Л. А. Бекларян
Центральный Экономико-Математический Институт РАН, Москва, Россия

Проблема эквивалентности сильного поточечного и интегрального принципов для систем с отклоняющимся аргументом: метрические инварианты и их эргодические свойствва[*]

Ключевые слова: принцип максимума, систем с отклоняющимся аргументом, метод локальных вариаций, метрические инварианты

1. Введение

Доклад посвящен особенностям задачи оптимального управления для систем с дифференциальными связями в виде функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. Изучается следующая задача оптимального управления.

Задача A. *Минимизировать функционал*

$$J = J(x(t_0), x(t_1)) \to \inf \tag{1}$$

при ограничениях:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(q_1(t)), \ldots, x(q_s(t)),\ u(q_1(t)), \ldots, u(q_s(t))\,),\ \ t \in [t_0, t_1], \tag{2}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t),\ \ t \in \mathbb{R}\backslash[t_0, t_1],\ \ \varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{3}$$

$$K(x(t_0), x(t_1)) = 0, \tag{4}$$

$$u(t) \in U,\ U \subseteq \mathbb{R}^m. \tag{5}$$

Здесь $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \to \mathbb{R}^n$– отображение класса $C^{(0)}$; $q_j(.), j = 1,\ldots,s$ – гомеоморфизмы прямой, сохраняющие ориентацию и удовлетворяющие

[*]Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант №06-01-00430-а) и программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-

условиям

$$\nu_j = \sup_{t\in\mathbb{R}} \ |t - q_j(t)| < +\infty, \qquad j = 1, ..., s.$$

В действительности, для задачи оптимального управления гомеоморфизмы $q_j,\ j = 1, \dots, s$ можно считать накрытиями окружности.

Для систем с отклоняющимся аргументом, в наиболее широком классе отклонений аргумента, на основе получен поточечный принцип максимума Понтрягина (слабый поточечный принцип максимума) [2]. В основе другого метода исследования необходимых условий оптимальности (сильного поточечного принципа максимума) лежит модификация метода v-вариаций [5],[6]. Препятствием к использованию v-вариации является неинвариантность рассматриваемого класса задач оптимального управления относительно таких вариаций. Нетривиальность пространства допустимых вариаций (относительно которых класс задач оптимального управления инвариантен) зависит от структуры группы гомеоморфизмов прямой, порожденной функциями отклонения аргумента. Для групп гомеоморфизмов прямой из "массивного" подмножества справедлив принцип максимума Понтрягина в сильной поточечной форме в виде два параметрического семейства конечномерных экстремальных задач (для задач без отклонения аргумента принцип максимума представлен один параметрическим семейством конечномерных экстремальных задач). Одним параметром, как и в случае без отклонения аргумента, является время t. Вторым параметром является k=0,1,2, ... Для группы гомеоморфизмов прямой

$$Q =< q_1, ..., q_s >$$

он характеризует элементы орбиты $Q(t)$ точки t, полученные с помощью слов длины не более чем k. Для некоторого класса функций отклонения аргумента (в частности, в случае отсутствия отклонения аргумента или цикличности группы, порожденной этими функциями отклонения аргумента) сильный поточечный принцип максимума эквивалентен принципу максимума в интегральной форме. В общем случае из принципа максимума в интегральной форме следует сильный поточечный принцип максимума. Проблемы, связанные с эквивалентностью сильного поточечного принципа максимума и принципа максимума в интегральной форме, будут обсуждены ниже.

Для задачи оптимального управления с дифференциальной связью в виде обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо известны многие замечательные свойства. Во первых, для обыкновенных дифференциальных уравнений, в силу теоремы существования решения, существует широкий (n-параметрический) класс траекторий, удовлетворяющих дифференциальной связи. Во вторых, в силу теоремы единственности решения и условию нетривиальности множителей Лагранжа, часто удается установить нетривиальность сопряженной переменной.

Для функционально-дифференциального уравнения (2), называемого функционально-дифференциальным уравнением точечного типа, эти вопросы требуют уточнений.

2. Особенности функционально-дифференциальных уравнений точечного типа

Рассматривается функционально-диференциальное уравнение точечного типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x(q_1(t), \dots, x(q_s(t))),\ t \in B_R \tag{6}$$

где $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – отображение класса $C^{(0)}$; $q_j(.)$, $\ j = 1, \dots, s$ – гомеоморфизмы прямой, сохраняющие ориентацию; B_R – замкнутый интервал $[t_0, t_1]$, замкнутая числовая полупрямая $[t_0, +\infty[$, или числовая прямая $\mathbb{R}$.

Рассматриваемое функционально-дифференциальное уравнение точечного типа при $q_j(t) \equiv t$, $\ j = 1, \dots, s$ – является обыкновенным дифференциальным уравнением, при $q_j(t) \le t$, $j = 1, \dots, s$ – уравнением с запаздываниями, при $q_j(t) \ge t$, $\ j = 1, \dots, s$ — уравнением с опережениями. Функции $[q_j(t) - t]$, $\ j = 1, \dots, s$ называются отклонениями аргумента.

Определение 1. *Абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$, определенная на $\mathbb{R}$, называется решением уравнения (6), если при почти всех $t \in B_R$ функция $x(.)$ удовлетворяет этому уравнению. Если при этом $x(.) \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\ k = 0, 1, 2, \dots,$ то такое решение называется решением класса $C^{(k)}$.*

Известно, что функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ) точечного типа не наследуют всех замечательных свойств обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [1],[3]. Простейшая модель, на которой можно наблюдать это отличие, имеет вид:

$$\dot{x}(t) = x(t), \qquad \dot{x}(t) = x(t-h), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad h \geq 0,$$

с соответствующими характеристическими уравнениями

$$k = 1, \qquad k = e^{-kh}.$$

Характеристическое уравнение для ОДУ имеет один корень, а характеристическое уравнение для ФДУ имеет счетное число решений. В первом случае гарантируется как существование решения, так и его единственность. Во втором случае решение существует, но нет единственности. Более того, ввиду счетного числа решений характеристического уравнения, можно конструировать решения со сколь угодно "плохими" свойствами. В частности, могут быть построены решения со скоростью роста более чем экспоненциальное. Заметим, что качественное отличие рассматриваемых двух уравнений сохраняется даже при сколь угодно малых $h > 0$, что не соответствует нашим интуитивным представлениям об объектах имеющих единое символическое представление. В действительности, ФДУ не наследуют многих замечательных свойств обыкновенных дифференциальных уравнений, например, свойство точечной полноты решений, n-параметричность решений и т.д. И последнее, решения ФДУ в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ не задают динамической системы, что сильно осложняет их исследование. Учитывая важность последнего, для уравнений запаздывающего типа Н.Н. Красовским было предложено изучать решения в функциональном расширенном фазовом пространстве

$$\mathbb{R} \times C([-h, 0], \mathbb{R}^n),$$

в котором решения уже задают динамическую систему. Недостаток такого подхода в том, что он применим только к системам запаздывающего типа и многие полученные результаты формулируются в терминах не исходного уравнения, а нового расширенного фазового пространства.

Для преодоления разрыва между свойствами решений ОДУ и ФДУ точечного типа был предложен метод, основанный на групповых особенностях таких уравнений [3], что позволило получить не улучшаемые условия, которые определяют способы регулярного расширения класса ОДУ в классе ФДУ точечного типа в смысле сохранения таких свойств решений ОДУ, как существование и единственность в заданном классе функций, непрерывная зависимость решения от начальных условий, точечная полнота решений, n-параметричность пространства решений, "гладкость" решения, свойство "грубости" уравнения и т.д. В рамках такого подхода решения ФДУ точечного типа ищутся в банаховом пространстве функций $x(\cdot)$ с весами

$$\mathcal{L}_{\mu}^{n}C^{(k)}(\mathbb{R}) = \left\{ x(\cdot) : \, x(\cdot) \in C^{(k)}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n}\right), \, \max_{0 \le r \le k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x^{(r)}(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^{n}} < +\infty \right\},$$

$\mu \in (0, +\infty)$, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{\mu}^{(k)} = \max_{0 \le r \le k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x^{(r)}(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^{n}}.$$

Отмеченные неулучшаемые условия формулируются в терминах правой части ФДУ и параметра μ (см. [3], глава 1, § 3).

Для простоты и наглядности формулировки основных результатов будем рассматривать случай постоянных соизмеримых отклонений аргумента.

Изучается основная начально-краевая задача

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t + n_1), \cdots, x(t + n_s)), \, t \in B_R, \, n_j \in \mathbb{Z}, \, j = 1, \ldots, s \tag{7}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \, t \in \mathbb{R} \backslash B_R, \, \varphi(.) \in L_{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{8}$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \, \bar{t} \in \mathbb{R}, \, \bar{x} \in \mathbb{R}^n, . \tag{9}$$

Множество B_R: либо конечный интервал $[t_0, t_1]$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$; либо полупрямая $[t_0, +\infty[$, $t_0 \in \mathbb{R}$; либо прямая $\mathbb{R}$.

Основная сложность изучения такой задачи в нелокальности начально краевых условий.

Для отображения $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times s} \longmapsto \mathbb{R}^n$ сформулируем систему условий:

(I) $g(.) \in C^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times s}, \mathbb{R}^n)$;

(II) для любых $t, \; z_j, \; \bar{z}_j, \; j = 1, \ldots, s$

$$\|g\left(t, z_1, \ldots, z_s\right)\|_{R^n} \le M_0(t) + M_1 \sum_{j=1}^{s} \|z_j\|_{\mathbb{R}^n}, \, M_0(.) \in C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$\| g\,(t, z_1, \ldots, z_s) - g\,(t, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_s)\,\|_{R^n} \leq M_2 \sum_{j=1}^{s} \|z_j - \bar{z}_j\|_{\mathbb{R}^n};$$

(III) существует $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ такое, что выражение

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} M_0(t+i)\,(\mu^*)^{|i|}$$

для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет конечное значение и как функция аргумента t непрерывна.

(IV) существует $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ такое, что семейство функций

$$\tilde{g}_{i,z_1,\ldots,z_s}(t) = g(t+i, z_1, \ldots, z_s)(\mu^*)^{|i|},\ i \in \mathbb{Z},\ z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{R}^{n \times s}$$

на любом конечном интервале равностепенно непрерывно.

В случае *конечного интервала определения* $B_R = [t_0, t_1]$, будем полагать, что функция $g(.)$ удовлетворяет условиям (I)—(II). Если B_R является *полупрямой*, или *прямой*, будем полагать, что $g(.)$ удовлетворяет условиям (I)—(IV).

Опишем весьма широкий класс функций $g(.)$, удовлетворяющих ограничениям (I)–(IV).

Замечание 1. *Пусть функция g имеет представление*

$$g(t, z_1, \ldots, z_s) = g_1(z_1, \ldots, z_s) + f(t),$$

в котором непрерывная функция $f(\cdot)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^n_{\mu^*}C^{(0)}(R)$, $\mu^* \in R_+$, а функция g_1 удовлетворяет условию Липшица. Тогда функция g будет удовлетворять условиям (I)–(IV). В частности, если отображение g является линейным по $x_1, \ldots, x_s$, то есть

$$g(t, z_1, \ldots, z_s) = \sum_{j=1}^{s} A_j z_j + f(t)$$

где A_j – постоянные $(n \times n)$ матрицы, а $f(\cdot)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^n_{\mu^*}C^{(0)}(R)$, $\mu^* \in R_+$, то $g(\cdot)$ будет удовлетворять условиям (I)–(IV).

Мы сформулировали условия, которым должна удовлетворять функция g, описывающая правую часть функционально-дифференциального уравнения точечного типа. Условия непрерывности, условия роста по фазовым переменным и переменной времени, а также условие Липшица (условия (I)–(II)) являются стандартными условиями в теории дифференциальных уравнений, в том числе и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В действительности, в (II) условие роста по фазовым переменным и переменной времени (первое неравенство) является следствием условия Липшица (второе неравенство). Вместе с тем мы отдельно выписали первое неравенство, чтобы для функции $M_0(.)$ сформулировать условие (III). Условие (III) для функции g связано с изучением решений на полупрямой и прямой, что требует определенных ограничений на рост правой части. Последнее условие (IV) необходимо в случае полупрямой или прямой, чтобы избежать дополнительные технические сложности.

Теорема 1. *Если для некоторого* $\mu \in]\,0,\mu^*[\cap]\,0,1[$ *выполняется неравенство*

$$M_2 \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|n_j|} < \ln \mu^{-1}, \tag{10}$$

то для любых фиксированных $\varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, *существует решение*

$$x(\cdot) \in \mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$$

основной начально-краевой задачи (7)-(9). *Такое решение является единственным.*

Другим важным аспектом теории ФДУ является проблема существования импульсных решений (кусочно абсолютно непрерывные решения).

Изучается начально-краевая задача

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t+n_1), \cdots, x(t+n_s)),\ t \in B_R,\ n_j \in \mathbb{Z},\ j = 1,\dots,s \tag{11}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t),\ t \in \mathbb{R}\backslash B_R,\ \varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n), \tag{12}$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x},\ \bar{t} \in \mathbb{R},\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

$$x(t_i+0) - x(t_i-0) = \varrho_i,\ t_i \in \mathbb{R},\ t_i < t_{i+1},\ \varrho_i \in \mathbb{R}^n,\ i \in \mathbb{Z} \tag{14}$$

в классе импульсных решений.

Множество B_R: либо конечный интервал $[t_0,t_1]$, t_0, $t_1 \in \mathbb{R}$; либо полупрямая $[t_0,+\infty[$, $t_0 \in \mathbb{R}$; либо прямая $\mathbb{R}$. Множество $\{t_i : i \in \mathbb{Z}\}$ является объединением конечного числа орбит группы сдвигов $Q =< t+n_1,\dots,t+n_s >$.

Для любого $\mu \in R_+$ определим банахово пространство (пространство функций с весами)

$$\mathcal{L}^n_\mu L_\infty(\mathbb{R}) = \{x(.) : \; x(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \; \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{v}rai \|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty\},$$

с нормой

$$\|x(.)\|_\mu = \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{v}rai \|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Теорема 2. *Если для некоторого $\mu \in]\,0, \mu^*[\bigcap]\,0, 1[$ выполняется неравенство*

$$M_2 \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|n_j|} < \ln \mu^{-1},$$

то для любых фиксированных $\varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\varrho_i \in \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{Z}$,

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} \|\varrho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|t_i|} < +\infty$$

существует решение (кусочно абсолютно непрерывное)

$$x(\cdot) \in \mathcal{L}^n_\mu L_\infty(\mathbb{R})$$

основной начально краевой задачи (18)-(21). *Такое решение является единственным.*

Если основная начально-краевая задача (7)-(9) определена на отрезке $[t_0,\, t_1]$, или полупрямой $[t_0,\, +\infty)$, то не нарушая общности можем считать, что выполнено условие $t_0 > \max_{j\in\{1,\dots,s\}} \; |n_j|$. При специальном начальном значении времени $\bar{t} = t_0$ неравенство (17) можно заменить на более слабое неравенство.

Теорема 3. *Если для некоторого $\mu \in]\,0, \mu^*[\bigcap]\,0, 1[$ выполняется неравенство*

$$M_2 \sum_{j=1}^{s} \mu^{-n_j} < \ln \mu^{-1}, \tag{15}$$

то для любых фиксированных $\varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, существует решение

$$x(.) \in \mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$$

основной начально-краевой задачи (7)-(9), *в которой $\bar{t} = t_0$. Такое решение является единственным.*

Очевидно, что для уравнения с запаздываниями ($n_j \leq 0$) неравенство (15) выполняется для всех μ меньших некоторого $\overline{\mu}$. Отсюда следует, что для уравнений с запаздываниями все решения мажорируются некоторой заданной экспонентой.

Приведем еще одну формулировку теоремы существования.

Теорема 4. *Если для некоторого* $\mu \in]\,0, \mu^*[\bigcap]\,0, 1[$ *выполняется неравенство*

$$M_2[\sum_{j=1}^{s} \mu^{-n_j}]\mu^{-|r|} < \ln \mu^{-1}, \tag{16}$$

то для любых фиксированных $\varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, *существует решение*

$$x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$$

основной начально-краевой задачи (7)-(9). *Такое решение является единственным.*

Из приведенных теорем следует, что для основной начально-краевой задачи (7)-(9), определенной на всей прямой $\mathbb{R}$, применима только теорема 1. В случае отрезка, или полупрямой могут быть использованы теоремы $1, 3, 4$. Причем, при начальном моменте $\bar{t} \in (-\infty,\, t_0]$ следует применить теорему 3, ибо неравенство (17) является наиболее слабым. В случае $\bar{t} \in [t_0,\, +\infty)$ следует применить одну из теорем 3 или 4.

Сформулируем теорему существования и единственности решения в случае произвольных гомеоморфизмов q_j, $j = 1, ..., s$. Для этого определим

$$\nu_j = \sup_{t \in \mathbb{R}} |t - q_j(t)|.$$

Теорема 5. *Если для некоторого* $\mu \in]\,0, \mu^*[\bigcap]\,0, 1[$ *выполняется неравенство*

$$M_2 \sum_{j=1}^{s} \mu^{-\nu_j} < \ln \mu^{-1}, \tag{17}$$

то для любых фиксированных $\varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, *существует решение*

$$x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$$

основной начально-краевой задачи (7)-(9). *Такое решение является единственным.*

Приведенные теоремы показывают, что между ОДУ и ФДУ точечного типа нет никакого разрыва, если искать решения в пространстве $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, для которого параметр μ удовлетворяет соответствующему неравенству из формулировки теоремы.

Учитывая важность импульсных решений в различных задачах, в частности, при изучении импульсных решений сопряженного уравнения для управляемых систем с дифференциальной связью в виде функционально-дифференциальных уравнений точечного типа, сформулируем результат относительно таких решений.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\dot{x}(t) = g(t, x(q_1(t)), \cdots, x(q_s(t))), \quad t \in B_R,\ n_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \ldots, s \tag{18}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R} \backslash B_R,\ \varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{19}$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x},\ \bar{t} \in \mathbb{R},\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{20}$$

$$x(t_i + 0) - x(t_i - 0) = \varrho_i,\ t_i \in \mathbb{R},\ t_i < t_{i+1},\ \varrho_i \in \mathbb{R}^n,\ i \in \mathbb{Z} \tag{21}$$

в классе импульсных решений.

Множество B_R: либо конечный интервал $[t_0, t_1]$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$; либо полупрямая $[t_0, +\infty[, t_0 \in \mathbb{R}$; либо прямая $\mathbb{R}$. Множество $\{t_i : i \in \mathbb{Z}\}$ дискретное.

Теорема 6. *Если для некоторого $\mu \in]\,0, \mu^*[\bigcap]\,0, 1[$ выполняется неравенство*

$$M_2 \sum_{j=1}^{s} \mu^{-\nu_j} < \ln \mu^{-1},$$

то для любых фиксированных $\varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \varrho_i \in \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{Z}$,

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\varrho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|t_i|} < +\infty$$

существует решение (кусочно абсолютно непрерывное)

$$x(.) \in \mathcal{L}_\mu^n L_\infty(\mathbb{R})$$

основной начально краевой задачи (18)-(21). *Такое решение является единственным.*

Другой важной задачей для ФДУ точечного типа является их классификация по сложности типа отклонений аргумента. В основе такой классификации лежит классификация конечно порожденных групп гомеоморфизмов $Q =< q_1, ..., q_s >$, задаваемые функциями отклонений аргумента $q_j(.),\ j = 1, ..., s$ [7].

3. Необходимые условия первого порядка

Для формулировки результатов определим векторное пространство

$$\mathcal{K}^r = \overline{\prod_{q\in Q}} R^r_q, \qquad R^r_q = \mathbb{R}^r, \quad q \in Q.$$

со стандартной топологией полного прямого произведения (метризуемое пространство). Пусть

$$\vec{x} = \{x_q\}_{q\in Q} \in K^n, \quad \vec{\psi} = \{\psi_q\}_{q\in Q} \in K^n, \quad \vec{u} = \{u_q\}_{q\in Q} \in K^m.$$

Для любых $t \in \mathbb{R}, \quad \vec{x}, \vec{\psi} \in K^n, \quad \vec{u} \in K^m$ положим:

$$f_q(t, \vec{x}, \vec{u}) = \dot{q}(t) f(q(t), x_{q_1 q}, ..., x_{q_s q}, u_{q_1 q}, ..., u_{q_s q}), \tag{22}$$

$$\varphi_q(t) = \varphi(q(t)), \tag{23}$$

$$H_q(t, \vec{x}, \vec{\psi}, \vec{u}) = \psi_q[f_q(t, \vec{x}, \vec{u})\chi_{[t_0,t_1]}(q(t)) + \varphi_q(t)\chi_{\mathbb{R}\setminus[t_0,t_1]}(q(t)). \tag{24}$$

Определим множества

$$\mathbb{U} = \{\vec{u} : \vec{u} = \{u_q\}_{q\in Q}; \quad \forall q \in Q, \quad u_q \in U\}, \tag{25}$$

$$\Omega = \{\vec{u}(.) : \vec{u}(t) \in U \text{ для почти всех } t \in [t_0, t_1]\}. \tag{26}$$

Пусть $Q^k,\ \ k = 0, 1, ...$ элементы группы Q длины не более чем k, то есть каждый элемент Q^k получается с помощью не более чем k суперпозиций образующих $q_j,\ j = 1, ..., s$ и их обратных элементов. По определению полагаем $Q^\infty = Q,\ Q^0 =< e >$. Для любого $k = 0, 1, ...$ определим множество элементов $\bar{Q}^k$ по следующему правилу

$$\bar{Q}^k = \bigcup_{j=1}^{s} q_j^{-1}(Q^k).$$

По множеству $\bar{Q}^k,\ k = 0, 1, ...$ и заданному управлению $u(.)$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ определим

$$\mathbb{U}^k(t, u(.)) = \{\vec{u} : \vec{u} \in \mathbb{U}, \quad \vec{u} = \{u_q\}_{q\in Q}; \quad \forall q \notin \bar{Q}^k, \quad u_q = u(q(t))\}.$$

Образуем k-частичную функцию Понтрягина

$$\mathbb{H}^k(t,\vec{x},\vec{\psi},\vec{u}) = \sum_{q\in\bar{Q}^k} H_q(t,\vec{x},\vec{\psi},\vec{u}) \tag{27}$$

и краевую функцию

$$\mathfrak{F}(x^0,x^1,l_J,l_K) = l_J J(x^0,x^1) + l_K K(x^0,x^1). \tag{28}$$

Принцип максимума. *Пусть группа Q является группой диффеоморфизмов $diff^2$ и принадлежит "некоторому массивному подмножеству"; функция f непрерывна и по первым $(ns+1)$ переменным непрерывно-дифференцируема; краевая функция $\varphi(.)$ непрерывно-дифференцируема. Если $(\hat{x}(.),\hat{u}(.))$ точка сильного локального минимума задачи A, то найдется функция $\hat{\psi}(.)$ абсолютно непрерывная на $(-\infty,t_0)\cup(t_0,t_1)\cup(t_1,+\infty)$, в точках t_0,t_1 имеющая разрывы первого рода; функционалы $l_J\in\mathbb{R}$, $l_J\geq 0$, $l_K\in(\mathbb{R}^p)'$ такие, что выполняются условия:*
для любых $k=0,1,...$ и почти всех $t\in\mathbb{R}$

$$\frac{\hat{x}_e(t)}{dt} = \frac{\partial\mathbb{H}^k(t,\vec{\hat{x}}(t),\vec{\hat{\psi}}(t),\vec{\hat{u}}(t))}{\partial\psi_e}, \tag{29}$$

$$\frac{\hat{\psi}_e(t)}{dt} = \frac{\partial\mathbb{H}^k(t,\vec{\hat{x}}(t),\vec{\hat{\psi}}(t),\vec{\hat{u}}(t))}{\partial x_e}, \tag{30}$$

$$\forall q,t,\quad q\in Q,\quad t\in\mathbb{R},\quad \hat{x}_q(t)=\hat{x}(q(t)),\quad \hat{\psi}_q(t)=\hat{\psi}(q(t)), \tag{31}$$

$$\forall q,\quad q\in Q, u\ t\in\mathbb{R},\quad \hat{u}_q(t)=\hat{u}(q(t)); \tag{32}$$

выполняются граничные условия

$$\frac{\partial\mathfrak{F}(.)}{\partial l_K} = 0, \tag{33}$$

$$\hat{\psi}(t_0) = \frac{\partial\mathfrak{F}(.)}{\partial x_0},\quad \hat{\psi}(t_1) = \frac{\partial\mathfrak{F}(.)}{\partial x_1}; \tag{34}$$

условие нормировки

$$l_J + \|\hat{\psi}\|_{L_\infty} + \|l_K\| > 0; \tag{35}$$

сильный поточечный принцип максимума

$$\mathbb{H}^k(t,\vec{\hat{x}}(t),\vec{\hat{\psi}}(t),\vec{\hat{u}}(t)) = \max_{\vec{u}\in\mathbb{U}^k(t,\hat{u}(.))} \mathbb{H}^k(t,\vec{\hat{x}}(t),\vec{\hat{\psi}}(t),\vec{u}). \tag{36}$$

Замечание 2. *В условии нормировки присутствует сопряженная переменная $\hat{\psi}$. Это свойственно исключительно для управляемых систем с дифференциальной связью, задаваемой функционально-дифференциальным уравнением. Для дифференциальных связей, задаваемых ФДУ запаздывающего типа или опережающего типа (очевидно, что ОДУ также относится к такому типу), в условии нормировки функция $\hat{\psi}$ отсутствует.*

Замечание 3. *Если для сопряженного уравнения* (30) *выполняются условия теоремы 6, то решение задачи Коши для сопряженного уравнения единственное. В силу этого свойства, в условии нормировки сопряженная переменная $\hat{\psi}$ отсутствует.*

В случае $k = 0$ условие (36) будем называть *слабым поточечным принципом максимума.* Такой принцип максимума для наиболее широкого класса функций отклонения аргумента получен в работе [2].

Определение 2. *Условие*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t))dt = \max_{\vec{u}(.)\in\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{u}(t))dt \qquad (37)$$

называется принципом максимума Понтрягина в интегральной форме.

Из принципа максимума в интегральной форме следует сильный поточечный принцип максимума. В связи с этим, актуальны следующие нерешенные проблемы:

(1) для каких групп гомеоморфизмов прямой, порожденных функциями отклонения аргумента, принципы максимума Понтрягина в интегральной и сильной поточечной форме эквивалентны?;

(2) для возможно широкого класса функций отклонения аргумента получить принцип максимума в интегральной форме.

В случае постоянных отклонений аргумента сильный поточечный принцип максимума и принцип максимума в интегральной форме эквивалентны.

Решение первой проблемы в случае произвольных отклонений аргумента связано с получением эргодических теорем типа теоремы Биркгофа-Хинчина для некоммутативных групп гомеоморфизмов прямой. Это приводит к изучению метрических инвариантов для таких групп и их эргодических свойств. На этом пути описаны инвариантные меры, проективно инвариантные меры, а также более общие метрические инварианты в виде ω-проективно инвариантных мер [4].

Гипотеза. *В ситуации "общего положения" сильный поточечный принцип максимума эквивалентен следующему принципу максимума в интегральной форме*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) H_e(t, \hat{\vec{x}}(t), \hat{\vec{\psi}}(t), \hat{\vec{u}}(t)) dt = \max_{\vec{u}(.)\in\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) H_e(t, \hat{\vec{x}}(t), \hat{\vec{\psi}}(t), \vec{u}(t)) dt, \rho(t) \geq 0. \tag{38}$$

Список литератури

[1] *J. Hale, M. Verduyn Lunel*, Introduction to Functional Differential Equations// Applied Mathematical Sciences (1993), 99, Springer-Verlag.

[2] *А.В. Арутюнов*, Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности// Итоги Науки и Техники. Серия матем. анализ. (1989), Т.27. С.147-235.

[3] *Л.А. Бекларян*, Введение в теорию функцинально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. – М.: Факториал Пресс, (2007). – 288 с.

[4] *Л.А. Бекларян*, Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Топологические характеристики и метрические инварианты // Успехи математических наук (2004), Т.59, № 4, С.3-68.

[5] *Л.А. Бекларян*, Вариационная задача с запаздывающим аргументом и ее связь с некоторой полугруппой отображений отрезка в себя//Докл.АН СССР.(1983), Т.271, № 5. С.1036-1040.

[6] *Л.А. Бекларян*, Задача оптимального управления для систем с отклоняющимся аргументом и ее связь с конечно-порожденной

группой гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, порожденной функциями отклонения//Доклады АН СССР (1991), Т.317, № 6, С.1289-1294.

[7] *L.A. Beklaryan*, About Canonical Tipes of the Differential Equations with Deviating Argument// J.Funcctional Differential Equations. (2001), № 1-2. P.25-33.