < 1.$$

Ubuduće ćemo jednostavnosti pisanja radi, umjesto $k([ny])$ pisati kratko k.

Pozivajući se na (1.4) sada dobijamo,

$$\begin{aligned} G_{k,[ny]}(a_nx+b_n) &\leq \frac{[ny]!}{(k-1)!([ny]-k)!} \int\limits_0^{\lambda_{k,[ny]}-T\tau_{k,[ny]}} x^{k-1}(1-x)^{[ny]-k}dx \\ &\leq \frac{[ny]!}{(k-1)!([ny]-k)!} \int\limits_0^1 \frac{(x-\lambda_{k,[ny]})^2}{T^2\tau^2_{k,[ny]}} x^{k-1}(1-x)^{[ny]-k}dx. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Primjenom beta funkcije lako računamo sljedeće integrale:

$$I_1 = \int\limits_0^1 x^{k+1}(1-x)^{[ny]-k}dx = \frac{(k+1)!([ny]-k)!}{([ny]+2)!},$$

$$I_2 = \int\limits_0^1 x^{k}(1-x)^{[ny]-k}dx = \frac{k!([ny]-k)!}{([ny]+1)!},$$

$$I_3 = \int\limits_0^1 x^{k-1}(1-x)^{[ny]-k}dx = \frac{(k-1)!([ny]-k)!}{[ny]!}.$$

Zamjenom u (2.2) dobijamo,

$$G_{k,[ny]}(a_nx+b_n) \leq \frac{1-\frac{k}{[ny]}+\frac{2k}{[ny]^2}}{T^2\left(1+\frac{1}{ny}\right)\left(1+\frac{2}{ny}\right)\left(1-\frac{k}{[ny]}\right)} \leq \frac{2}{T^2(2-\lambda)} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.3}$$

Kako je $w_{n,y}(x) \leq -T$, to na osnovu (2.1) imamo

$$N(w_{n,y}(x)) \leq N(-T) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4}$$

Iz (2.3) i (2.4) sada dobijamo da je $\mid R_{k,[ny]}(x) \mid \leq \varepsilon$, za dovoljno veliko n kada je $w_{n,y}(x) \leq -T$.

Pređimo na slučaj kada je $w_{n,y}(x) \geq T$. Kako pod ovom pretpostavkom važi

$$F(a_nx+b_n) \geq \lambda_{k([ny]),[ny]} + T\tau_{k([ny]),[ny]},$$

to imamo sljedeći lanac nejednakosti:

$$1-G_{k,[ny]}(a_nx+b_n) \leq \frac{[ny]!}{(k-1)!([ny]-k)!}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{[ny]-k}dx$$

$$\leq \frac{[ny]!}{(k-1)!([ny]-k)!}\int_0^1 \frac{(x-\lambda_{k,[ny]})^2}{T^2\tau^2_{k,[ny]}}x^{k-1}(1-x)^{[ny]-k}dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Uz to važi ocjena $1-N(w_{n,y}(x)) \leq 1-N(T) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, te zaključujemo da je $\mid R_{k,[ny]}(x) \mid \leq \varepsilon$, pri uslovu $w_{n,y}(x) \geq T$ za $\forall n \in N$.

Pređimo na slučaj kada je $\mid w_{n,y}(x) \mid < T$. Imamo $G_{k,[ny]}(a_nx+b_n) = I_1 + I_2$, gdje je

$$I_1 = \frac{[ny]!}{(k-1)!([ny]-k)!}\int_0^{\lambda_{k,[ny]}-T\tau_{k,[ny]}} x^{k-1}(1-x)^{[ny]-k}dx,$$

$$I_2 = \frac{[ny]!}{(k-1)!([ny]-k)!}\int_{\lambda_{k,[ny]}-T\tau_{k,[ny]}}^{F(a_nx+b_n)} x^{k-1}(1-x)^{[ny]-k}dx.$$

Već je pokazano da važi $0 < I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Nakon uvođenja smjene $x = \lambda_{k,[ny]} + t\tau_{k,[ny]}$, dobijamo

$$I_2 = \frac{[ny]!k^{k-\frac{1}{2}}([ny]-k)^{[ny]-k+\frac{1}{2}}}{(k-1)!([ny]-k)![ny]^{[ny]+\frac{1}{2}}} \cdot \int_{-T}^{w_{n,y}(x)} \left(1+\frac{t\tau_{k,[ny]}}{\lambda_{k,[ny]}}\right)^{k-1}\left(1-\frac{t\tau_{k,[ny]}}{\nu_{k,[ny]}}\right)^{[ny]-k}dt.$$

Primjenjujući Stirlingovu formulu dobijamo

$$\frac{[ny]!k^{k-\frac{1}{2}}([ny]-k)^{[ny]-k+\frac{1}{2}}}{(k-1)!([ny]-k)![ny]^{[ny]+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + r_n,\ r_n \longrightarrow 0,\ n \to \infty. \quad (2.5)$$

Nadalje,

$$\left(1+\frac{t\tau_{k,[ny]}}{\lambda_{k,[ny]}}\right)^{k-1}\left(1-\frac{t\tau_{k,[ny]}}{\nu_{k,[ny]}}\right)^{[ny]-k} \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}},\ n \to \infty. \quad (2.6)$$

Iz (2.5) i (2.6) slijedi

$$I_2 = N(w_{n,y}(x)) - N(-T) + b_n \text{ gdje } b_n \longrightarrow 0,$$

te za dovoljno veliko n važi $\mid b_n \mid < \frac{\varepsilon}{2}$. Na kraju imamo

$$\mid R_{k,[ny]}(x) \mid = \mid I_1 + N(w_{n,y}(x)) - N(-T) + b_n - N(w_{n,y}(x)) \mid \leq \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Rezimirajmo. Ma kakvo bilo x za n dovoljno veliko i proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi

$$\mid R_{k,[ny]}(x) \mid < \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Ovim je dokazana ravnomjerna konvergencija funkcionalnog niza $R_{k,[ny]}(x)$ ka 0. ◀

Teorema 2.2 U svakoj tački neprekidnosti funkcije $G_y(x)$ važi

$$G_{k,[ny]}(a_n x + b_n) \longrightarrow G_y(x) = N(w_y(x)),\ n \to \infty,$$

ako i samo ako $w_{n,y}(x) \longrightarrow w_y(x)$ u svakoj tački neprekidnosti funkcije $w_y(x)$.

Dokaz. ▶ Ako $w_{n,y}(x) \longrightarrow w_y(x)$ u svakoj tački neprekidnosti funkcije $w_y(x)$, imamo

$\mid G_{k,[ny]}(a_n x + b_n) - G_y(x) \mid \leq$

$\mid G_{k,[ny]}(a_n x + b_n) - N(w_{n,y}(x)) \mid + \mid N(w_{n,y}(x)) - N(w_y(x)) \mid \longrightarrow 0, n \to \infty.$

Sa druge strane imamo,

$\mid N(w_{n,y}(x)) - N(w_y(x)) \mid \leq$

$\mid N(w_{n,y}(x)) - G_{k,[ny]}(a_n x + b_n) \mid + \mid G_{k,[ny]}(a_n x + b_n) - N(w_y(x)) \mid \longrightarrow 0, n \to \infty,$

te zaključujemo da $w_{n,y}(x) \longrightarrow w_y(x)$ u svakoj tački neprekidnosti funkcije $w_y(x)$.◀

Lema 2.1 Tvrđenja

$$1^0\ p_{nk} \longrightarrow 0,\ k = 1, 2, \ldots,\ n \to \infty \text{ i}$$
$$2^0\ \nu_n \xrightarrow{P} +\infty,\ n \to \infty.$$

su ekvivalentna.

Dokaz. ▶ Za proizvoljno $M > 0$ imamo:

$$P\{\nu_n < M\} = \sum_{k=1}^{[M]} p_{nk} = \left(p_{n1} + \cdots + p_{n[M]}\right) \longrightarrow 0,\ n \to \infty.$$

Dakle, $\nu_n \xrightarrow{P} +\infty$. Obrnuto, za $M > 0$ imamo,

$$P\{\nu_n \geqq M\} = 1 - P\{\nu_n < M\} = 1 - \left(p_{n1} + p_{n2} + \cdots + p_{n[M]}\right),$$

odakle zaključujemo da $p_{n1} \longrightarrow 0, \ldots, p_{n,[M]} \longrightarrow 0$. Zbog proizvoljnosti izbora M slijedi $p_{nk} \longrightarrow 0$ za $\forall k \in N$.◀

3. TEOREMA PRENOSA

U slučaju kada se niz indeksa regularno ponaša, za niz centralnih članova uopštenog varijacionog reda važi Teorema prenosa. Ovom teoremom se ustanovljava asimptotsko ponašanje centralnih članova uopštenog varijacionog reda. Autori teorema prenosa za krajnje članove uopštenog varijacionog reda su veliki sovjetski matematičar B. Gnedenko i njegovi učenici.

Teorema 3.1 **(Teorema prenosa)** Neka je $\frac{k(n)}{n} = \lambda + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $0 < \lambda < 1$ i neka za nizove $a_n > 0$ i $b_n \in R$ važi

A) $P\left\{\frac{\xi^n_{k(n)} - b_n}{a_n} < x\right\} \longrightarrow G(x) = N(u(x)),\ n \to \infty,$
u svakoj tački neprekidnosti funkcije raspodjele vjerovatnoće G(x).
B) $P\left\{\frac{\nu_n}{n} < x\right\} \longrightarrow A(x),\ n \to \infty,$
gdje je A(x) neprekidna funkcija raspodjele vjerovatnoće.

Tada važi

$$P\left\{\frac{\eta^k_n - b_n}{a_n} < x\right\} \longrightarrow H(x) = \int_0^\infty N(u(x)\sqrt{y})dA(y),\ n \to \infty,$$

u svakoj tački neprekidnosti funkcije $H(x)$.

Dokaz. ▶ Primijetimo da zbog neprekidnosti funkcije $A(x)$ važi $A(+0) = 0$. Međutim, uslov $A(+0) = 0$ implicira uslove 1^0 i 2^0 iz Leme 2.1. Zaista, za $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ takvo da je $A(\delta) < \epsilon$. Za dovoljno veliko n i proizvoljno M važi

$$P\{\nu_n < M\} \leq P\left\{\frac{\nu_n}{n} < \delta\right\} < \epsilon.$$

Zbog proizvoljnosti izbora ϵ važi $P\{\nu_n < M\} \longrightarrow 0,\ n \to \infty$.

Očigledno,

$$P\left\{\frac{\eta_n^k - b_n}{a_n} < x\right\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{nj}\, G_{k(j),j}(a_n x + b_n) = \int_0^{\infty} G_{k([z]),[z]}(a_n x + b_n)\, dA_n(z),$$

gdje je $A_n(z) = P\{\nu_n < z\}$.

Uvedimo smjenu $z = ny$ i označimo sa $\mathcal{P}_n$ vjerovatnosnu mjeru indukovanu funkcijom raspodjele vjerovatnoće $A_n(ny) = A_n'(y) = P\left\{\frac{\nu_n}{n} < y\right\}$.

Sada dobijamo

$$\int_0^{\infty} G_{k([z]),[z]}(a_n x + b_n)\, dA_n(z) = \int_0^{\infty} G_{k,[ny]}(a_n x + b_n)\, d\mathcal{P}_n.$$

Iz uslova A) naše teoreme dobijamo da $\overline{u}_n(x) \longrightarrow u(x)$, $n \to \infty$ u svakoj tački neprekidnosti funkcije $u(x)$. Kod nas važi

$$w_{n,y} \longrightarrow u(x)\sqrt{y}, \text{ za } \forall y > 0$$

i u svakoj tački neprekidnosti funkcije $u(x)$. Na osnovu Teoreme 2.2 slijedi

$$G_{k,[ny]}(a_n x + b_n) \longrightarrow G_y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & y = 0 \\ N(u(x)\sqrt{y}), & y > 0 \end{cases}.$$

Primijetimo da je funkcija $G_y(x)$ za fiksirano x i kao funkcija od $y (y \geqq 0)$, neprekidna. Na osnovu gore rečenog funkcionalni niz $G_{k,[ny]}(a_n x + b_n)$ za fiksirano x i po argumentu y konvergira u svim tačkama skupa $[0, +\infty)$. Označimo sa $\mathcal{P}$ mjeru indukovanu funkcijom raspodjele vjerovatnoće $A(y)$. Na osnovu Teoreme Jegorova, skup $[0, +\infty)$ je moguće razbiti na dva po $\mathcal{P}$ mjerljiva skupa E i E_ϵ takva da funkcionalni niz $G_{k,[ny]}(a_n x + b_n)$ konvergira ravnomjerno ka $G_y(x)$ na E i da je $\mathcal{P}(E_\epsilon) < \epsilon$ za $\forall \epsilon > 0$. Skup E_ϵ se u našem slučaju da zapisati kao $\cup_{i \in I} E_i$, gdje je I najviše prebrojiv skup indeksa, a skupovi E_i su intervali. Do upravo navedene tvrdnje lako dolazimo ukoliko primijetimo da su skupovi

$$E_{li} = \left\{ y | y \in R^+, |G_{k([iy]),[iy]}(a_i x + b_i) - G_y(x)| > \frac{1}{l} \right\}, l = 1, 2, \ldots, i \in I,$$

zbog stroge monotonosti funkcije $G_y(x)$ i činjenice da je $G_{k,[ny]}(a_n x + b_n)$ stepenasta funkcija, unije najviše prebrojivo mnogo intervala. Važi ocjena,

$$\left|\int_0^\infty G_{k,[ny]}(a_n x+b_n)d\mathcal{P}_n - \int_0^\infty G_y(x)d\mathcal{P}\right| < \left|\int_0^\infty G_{k,[ny]}(a_n x+b_n)d\mathcal{P}_n - \int_0^\infty G_y(x)d\mathcal{P}_n\right|$$

$$+\left|\int_{E_\epsilon}(G_{k,[ny]}(a_n x+b_n) - G_y(x))d\mathcal{P}_n\right| + \left|\int_0^\infty G_y(x)d\mathcal{P}_N - \int_0^\infty G_y(x)d\mathcal{P}\right|.$$

Zbog ravnomjerne konvergencije funkcionalnog niza $G_{k,[ny]}(a_n x + b_n)$ ka $G_y(x)$ na skupu E, moguće je naći N_1 takvo da je

$$\left|\int_0^\infty G_{k,[ny]}(a_n x + b_n)d\mathcal{P}_n - \int_0^\infty G_y(x)d\mathcal{P}_n\right| < \epsilon \text{ za } \forall n > N_1.$$

Kako niz funkcija raspodjele vjerovatnoće $A_n'(y)$ konvergira ka funkciji raspodjele $A(y)$, to će na osnovu poznatog stava, zbog neprekidnosti funkcije $G_y(x)$, važiti

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^\infty G_y(x)d\mathcal{P}_n - \int_0^\infty G_y(x)d\mathcal{P}\right) = 0.$$

Dakle, moguće je naći N_2 takvo da je

$$\left|\int_0^\infty G_y(x)d\mathcal{P}_n - \int_0^\infty G_y(x)d\mathcal{P}\right| < \epsilon \text{ za } \forall n > N_2.$$

Uz to je

$$\left|\int_{E_\epsilon}(G_{k,[ny]}(a_n x+b_n) - G_y(x))d\mathcal{P}_n\right| < \int_{E_\epsilon} d\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(E_\epsilon).$$

Kako zbog neprekidnosti funkcije raspodjele $A(y)$ važi $\mathcal{P}(\partial E_\epsilon) = 0$ (∂E_ϵ predstavlja granicu skupa E_ϵ i kod nas je ∂E_ϵ najviše prebrojiv skup), to će $\mathcal{P}_n(E_\epsilon) \longrightarrow \mathcal{P}(E_\epsilon)$. Znači, postoji N_3 takvo da je

$$\left| \int\limits_{E_\epsilon} (G_{k,[ny]}(a_n x + b_n) - G_y(x)) d\mathcal{P}_n \right| < 2\epsilon, \text{ za } \forall n > N_3.$$

Na kraju, za $\forall n > N_4$, $N_4 = \max(N_1, N_2.N_3)$ važi

$$\left| \int\limits_0^\infty G_{k,[ny]}(a_n x + b_n) d\mathcal{P}_n - \int\limits_0^\infty G_y(x) d\mathcal{P} \right| < \epsilon.$$

Zbog proizvoljnosti izbora ϵ–a slijedi tvrđenje teoreme.

Primijetimo. Kako funkcija $A(y)$ nema skok u nuli, vrijednost funkcije $G_{k,[ny]}(a_n x + b_n)$ u nuli nema uticaja na veličinu integrala.◀

Teoremu 3.1 možemo formulisati i u nešto izmijenjenim uslovima. Pretpostavimo da je zadata shema $X_{nk}, k = 1, 2, \ldots, n, n = 1, 2, \ldots$, gdje su za $\forall n \in N$ slučajne veličine $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nn}$ nezavisne i jednakoraspodjeljene. Nad svakim od sistema $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nn}$, $n = 1, 2, \ldots$, definišimo niz slučajnih veličina u oznaci ϕ_k^n, $k = 1, 2, \ldots, n$. Slučajna veličina ϕ_k^n predstavlja k–tu statistiku poretka nad $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nn}$. Definišimo nadalje, slučajnu veličinu ϕ_n^k kao $k(\nu_n)$–tu po veličini iz sistema $X_{\nu_n 1}, X_{\nu_n 2}, \ldots, X_{\nu_n \nu_n}$ (ν_n je pozitivna cjelobrojna slučajna veličina). U ovim uslovima važiće

Teorema 3.2 Neka je $\frac{k(n)}{n} = \lambda + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $0 < \lambda < 1$ i neka za nizove $a_n > 0$ i $b_n \in R$ važi

A) $P\left\{\frac{\phi_{k(n)}^n - b_n}{a_n} < x\right\} \longrightarrow G(x) = N(u(x))$, $n \to \infty$,
u svakoj tački neprekidnosti funkcije G(x).

B) $P\left\{\frac{\nu_n}{n} < x\right\} \longrightarrow A(x)$, $n \to \infty$,
gdje je A(x) neprekidna funkcija raspodjele vjerovatnoće.

Tada važi

$$P\left\{\frac{\phi_n^k - b_n}{a_n} < x\right\} \longrightarrow H(x) = \int\limits_0^\infty N(u(x)\sqrt{y}) dA(y), \; n \to \infty,$$

u svakoj tački neprekidnosti funkcije $H(x)$.

Literatura

[1] Leadbetter, M.R., Lindgren, G. and Rootzen H. *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer–Verlag, 1983.

[2] Resnick, S.I. *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*, Springer–Verlag, 1987.