ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 6, 1988.
ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 6, 1988.
THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS
GLASNIK OF THE SECTION OF NATURAL SCIENCES, 6, 1988.

UDK 516.1

Ernest STIPANIĆ*

JEDAN OSVRT NA NEKA PITANJA DIFERENCIJALNE GEOMETRIJE U RAVNI U BOŠKOVIĆEVOM ZAKONU KONTINUITETA

A REVIEW ON SOME QUESTIONS CONCERNING DIFERENTIAL GEOMETRY IN PLANE, TREATED IN BOSKOVICH'S THE LAW OF CONTINUANCE

IZVOD

Razmatra se tangenta krive u ravni i neke singularne tačke krive. U tim razmatranjima, koja su matematički zasnovana, Bošković vidi opravdanost svog Zakona kontinuiteta.

I. UVOD

1. *Zakon* ili *princip kontinuiteta* (lex seu principium continuitatis), prema kome, po Boškoviću, *nijedan kvantitet ne prelazi sa jedne svoje vrednosti na drugu, a da ne prođe kroz sve međuvrijednosti*[1]. Preuzeo ga je od Gottfrieda Leibniza (1646—1716)[2].

* Prof. dr Ernest Stipanić, vanredni član Crnogorske akademije nauka i umjetnosti, Titograd.

[1] Cf.: R. J. Boscovich, *De continuitatis lege*..., Romae, MDCCLIV: & 102 »...ac prima quantitas mutatione continua abeata prima magnitudine ad secundam transeundo per omnes magnitudines intermedias...«, str. XLV; & 103 »...Natura non operatur per saltum: nihil potest ab uno extremo transire ad aliud nisi transeat per omnes intermedios gradus...«, str. XLV; R. J. Boscovich, *Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium*, Venetiis, MDCCLXIII: & 32 »Continuitatis lex, de qua hic agimus, in eo sita est, uti superius innui, ut quaevis quantitas dum ab una magnitudine ad aliam migrat, debeat transire per omnes intermedias ejusdem generis magnitudines.«, str. 13.

[2] Cf.: R. J. Boscovich, *De continuitatis lege*...: & 3 »Praecipuum universae analyseos nostrae fundamentum situm est in celeberrimo illo, quod

Dalje ga je razradio u svom djelu *De continuitatis lege et ejus consectariis pertinentibus ad prima materiae elementa eorumque vires*, Romae, MDCCLIV.

U traganjima za argumentima koji treba da opravdaju *Zakon kontinuiteta*, da ga racionalno odbrane, Bošković se vrlo često obraća matematici. Koristi njene pojmove i stavove. U takvim situacijama on ispoljava odlike oštroumnog i vidovitog matematičara, koji umije da osjeti dubinu problema sa kojim se suočio i da nasluti matematičku ideju koja tek treba da nastane, da se razvije, konkretno ostvari i afirmiše.

2. Mi smo tretirali Boškovićeve matematičke poglede na aktuelno beskonačno veliko i na aktuelno beskonačno malo[3], kao i Boškovićevo shvatanje linearnog kontinuuma[4].

U ovom radu, držeći se njegovog djela *De continuitatis lege*... (1754), bavićemo se nekim pitanjima diferencijalne geometrije ravni, koja su sadržana u navedenom djelu. Ona se odnose na tangentu krive u ravni i na neke singularne tačke krive.

U nizu paragrafa spomenutog djela, Bošković tretira mnoge matematičke pojmove i stavove[5]. Mi se ovdje dotičemo nekih paragrafa u kojima se matematički zasnovano tretiraju pojam tangente i pojmovi nekih singularnih tačaka krive. Ta su tretiranja naučno i istorijski značajna za vrijeme u kome su se pojavila. U našim

---

Philosophi jam passim *Continuitatis principium* appellant, quod quidem jam ab anno 1687. Leibnitius, quam-quam nondum hoc usus nomine, protulit...«, str. IV.

[3] Cf.: Ernest Stipanić, *Sur les mathématiques dans les oeuvres de Bošković De continuitatis lege (1754) et Theoria philosophiae naturalis (1758)*, (Ruđer Bošković, Annales de l'institut français de Zagreb, Troisième serie № 3, str. 87—123, 1977—1982, Zagreb, 1982); *Sur quelques vues de Bošković relatives à l'infini*, (Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, Serija Matematika i fizika, № 634—№ 637, str. 169—173, Beograd, 1979).

[4] Cf.: Ernest Stipanić, *O linearnom kontinuumu R. Boškovića* (Naučna tema rađena po ugovoru u Matematičkom institutu u Beogradu, 1966-67, Rukopis u naučnoj arhivi Matematičkog instituta, str. 1—49); *O linearnom kontinuumu Ruđera Boškovića* (Matematički vesnik, 4 (19), Sv. 3, str. 277—292, Beograd, 1967); Ruđer Bošković, *O zakonu kontinuiteta i njegovim posledicama u odnosu na osnovne elemente materije i njihove sile* (Matematički institut, Klasični naučni spisi, Nova serija, knjiga (10), Beograd, 1975, Stručna redakcia prevoda, Uvodna studija, str. 3—11, Naučni i istorijski komentar, str. 94—158); *Sur les mathématiques dans les oeuvres de Bošković De continuitatis lege (1754) et Theoria philosophiae naturalis (1758)* (Annales de l'institut français de Zagreb, Troisième serie № 3, str. 87—123, 1977—1982, Zagreb, 1982); *Rudjer Bošković à l'université de Palerme* (Matematički vesnik, 37, Sv. 4, str. 447—454, Beograd, 1985); *Alcune concezioni geometriche di Rudjer Bošković Ruggero Boscovich)* (Bollettino di Storia della scienze matematiche, Vol. VI, fasc. 2, 1986, Firenze).

[5] Cf.: Uvodnu studiju i Naučni i istorijski komentar Ernesta Stipanića u knjizi: Rudjer Bošković, *O zakonu kontinuiteta i njegovim posledicama u odnosu na osnovne elemente materije i njihove sile* (Matematički institut, Klasični naučni spisi, Nova serija, knjiga (10), Beograd, 1975).

izlaganjima, adekvatno Boškovićevim razmatranjima, poslužićemo se sredstvima savremene matematičke analize.

II. O TANGENTI KRIVE U RAVNI

1. U devedeset trećem paragrafu svoga djela *De contiuitatis lege...*, Bošković veli: »To se naročito visoko cijeni po onome, što se kod svih geometrijskih krivih nigdje ništa ne mijenja skokovito, već sve promjene nastaju neprekidnim kretanjem. To isto se podjednako događa i sa svim ostalim bilo kojim osobinama geometrijskih krivih, kao i sa tangentama (tim imenom nazvana je prava povučena kroz tačku krive tako da je njenom luku najbliža od svih koje se odatle mogu povući, da se nijedna druga prava u obadva ugla ne bi mogla povući kroz istu tačku, ili da se među njih umetne), kad se, naravno, ma gdje povuče tangenta kroz tačku koja spaja dva luka koji se neprekidno nastavljaju, pa postaje zajednička tangenta oba dijela kojima se neprekidnim kretanjem završavaju sve ostale tangente u tačkama koje pripadaju ovim lukovima i koje se neprekidnim kretanjem završavaju u onoj tački; a pošto geometričari posmatraju asimptote kao neke prave koje dodiruju one krake na beskonačnom rastojanju na kome se oni spajaju, moraju imati tamo zajedničku tangentu, pa prema tome i zajedničku asimptotu«.[6]

Šta se iz citiranog paragrafa može kazati o Boškovićevom shvatanju tangente i o njegovom shvatanju neprekidnosti krive u vezi sa tangentom? Odgovor na ovo pitanje smatramo da je slijedeći.

a) Istaći ćemo da je Boškovićev pojam tangente geometrijski egzaktan. On je sasvim u duhu moderne geometrijske interpretacije prvog izvoda, kad se uzme u obzir da se kroz zadanu tačku krive može povući beskonačno mnoštvo pravih, pa, prema Boškoviću, »tim imenom (tangentom, primjedba naša) nazvana je prava povučena kroz tačku krive tako da je njenom luku najbliža od svih

---

[6] Cf.: *De continuitatis lege...* & 93 »Id quidem ipsum sanctissime observatur ex eo, quod in omnibus Geometricis curvis, nihil usquam mutatur per saltum, sed mutationes omnes motu continuo fiunt. Id ipsum autem in caeteris omnibus curvarum geometricarum proprietatibus quibuscumque pariter evenit, ut etiam in tangentibus (quo nomine appellatur recta, per curvae punctum ducta ita proxima ejus arcui inter omnes, quae inde duci possunt, ut nulla alia in utriusque angulo duci possit per idem punctum, sive iis interferi), ut nimirum ubicumque tangens ducitur per punctum connectens binos arcus se continuo excipientes, et sit communis tangens utriusque partis, in quam desinant motu continuo tangentes omnes reliquae punctorum ad eosdem arcus pertinentium, et desinentium in illud punctum motu continuo; cumque asymptoti a Geometricis considerentur tanquam quaedam rectae crura illa contingentes in infinita distantia, in qua se bina illa crura connectunt. communem etiam ibi tangentem habere debent, adeoque communem asymptotum.«, str. XLI.

koje se odatle mogu povući, da se nijedna druga prava u obadva ugla ne bi mogla povući kroz istu tačku, ili da se među njima umetne«.

b) Ako Boškovićevu »geometrijsku krivu«, kod koje se »nigdje ništa ne mijenja skokovito, već sve promjene nastaju neprekidnim kretanjem«, definišemo u Descartesovom koordinatnom sistemu jednačinama

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

onda su x (t), y (t), z (t) funkcije *neprekidne* po argumentu t. Očigledno je da Bošković zamišlja da se i tangenta krive *neprekidno* mijenja, pa su i izvodi $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$ funkcije *neprekidne* po argumentu t. Upotrijebimo li pojam moderne matematičke analize, kazaćemo da je Boškovićeva »geometrijska kriva« *glatka* kriva.

Međutim, Boškovićeva tvrdnja, »kad se, naravno, ma gdje povuče tangenta kroz tačku koja spaja dva luka koji se neprekidno nastavljaju, pa postaje zajednička tangenta oba dijela kojim se neprekidnim kretanjem završavaju sve ostale tangente u tačkama koje pripadaju ovim lukovima i koje se neprekidnim kretanjem završavaju u onoj tački«, daje nam povoda da primijetimo da Bošković pomišlja da svaka »neprekidna kriva« u svojoj tački ima tangentu, kakvo je mišljenje, u Boškovićevo vrijeme, vladalo u matematici, jer je mnogo docnije češki matematičar Bernhard Bolzano (1781—1848) otkrio funkciju svuda neprekidnu, ali u nijednoj tački diferencijabilnu, tj. krivu svuda neprekidnu koja nema ni u jednoj svojoj tački tangentu. Istu činjenicu još docnije Karl Weierstrass (1815—1897) je ustanovio. Prema tome, Boškovićeva moguća zamisao da svaka »neprekidna kriva« u svojoj tački ima tangentu naučno nije ispravna.

Bošković će pojam tangente koristiti u tretiranju nekih specijalnih tačaka krive u ravni, što ćemo u daljem izlaganju vidjeti.

2. Na kraju paragrafa Bošković kaže: »a pošto geometričari posmatraju asimptote kao neke prave koje dodiruju one krake na beskonačnom rastojanju na kome se oni spajaju, moraju imati tamo zajedničku tangentu, pa prema tome i zajedničku asimptotu«.

Dotakao se vrlo suptilnih pojmova: asimptote i tangente u beskonačno dalekoj tački. Ti pojmovi, kao što je dobro poznato iz diferencijalne geometrije, nisu u opštem slučaju ekvivalentni. Kod algebarskih krivih linija asimptota i tangenta u beskonačno dalekoj tački su iste prave. Na primer, lako je provjeriti da je to slučaj kod hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ U svim ovim razmatranjima treba dobro voditi računa o asimptotskom pravcu i o asimptoti, jer postoje: krive koje nemaju asimptotskog pravca, pa prema tome ni asimptote; krive koje imaju asimptotski pravac, ali nemaju asimptote; krive koje imaju asimptotu, pa prema tome i asimptotski pravac.

Tako u Boškovićevim razmatranjima nalazimo podsticaje za razmišljanja o mnogim navedenim problemima u vezi sa tangentom i asimptotom u beskonačno dalekoj tački.

III. O NEKIM SINGULARNIM TAČKAMA KRIVE U RAVNI

1. U devedeset četvrtom paragrafu svoga djela *De continuitattis lege*..., Bošković kaže: »Dalje, svuda se taj zakon o zajedničkim tangentama razmatra na svim krivim, bilo gdje da se na njima uzme bilo koja tačka; iz toga zakona, koji se vrlo jasno ističe u čitavoj geometriji, uzimaju se četiri slučaja, od kojih dva pokazuju dvije vrste šiljaka ili povratnih tačaka; jedan pokazuje prevojnu tačku, a jedan, koji se vrlo često javlja, pokazuje nastavljanje krivine na istu stranu. Na sl. 1 neka prava AB dodiruje luk MV, i neka DVE na njoj bude normalna. Sam luk koji se stiče u V, može se ili vratiti iz V u uglu BVD, putem VN_1, ili u uglu BVE koji leži pored njega sa iste strane tangente kao i B, tj. putem VN_2, ili da produži uglom suprotnog temena AVE putem VN_3, ili da isto tako produži preostalim uglom AVD putem VN_4. Ovaj četvrti slučaj MVN_4 zajednički je svim krivima, i uopšte svim tačkama neprekidnih lukova osim izvjesnim određenim tačkama nekih krivih koje sadržavaju neki od prva tri slučaja i podudara se sa slučajem parabole. Treći slučaj MVN_3 povlači za sobom prevojnu tačku, pošto je krivina najprije okrenuta prema tački D, zatim prema tački E, i podudara se sa slučajem prevojne tačke. Drugi slučaj MVN_2, kad tangenta leži u dodiru dva vezana luka, ima šiljak (povratnu tačku) koji smo nazvali šiljkom (povratnom tačkom) prve vrste i podudara se sa slučajem povratne tačke, a krivinu, kao treći slučaj, okreće na suprotnu stranu. Ova tri slučaja postoje kod onih parabola čije su ordinate u nekom odnosu sa apscisom, kao što smo skrenuli pažnju u br. 64. Prvi slučaj MVN_1, tada sadrži šiljak (povratnu tačku) druge vrste obrazovan od lukova koji leže sa iste strane tangente, a primjer krive ove vrste dali smo u istoj onoj raspravi. U drugom i trećem od ovih slučajeva, sama tangenta i sječe luk u istoj tački u kojoj ga i dodiruje, kao što je jasno da ga ne sječe u prvom i četvrtom slučaju[7]«.

[7] Cf.: *De continuitatis lege*... & 94 »Porro eadem illa lex tangentium communium ubique observatur in curvis omnibus ubicumque in iis assumatur punctum quodpiam, ex qua lege per universam Geometriam latissime patente, quatuor habentur casus, quorum bini bina cuspidum, seu regressuum genera exhibent, unus flexum contrarium, et unus frequentissime occurrens progressum curvaturae in eadem plagam. Tangat in fig. 1 recta AB arcum MV, et sit DVE ipsi perpendicularis. Ipse arcus ad V delapsus potest vel regredi ex V in angulo codem BVD, per VN, sive in angulo BVE ipsi adjacente ad eamdem tangentis partem B, seu ultra ipsam per VN, vel progredi in angulo ad verticem opposito AVE, per VN, vel pariter progredi in reliquo angulo AVD per VN. Quartus hic casus MVN communis est curvis omnibus, et ge-

Boškovićeva razmatranja u ovom paragrafu, koristeći metode moderne diferencijalne geometrije, mogu se ovako iskazati.

Tačka V krive je *obična* tačka, ako se kriva u okolini te tačke može definisati jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(t)$, gdje je vektor položaja $\vec{r}(t)$ neprekidno diferencijabilna funkcija po argumentu t i u tački V je izvod $\vec{r}'(t) \neq 0$. U protivnom sulčaju tačka V je *singularna*. Neka je $\vec{r}^{(p)}(t)$ prvi od nule različit izvod u tački V i $\vec{r}^{(q)}(t)$ prvi od izvoda nekolinearan vektor u tački V s vektorom $\vec{r}^{(p)}(t)$. Razlikuju se tada slučajevi: 1. ako je p neparno, a q parno, onda kriva u okolini tačke V ima isti oblik kao i u okolini *obične* tačke (Boškovićev četvrti slučaj) 2. ako su p i q neparni, onda je tačka V *prevojna* tačka (Boškovićev treći slučaj); 3. ako je p parno a q neparno. onda je V *povratna tačka prve vrste* (Boškovićev drugi slučaj); 4. ako su p i q parni, onda je V *povratna tačka druge vrste* (Boškovićev prvi slučaj).

U devedeset petom paragrafu, Bošković nastavlja: »Neki misle da se povređuje zakon kontinuiteta u prvom i drugom slučaju šiljaka (povratnih tačaka), zbog onog vraćanja, dok se u drugom i trećem povređuje zakon kontinuiteta zbog krivine koja se iznenada obrnula na suprotnu stranu. Međutim, vidjećemo da se ni u jednom ni u drugom slučaju ne narušava kontinuitet, kad budemo objasnili malo kasnije sam zakon. Ovdje se mora paziti samo na to da se ne bi pomiješala dvostruka tačka, u kojoj kriva sječe samu sebe, sa povratnom tačkom i šiljkom, što biva svuda na krivima koje petlju imaju. Takva je kriva na slici 2 MOVCFIVPN koja sebe presijeca u V i načini petlju vrativši se u sebe samu, a petlja ove vrste, osim kod drugih bezbrojnih krivih, pojavljuje se i u poznatoj konhoidi. U V se vidi da postoji neki šiljak MVN; ali se drukčije događa ako se luk MV ne produžava u V sa lukom VN, već ako ga siječe, pošto je otišao dalje preko V putem VC, i zatim se još jednom vratio u V putem IV. U tom susretu tangente AVB i A′ VB′ naginju se uzajamno jedna prema drugoj i zahvataju ugao. I koliko god puta se zbog promijenje-

neraliter omnibus arcuum continuorum punctis, praeter puncta quaedam quarumdam curvarum determinata, quae aliquem continent ex prioribus tribus, et congruit cum casu figurae 7. Tertius MVN flexum contrarium secum trahit, curvatura obversa prius puncto D, tum puncto E, et congruit cum casu figurae 9. Secundus MVN cuspidem habet, quam primi generis dicimus, cum tangens binis arcubus in contactu conjunctis interjacet, et congruit cum casu figurae 8, ac curvaturam, ut tertius, in contrariam obvertit partem. Atque hi tres habentur in illis Parabolis quarum ordinate sunt in aliqua ratione abscissae, ut monuimus num. 64. Primus demum MVN continent cuspidem secundi generis efformatam ab arcubus ad eamdem tangentis partem jacentibus, cujusmodi curvae exemplum in eadem illa dedimus dissertatione. In horum autem casuum secundo, et tertio tangens ipsa arcum in eodem puncto, in quo contingit, secat etiam, ut patet, in primo, et quarto non secat«., str. XLI—XLII.

nih uslova krive, sama kriva mijenja tako, da nestaje petlja VCFIV, što se dešava i kod konhoide, uvijek se nastavljaju dva kraka MV i VN i nastaje šiljak MVN na slici 3, u kojem slučaju se uvijek one dvije tangente spajaju u jednu i nikad se ne dešava u čitavoj geometriji, da dva susjedna luka spojena zajedničkom međom imaju u njoj dvije tangente koje bi gradile neki ugao[8]«.

Bošković se ovdje, kao i u prethodnom paragrafu, dotiče singularnih tačaka ravanske krive, pa zbog toga treba podvući slijedeće.

Neka je ravanska kriva K definisana jednačinom F (x, y) = O u Descartesovim koordinatama. *Singularne* tačke krive K mogu biti samo one u kojima je $\partial F/\partial x = 0$ i $\partial F/\partial y = 0$. Singularna tačka je drugog reda, ako je bar jedan od drugih parcijalnih izvoda funkcije F (x, y) u njoj različit od nule. Koeficijent pravca tangente y′ krive K u toj tački određuje se iz jednačine

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 = 0$$

Ako je u njoj ispunjen uslov

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0,$$

onda je to tačka *samopresijecanja,* kao što je tačka V (sl. 2); ako je

[8] Cf.: *De contiuitatis lege...* & 95 »Continuitatis legem violari arbitrantur nonnulli in primo et secundo cuspidum casu, ob regressum illum, et in secundo, ac tertio ob curvaturam in contrarium repente coversam. At neutro in casu detrimentum continuitatis haberi ullum videbimus, ubi ipsam legem explicaverimus paullo inferius. Illud hic cavendum tantummodo, ne confundatur cum puncto regressus, et cuspide, punctum duplex, in quo curva se ipsam secat, quod ubique fit in iis curvis, quae nodum habent. Ejusmodi est in fig. 17 curva MOVCFIVPN, quae se intersecat in V, ac nodum efficit in se ipsam regressa, cujusmodi nodus, praeter curvas alias innumeras sublimiores, in Concoide etiam citeriore occurrit. Videtur in V haberi cuspis quaedam MVN: sed secus accidit, cum arcus MV non continuetur in V cum arcu VN, sed ispum secet progressus ultra V per VC, et inde iterum ad V regressus per IV. In illo occursu V fangentes AVB, A′ VB′ inclinatur ad se invicem, et angulum continent. Verum quotiescumque ex mutatis curvae conditionibus, curva ipsa ita mutatur, ut nodus VCFIV evanescat, quod pariter in Concoide contingit, semper bina crura MV, VN continuantur, et cuspis MVN gignitur figurae 18, in quo tamen casu semper binae illae tangentes in unicam coalescunt, nec unquam accidit in universa Geometria, ut bini arcus contigui, communi termino copulati, binas in eo tangentes habeant, quae aliquem angulum constituant«., str. XLII.

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < O,$$

onda je to *izolovana* tačka; ako je

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = O,$$

onda je to *povratna* tačka prve odnosno druge vrste ili tačka *samododirivanja.*

Ako su u singularnoj tački krive K svi parcijalni izvodi funkcije F (x, y) zaključno do reda n-1 jednaki nuli, a bar jedan od parcijalnih izvoda reda n različit od nule, onda je to *singularna tačka reda n* krive K.

Bošković kao primjer za svoja razmatranja uzima *konhoidu,* pa je potrebno nešto reći o ovoj krivoj.

Konhoida neke ravanske krive C je ravanska kriva koja se dobija umanjivanjem ili uvećavanjem radijus vektora svake tačke krive C za jednu istu dužinu d. Ako je $\rho = f(\varphi)$ jednačina krive C u polarnim koordinatama, onda je jednačina njene *konhoide* $\rho = f(\varphi) \pm d$. Obično se pod konhoidom podrazumijeva konhoida prave i ona se zove *Nikomedova konhoida,* prema antičkom geometru Nikomedu (treći i drugi vijek prije nove ere), koju je koristio u rješavanju problema trisekcije ugla.

Ako je a rastojanje pola O od dane prave, onda je jednačina Nikomedove konhoide $\rho = a/\cos\varphi \pm d$ ili u Descartesovim koordinatama

$$(x - a)^2 (x + y)^2 - d^2x^2 = O$$

sa početkom u O.

Nikomedova konhoida je, kao što se vidi iz njene jednačine u Descartesovim koordinatama, algebarska kriva četvrtog reda. Sastoji se iz dvije beskonačne grane. U zavisnosti od odnosa dužina a i d jedna njena grana mijenja svoj oblik, tako da pol može biti *tačka samopresijecanja* (d > a, sl. 4), *povratna tačka* (d = a, sl. 5) i *izolovana tačka* (d < a, sl. 6). Obje grane Nikomedove konhoide se asimptotski približavaju datoj pravoj koja se nalazi na rastojanju a od pola O.

Ako $d \to a$, onda se tačka samopresijecanja (dvostruka tačka) transformiše u povratnu tačku prve vrste (»zbog promijenjenih uslova krive, sama se kriva mijenja tako, da nestaje petlja VCFIV, što se dešava i kod konhoide, uvijek se nastavljaju dva kraka MV i VN i nastaje šiljak MVN na sl. 3, u kom slučaju se uvijek one dvije tangente spajaju u jednu«, kaže Bošković).

No, ovdje ipak treba primjetiti da Boškovićeva konstatacija »i nikad se ne dešava u čitavoj geometriji da dva susjedna luka spojena zajedničkom međom imaju u njoj dvije tangente koje bi gradile neki ugao« vrijedi za *glatke* krive.

Inspirisan istim idejama, nastavlja dalje u devedeset šestom paragrafu: »Preostaje još mnogo da se kaže o krivim linijama koje imaju bilo koji konačni ili šta više beskonačni broj grana sa kracima produženim u beskonačnost... vrlo je mnogo spiralnih krivih čija po dva ili bilo koliko lukova idu u beskonačnost, dok se ostali stalno okreću oko date tačke, a da se u nju ne vraćaju, ili se u beskonačnosti približavaju datim kružnicama ili datim ovalama, stalnim kružnim kretanjem, a da ih ipak nigdje ne sijeku; upravo od krivih te vrste je čudna i korisna logaritamska spirala za koju takođe, iako izgleda da ima jedan spiralni luk koji od date tačke odavde ide u beskonačnost, a otuda se vraća, možemo dokazati da ima beskonačan broj lukova i da iz nje nastaju vrlo mnoge druge dosta čudne spirale... iako se odnose na isto geometrijsko mjesto i to tako, da tačka ne može nikako preći s jednog luka na drugi, a one (krive) se ipak, dok se transformišu pod izmijenjenim uslovima, nekako sijeku i mijenjaju svoje lukove na taj način, što se od dva luka, koji su se prije odnosili na razne grane ili kružnice, stvara neki novi neprekidni luk, za što imamo veoma mnogo primjera, a najljepši su oni kod konhoida koje imaju kružnicu za osu; vrste tih konhoida su mnogobrojne, a promjene dosta čudne[9]«.

Bošković pominje *spirale*, pa je potrebno nešto reći o njima. Ravanska *spirala* je ravanska kriva koja beskonačno puta okružuje neku fiksnu tačku O, tako da joj se svakim obilaskom oko nje približava ili se udaljuje od nje. Ako je O pol u sistemu polarnih koordinata, onda je $\rho = f(\varphi)$ jednačina spirale, pri čemu je $f(\varphi + 2\pi) > f(\varphi)$ ili $f(\varphi + 2\pi) < f(\varphi)$ za svako φ. Dobro su poznate, naprimjer: Arhimedova spirala ($\rho = a\varphi$); Logaritamska

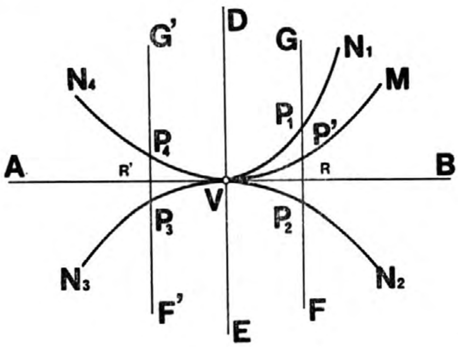
[9] Cf.: *De continuitatis lege...* & 96 »Plurima alia superessent dicenda de curvis, quae vel finitum habent ramorum numerum quemcumque, vel etiam infinitum, cruribus in infinitum productis..., ac plurima de spiralibus curvis, quarum bini, vel quotcumque arcus in infinitum abeant, ali circa datum punctum perpetuo convertantur, quin in ipsum recidant, vel ad datos circulos, aut ad datas ovales in infinitum accedant perpetuo circumducti, nec tamen uspiam in eas incidant, cujus generis mira admodum, et utilis spiralis logarithmica, quam itidem, licet unicum habere videatur arcum spiralem hinc in infinitum recedentem a dato puncto, inde accedentem, demonstrare possumus, habere, infinitos, ut etiam spirales aliae quamplurimae ex ea ortae satis mirae..., quarum alii nullam cum aliis licet ad eumdem geometricum locum pertinentibus communicationem habent ita, ut punctum ex altero in alterum commigrare nullo modo possit, quae tamen dum transformantur, mutatis conditionibus, se discindant quodammodo, et arcus permutent suos ita, ut e binis arcubus ad diversos ramos, vel orbes pertinentibus prius, oriatur novus quipiam continuus, cujusmodi exempla plurima occurrint, et elegantissima sane in Concoidibus habentibus circulum pro axe, quarum Concoidum, et species sunt plurimae, et transformationes satis mirae.«, str. XLII—XLIII.

spirala ($\rho = ae^{k\varphi}$); Parabolička spirala ($\rho = a\varphi^2$); Hiperbolička spirala ($\rho = a/\varphi$) i mnoge druge.

Kad Bošković kaže da se lukovi spirala »stalno okreću oko date tačke, a da se u nju ne vraćaju, ili se u beskonačnosti približavaju datim kružnicama ili datim ovalima, stalnim kružnim kretanjem, a da ih ipak nigdje ne sijeku«, onda je tu očigledno riječ o *asimptotskoj tački* odnosno *asimptotskoj kružnici* ili *asimptotskoj ovali* odgovarajuće spirale. Na primjer, ako je $\rho = f(\varphi)$ jednačina spirale i $\lim_{|\varphi|\to\infty} \rho = \lim_{|\varphi|\to\infty} f(\varphi) = c$, onda je $\rho = c$ jednačina njene *asimptotske kružnice;* ako je $c = 0$, imamo *asimptotsku tačku* (na primjer, u slučaju Logaritamske spirale).

Pominje konhoidu kružnice. To je, na primjer, dobro poznata kriva koja se zove *Paskalov puž* ($\rho = 2a\cos\varphi + d$), a njen poseban slučaj je *kardioida* ($d = 2a$). Vidjeti sliku 7 (Paskalov puž) i sliku 8 (Kardioidu). Tačka O je singularna tačka, kod kardioide je *povratna tačka.* Jasno je $OC = a$ i $NM = d$.

Bošković ima u vidu mnogobrojne krive, veoma zanimljive sa stanovišta singularnih tačaka koje on posmatra[10], u kojima se očituje zakon kontinuiteta.



Sl. 1

2. Kao geometričar, sa razvijenom geometrijskom intuicijom, Bošković razmatra *povratne tačke krivih.* Ne ulazeći u analitička ispitivanja pomoću diferencijalnog računa, rukovođen svojim zakonom kontinuiteta, pokazuje da se u *povratnim* tačkama ne narušava zakon kontinuiteta u pogledu toka krive i u pogledu mjenjanja tangente.

[10] Cf.: Na primjer: A. A. Savelov, *Ploskie krivie,* Gosudarstvenoe izdateljstvo Fiziko-matematičeskoi literaturi, Moskva, 1960.

Tako u paragrafu sto trideset devetom, nasuprot Leibnizovim razmišljanjima i razmišljanjima njegovih pristalica, veli: »Na sl. 2, petlja se proteže uvijek na isti način neprekidnim pravcem preko MOVCFI VPN. U svim njenim međutačkama i tangenta neprekidno teče preko QOR, AVB, DCE, GFH, LIK, B' VA', SPT. Kad nestane petlja, sl. 2 prelazi u sl. 3, i imamo šiljak MVN, u kome, kažu, tačka V nije matematička tačka, već neka beskrajno mala petlja koja još ima iste tangente«.[11] A u paragrafu sto četrdesetom nastavlja: »Ali to mi ni na koji način ne možemo dokazati. Jer, ona tačka na šiljku je jedna nedjeljiva tačka, a i luk MOF spaja se sa lukom FPN u jednoj jedinoj tački, što je lako dokazati pomoću konačne geometrije. Šiljak, doduše, može nastati iz petlje, pošto se izmjeni uslov geometrijskog mjesta, kao kod konhoide, kod koje, ako bi rastojanje pola od ose — gdje s ove i s one strane treba da se uzme duž, jednaka onoj datoj, sa strane samog pola, ili sa suprotne strane, da bi njen vrh neprekidnim kretanjem opisao onu krivu, — bilo manje nego sama data duž onda se dobija petlja s ove strane ose; ako je rastojanje jednako, dobija se šiljak, a ako je veće, dobijaju se dva suprotna zavoja; pa ipak, ona kriva koja ima petlju, ima i svoju naročitu prirodu, koja se razlikuje od prirode ostalih, i svoje osobine koje je konačna geometrija tačno utvrdila: napr. parabola, koja je na sredini između elipsa i hiperbola, dobila je svoj oblik i svoje osobine, pošto je izgubila najveći dio onih osobina koje pripadaju elipsi i hiperboli, jer su one otišle u beskonačnost ili nestale. Među takve osobine spada i ona, da petlja potpuno iščezava i poslije nje ne dolazi nikakva ni beskrajno mala petlja, već nedjeljiva tačka. I tako smatramo da kontinuitet nije uopšte narušen. Jer kad bi se šiljak posmatrao odvojeno, nezavisno od petlje, od koje je postao na sl. 3, tangenta u vrhu V biće jedina AB, i pošto tačka neprekidnim kretanjem ide preko same krive putem OVP, tangenta QOR će neprekidnim mijenjanjem pravca doći u položaj AVB a tada, ako je šiljak prvog reda, kao što pokazuje slika, sama tangenta će isto tako, neprekidnom promjenom pravca preći sa položaja AVB na položaj TPS; a ako bi šiljak bio druge vrste, onda bi se taj pravac vratio natrag od tangente povučene kroz šiljak. Uvijek će se ipak prelaziti od jednog pravca tangente ka drugom preko svih međupravaca«.[12] I u para-

[11] Cf.: *De continuitatis lege*... & 139 »In fig. 17 nodus excurrit directione semper in eamdem plagam continuata per MOVCFIVPN. In omnibus iis intermediis punctis eäcurrit et tangens excursu continuo per QOR, AVB, DCE, GFH, LIK, B'VA, SPT. Evanescente nodo, abit fig. 17 in 18, et habetur cuspis MVN, in qua dicunt, punctum V non esse punctum mathematicum, sed nodum quendam infinitè parvum, habentem adhuc easdem illas tangentes.«, str. LXIV.

[12] Cf.: *De continuitatis lege*... & 140 »At nobis id nullo pacto probari potest. Nam punctum illud cuspidis est unicum indivisibile punctum, et arcus MOF in unico puncto cum arcu FPN conjungitur; quod per finitam geometriam facile demonstratur. Et quidem licet cuspis oriatur ex nodo, mutata conditione loci Geometrici, ut in Concoide, ubi, si distatia poli ab axe citra

grafu sto četrdeset drugom naglašava: »Zato u tački šiljka V na sl. 3, postoji tangenta sa oba smjera AVB, B' VA'. Štaviše, svuda se mogu podjednako posmatrati oba smjera čas sa suprotnim stranama koje se poklapaju, čas sa tokom linije kojoj je u samoj tački O, samoj po sebi podjednak kako smjer OQ, tako i smjer OR. Nikakav skok se u svemu tome ne primjećuje, nikakav prelaz sa veličine na veličinu bez međuveličina«.[13] U paragrafu sto četrdeset trećem, Bošković je geometrijski sasvim odlučan, da nema skoka tamo gdje se zamišlja promjena petlje u šiljak i tim povodom veli: »Međutim, nema nikakvog skoka tamo gdje se zamišlja promjena petlje sl. 2, u šiljak sl. 3. Dok se na sl. 2, petlja smanjuje neograničeno, dvije tangente AVB, A' VB' podjednako neograničeno prilaze jedna drugoj i potpuno se poklapaju, dok petlja nestaje. Luk MV, koji je petljom bio povezan sa lukom VN, povezuje se neposredno u jednoj tački, i nastavlja se. Prave KL, HG, ED težile su da nijedna ne prolazi kroz V u uglu MVN, nego da svaka od njih ostavi na istoj strani ma koji luk VM, VN. Time se ističu i na sl. 3 zadržavajući isti pravac. Tamo su ipak dodirivale neki luk, ovdje ne dodiruju nijedan, jer je nestao luk koji bi trebalo da dodiruju. Isto se dešava i tamo gdje se kružnica pretvara u tačku, dok poluprečnik nestaje. Prave koje su bile tangente ostaju i sad baš prolaze kroz istu tačku;

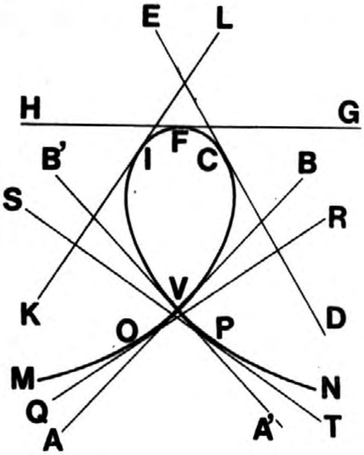
---

et ultra quem recta assumi debet aequalis datae ad partes poli ipsius, vel ad oppositas, ut ejus vertex motu continuo eam curvam describat (quae ipsius natura ipsa est), fuerit minor, quam ipsa recta data, habetur citra axem nodus, si aequalis, habetur cuspis, si major, habentur bini flexus contrarii; adhuc tamen illa curva, quae nodum habet, suam habet naturam peculiarem diversam a reliquarum natura, et suas proprietates per finitam Geometriam accurate determinatas, ut Parabola inter Ellipses, et Hyperbolas media, suam speciem constituit, et suas proprietates habet, amissis eorum plurimis, quae ad Ellipsim, et Hyperbolam pertinent, eo quod abierint in infinitum, vel evanuerint. Inter has proprietates est illa, quod nodus penitus evanescit, et ipsi non nodus quipiam infinitesimis succedit, sed indivisibile punctum. Adhuc tamen continuitatem omnino non laedi arbitramur. Nam si cuspis consideretur seorsum independenter a nodo, a quo est genita, in fig. 18; tangens in vertice V erit unica AB, et puncto per ipsam curvam excurrente motu continuo per OVP, tangens QOR, mutatione directionis continua abibit in AVB, tum si cuspis sit primi generis, ut exhibet figura, mutatione itidem continua directionis ipsa tangens perget a positione AVB ad positionem TPS; nam si cuspis esset secundi generis, directio illa a tangente per cuspidem ducta retro regrederetur. Semper tamen ab una directione tangentis ad aliam per omnes intermedias directiones transibitur.«, str. LXIV—LXV.

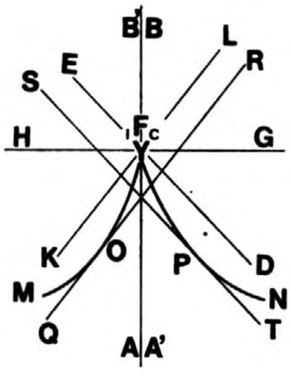
[13] Cf.: *De continuitatis lege*... & 142 »Hinc in puncto cuspidis V fig. 18 habetur tangens cum utraque direcione AVB, B' VA'. Quin immo etiam ubique utraque directio indifferenter considerari potest tum plagis oppositis congruentibus, tum fluxu lineae in ipso puncto O indifferentis per sese tam ad directionem OQ, quam ad directionem OR. Nullus in iis omnibus saltus deprehenditur, nullus nimirum transitus a magnitudine ad magnitudinem sine intermediis.«, str. LXV.

ali one nisu tangente nijednog luka, jer je taj luk prestao da postoji«.[14]

Može se primjetiti, da svoja razmatranja koja su u osnovi intuitivno geometrijski tačna, kako se održava zakon kontinuiteta u *povratnim* tačkama, Bošković ne analizira primjenom analitičkih



Sl. 2



Sl. 3

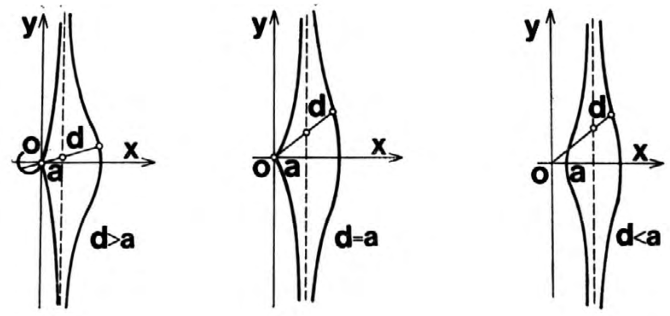
metoda diferencijalnog računa i ne ulazi matematički dublje u razliku *povratnih* tačaka *prve i druge* vrste[15], iako tačno geometrijski pravi razliku među tim tačkama. To je izvjestan nedostatak u njegovim razmatranjima, kao što je i njegovo razmišljanje da se to dešava u okvirima neprekidnosti krivih, a da ne pomene da krive moraju imati tangente, odnosno da odgovarajuća funkcija mora biti diferencijabilna.

U paragrafu sto četrdeset i četvrtom, Bošković potanko analizira kako se održava kontinuitet kod *evolvente* petlje kad dvostru-

[14] Cf.: *De continuitatis lege*... & 143 »Sed nec habetur ullus saltus, ubi concipitur mutatio nodi figurae 17 in cuspidem figurae 18. In illa dum nodus minuitur ultra quoscumque limites, binae tangentes AVB, A' VB' ad se mvicem accedunt pariter ultra quoscumque limites, et illo evanescente penitus congruunt, ac arcus MV, qui cum arcu VN conectebatur per nodum, jam connectitur immediate per sese in unico puncto, et continuatur. Rectae illae, KL, HG, ED eas habebant tendentias, ut nulla per V transiret in angulo MVN, sed quaevis ex iis relinqueret ad eandem plagam aliquem arcum VM, VN. Idem praestant in fig. 18 eadem directione manente. At ibi tangebant aliquem arcum, hic nullum tangunt, destructo nimirum arcu, quem deberent contingere. Idem accidit, ubi circulus in punctum definit, evanescente radio. Rectae quae fuerant tangentes, remanent, et jam per illud punctum transeunt: sed nullius arcus tengentes sunt, cum is arcus esse defierit«., str. LXVI.

[15] Cf.: Na primjer: P. K. Raševski, *Kurs diferencialnoi geommetrii*, Gosudarstvenoe izdatelstvo tehniko-teoretičeskoi literaturi, str. 30—50, Moskva, 1956.

ka tačka prelazi u *povratnu,* iako izgleda »da je narušen kontinuitet, ali se on ipak i tada potpuno očuva« ističe Bošković i veli: »Kad bi se posmatrala kriva koja je nastala evolucijom petlje koja prelazi u šiljak, izgledalo bi da je narušen kontinuitet, ali se on ipak i tada potpuno očuva. Kad bi se petlja na sl. 2, odmotala počev od P, za određivanje tačaka nastale krive, treba da se tangentama VA, IK, FH, CE, VB, OR uzmu segmenti jednaki lukovima VP, IVP, FIVP, CFIVP, VCFIVP, OVCFIVP. Kad petlja nestane i pređe u šiljak, na sl. 3, segmenti na tangentama VA, IK, FH, CE, VB, koji su se među sobom razlikovali lukovima petlje, izjednačavaju se i mjesto neprekidne krive dolazi kriva koja je nastala odmotavanjem luka



Sl. 4 Sl. 5 Sl. 6

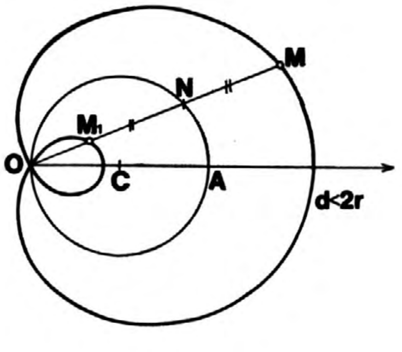
VP počev u P sl. 3; polukružnica i kriva koja je nastala odmotavanjem luka FV sa dodatom duži jednake luku VP, svakako su po prirodi različite od kružnice i ne zadržavaju kontinuitet. Ako se uzme luk VO jednak VP i zamisli kriva nastala odmotavanjem koje počinje u O preko OVCFIVP i ako se u pojedinim nastalim krivama zamisle tri luka: zahvaćeni tačkom P i tangentom VA′, tangentom VA′ i tangentom VB; tangentom VB i tangentom OR, tačkom O i tangentom VA; tangentom VA i tangentom VB′, tangentom VB′ i tangentom PS; u trenutku kad se stvara šiljak i sastaju tangente VA, VA′ i tangente VB, VB′, prva dva, srednja dva i posljednja dva luka nastavljaju se međusobno, i ona prva dva obrazuju neprekidnu krivu koja nastaje kada se nit odmotava od VP na sl. 3, i namotava na VO, kao što se obično dešava kod cikloide koja na taj način stvara sebe samu; druga dva luka obrazuju potpunu kružnicu, treća dva neprekidnu krivu koja nastaje suprotnim odmotavanjem (evolucijom) i namotavanjem (advolucijom) lukova VP, VO, nastalih dodavanjem u V duži jednake samim tim lukovima. Prije ove transformacije lukovi dviju neprekidnih krivih prilaze neprekidnim lukovima triju krivih u kojima se one završavaju u sebi preko bilo kojih granica; a da se krivina ne bi mijenjala skokom, ona kružnica ostaje oskulatorna kružnica obiju novih krivih; na taj način se sve ovo lako dokazuje. U svim slučajevima ove vrste kada se produži transformacija, dok se mijenjaju lukovi geometrijskih mjesta i spajaju jedni s drugima, od kojih su bili razdvojeni, oni ili obrazuju drugo jedinstveno geometrijsko mjesto, prenoseći kontinuitet sa jednih na one druge koji su se ranije spajali s drugima, ili se pretvaraju u dva geometrijska mjesta koja su međusobno sasvim razdvojena, i pošto nikakvom zajednicom kontinuiteta nisu vezani, neka se, šta više, i odvajaju, ali tako, da se u onom momentu, kada nastaje razdvajanje sjedinjuju i spajaju neprekidne linije s drugima, a isto tako i tačke, u kojima nastaju novi spojevi, tangente povučene kroz njih, polupречnici oskulatornih kružnica i sve drugo tome slično neka se međusobno približava preko bilo kojih granica, dok se potpuno ne spoji.«[16]

Da bi se bolje shvatio tok Boškovićevih razmišljanja, potrebno je podsjetiti se na slijedeće. Neka je C data kriva. Geometrijsko

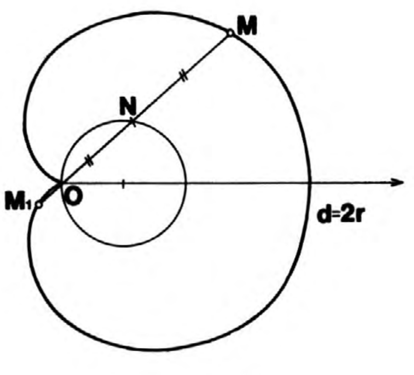
[16] Cf.: *De continuitatis lege*... & 144 »Ubi consideretur curva genita evolutione nodi abeuntis in cuspisem, videtur laedi continuitas; quae tamen tum etiam servatur omnino. Si nodus figurae 17 evolvatur incipiendo a P, ad determinanda puncta genitae assumi, debent in tangentibus VA, IK, FH, CE, VB, OR segmenta aequalia arcubus VP, IVP, FIVP, CFIVP, VCFIVP, OVCFIVP. Nodo evanescente, et abeunte in cuspidem figurae 18, seg-menta tangentium VA, IK, FH, CE, VB, quae differebant a se invicem pae arcus nodi, jam evadunt aequalia, et succedit illi curvae continuae curva genita evolutione arcus VP caepta in P figurae 18, semicirculus, et curva genita evolutione arcus FV, adjecta ipsi recta aequali arcui VP, quae quidem curvae diversae a circulo naturae sunt, et continuitatem non servant. At si assumpto arcu VO asequali VP concipiatur curva genita evolutione incipiente in O per OVCFIVP, et in singulis genitis concipiantur terni arcus, in illa, intercepti puncto P, et tangente VA', tangenta VA', et tangente VB, tangente VB, et tangente OR, in hoc puncto O, et tangente VA, tangente VA, et tangente VB', tangente VB' et tangente PS, momento, quo cuspis efformatur, et coeunt tangentis VA, VA', ac tangentes VB, VB', continuantur inter se priores bini, bini medii inter se, postremi bini inter se, et primi illi duo efformant curvam continuam genitam filo evoluto in fig. 18 ex VP, et advoluto VO, ut in cycloide fieri solet, quae ita generat se ispam, secundi integrum circulum, tertii curvam continuam genitam opposita evolutione, et advolutione arcuum VP, VO, facta cum additione in V rectae ipsis aequali. Ante eam transformationem arcus illi binarum curvarum continuarum accedunt ad arcus continuos trium, in quas illae desinunt, et ad se ultra quoscumque limites, ac ne curvatura mutetur per saltum, circulus ille remanet utriusque novae curvae osculator, quae omnia admodum facile demonstrantur. In omnibus hujus generis casibus transformatione continuata, dum permutantur arcus locorum Geometricorum, et alii cum aliis, a quibus distabant, conjunguntur, vel alium unicum locum geometricum efformant, continuitate ab aliis translata ad alia, quae prius cum aliis continuabantur, vel etiam desinunt in bina loca Geometrica a se invicem prorsus distincta, et nulla jam communicatione continuitatis conjuncta, quaedam etiam abrumpuntur, sed ita, ut eo momento, quo abruptio sit, uniantur, et continuentur lineae continuae cum aliis, ac puncta, in quibus connexione novae fiunt, tangentes per ea ductae, radii osculatorum circulorum, et alia omnia ejusmodi ad se invicem prius accedant ultra quoscunque limites, donec penitus coeant«., ste. LXVI—LXVII.

mjesto centara krivine krive C, ili obvojnica njenih normala, je kriva E koja se zove *evoluta* krive C. U odnosu na evolutu E kriva C zove se *evolventa.* Ona je *ortogonalna trajektorija* tangenata evolute, tj. *tangente evolute su normale evolvente.*

Za uzajamni odnos evolute i evolvente od osnovnog značaja je slijedeći stav: ako se poluprečnik krivine R evolvente monotono mijenja, onda je njegov priraštaj pri promjeni centra krivine iz početne u krajnju tačku ma kojeg luka evolute dužine L, jednak dužini L luka, odnosno ako se za pozitivan smjer na evoluti uzme onaj u kome poluprečnik krivine evolvente raste, onda je $dR = dL$, tj. *diferencijal luka evolute jednak je diferencijalu poluprečnika krivine evolvente.*



Sl. 7



Sl. 8

Jasno je, dakle, da je petlja na sl. 2 *evoluta* i da Bošković posmatra potanko geometrijski kako se mijenja *evolventa petlje,* kada dvostruka tačka V prelazi u povratnu tačku V na sl. 3. Očigledno je da pri tome koristi navedeni stav o uzajamnom odnosu poluprečnika krivine evolvente i luka evolute (»...za određivanje tačaka nastale krive treba da se na tangentama VA′, IK, FH, CE, VB, OR uzmu segmenti jednaki lukovima VP, IVP, FIVP, CFIVP, VCFIVP, OVCFIVP«), kao i praktičnu konstrukciju evolvente koja slijedi iz njene definicije i navedenog stava, naime: *ako se oko evolute obvije konac, pa se odmotava, držeći ga zategnutog, njegov kraj će opisati evolventu.* U vezi s ovim, da bi bio jasniji u svom izlaganju, Bošković ističe primjer *cikloide* (»...kao što se obično dešava kod cikloide koja na taj način stvara sebe samu«).

Naime, cikloidu (sl. 9 — puna linija), kao što je poznato, definišu jednačine: $x = r\,(t + \sin t)$, $y = r\,(\cos t + 1)$. Njena evoluta je ponovo cikloida (sl. 10 — isprekidana linija) koju definišu jednačine $X = r\,(T - \sin T)$, $Y = r\,(1 - \cos T)$. Posljednje jednačine dobijaju se iz prethodnih primjenom transformacija $x = X - r\pi$, y = Y 2r, t = T — π, što pokazuje da je evoluta cikloide također cikloida, kongruentna sa datom cikloidom, ali u odnosu na nju translatorno pomerena na niže za 2r i u levo za rπ. Prema tome i *evolventa* cikloide je također cikloida, kongruentna sa datom cikloidom. Na ovaj način je jasno zašto se Bošković poslužio cikloidom kao primjerom, istakavši da ona »stvara samu sebe«.

U vezi sa uzajamnim odnosom evolute i evolvente, pomenimo još i sljedeće, što bi moglo doprinijeti boljem razumijevanju Boškovićevih razmatranja u ovom paragrafu. Naime: tački ekstremuma poluprečnika krivine evolvente (tjemenu evolvente) odgovara, uopšte uzev, povratna tačka evolute; tački evolvente u kojoj je njena krivina jednaka nuli odgovara beskonačno daleka tačka evolute i saglasno njoj beskonačna grana evolute, kojoj je asimptota normala evolvente u tački krivine nula.

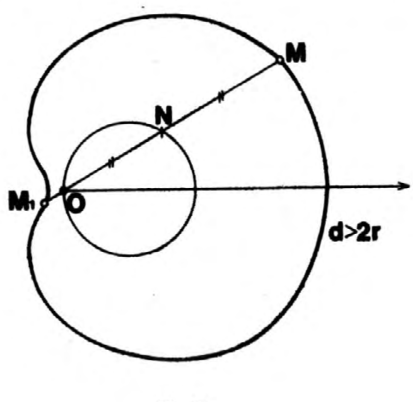
Sva su ostala razmatranja geometrijski opravdana u okviru Boškovićeve neprekidnosti.

*

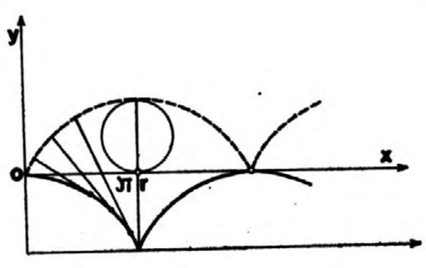
* *

Bošković je ideju neprekidnosti fiksirao u svom *Zakonu kontinuiteta.* Ona je bila jedno od glavnih ishodišta u njegovoj izgradnji atomske teorije. Tom idejom pristupa matematičkim pojmovima i stavovima. U njima hoće da nađe racionalno opravdanje za tu ideju.

U okviru te ideje tretira tangentu i njenu ulogu u karakterisanju obične, prevojne, dvostruke i povratne tačke krive. Snažnom *geometrijskom intuicijom* dolazi do tačnih zaključaka, bez analitičkih analiza, koje je u njegovo vrijeme pružao diferencijalni račun. Insistirajući na svojoj ideji neprekidnosti, nije ni pomenuo da njegova »neprekidna kriva« mora imati *tangentu* odnosno da odgovarajuća funkcija mora biti *diferencijabilna.* Izgleda da je zamišljao



Sl. 9



Sl. 10

da to slijedi iz njegove ideje neprekidnosti, tj. iz njegovog *Zakona kontinuiteta*. U matematici se tako i mislilo, u Boškovićevo vrijeme, kao što smo to već istakli, naime, da iz *neprekidnosti* krive slijedi da ona ima *tangentu* odnosno da iz *neprekidnosti* funkcije slijedi *diferencijabilnost* funkcije. To je *slaba* tačka u Boškovićevom matematičkom razmišljanju. No, bez obzira na to, njegova je *neprekidnost* matematički djelovala kao *diferencijabilnost,* pa je snažnom geometrijskom intuicijom nalazio tačne rezultate u mnogim matematičkim problemima, kao što je bio slučaj tretiranja tangente i njene uloge u tretiranju spomenutih tačaka krive.

Mora se podvući da je Bošković kao matematičar imao veliku moć geometrijskog uviđanja. Kao takav, bio je uvijek kritički raspoložen prema upotrebi »formula«. To je pokazao i u svojim razmišljanjima o tangenti i o njenoj ulozi u karakterisanju tačaka svoje »neprekidne krive«. Njegova moć da geometrijskom intuicijom sagleda matematičke pojmove i nazre matematičke stavove prikazuje nam ga kao velikog i misaonog matematičara.

A REVIEW ON SOME QUESTIONES CONCERNING DIFFERENTIAL GEOMETRY IN PLANE, TREATED IN BOŠKOVIĆ'S THE LAW OF CONTINUANCE

Ernest STIPANIĆ

Summary

In his book The Law of Continuance Bošković described his idea of continuance. It was one of the main initial points in his creof atomic theory. Using this idea he treats many mathematical ideas and attitudes. That is how he wants to find the rational explanation for the idea.

Within that idea, he treats tangenta and its role in characterizing the ordinary, inflexion, doubled and cusp points in paragrafs 93., 94., 95., 96., 139., 140., 142., 143 and 144. of his work *De continuitatis lege et ejus consectariis pertinentibus ad prima materiae eorumque vires,* Romae, MDCCLIV. By intensive *geometrical intuition* he reaches the exact conclusions, withont analitical analyses, which at his time could be obtained by differential calculus. By insisting on his idea of continuance he even did not mention that his »continuons cureve« had to have *tangenta,* which means that corresponding function has to be *differentation.* It seems that he immagined it resulted out of his idea of continuance that is *The Law of Continuance.* In Bošković's time it was the attitude in mathematics, as we have already pointed out, which means that considering continuaces curve it follows that the curve has *tangenta,* which means that from continuons function results the *differentiation of function.* That is the *weak point* in Bošković's mathematical oppinion. But, no matter, his *continuance* in mathematical field acted as *differentiation,* so by strong geometrical intuition Bošković used to find the exact results in many mathematical problems, as it was the case of treating the tangent and its role in treating the mentioned curved points.

It must be pointed out that Bošković as a mathematician had a great possibility in comprehending geometry. Being such, he always had a critical approach for using »formula«. He showed it in his approach to tangenta and its role in characterizing points in his »continuons curve«. His power in using geometrical intuition for mathematical ideas and to present mathematical attitudes in that aspects, represented him as a great mathematician.