ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 13, 2000.
ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 13, 2000.
THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS
GLASNIK OF THE SECTION OF NATURAL SCIENCES, 13, 2000.

UDK 531.36

Ranislav M. Bulatović *

O APERIODIČNOJ STABILNOSTI DINAMIČKIH SISTEMA

Izvod

U ovom radu su izvedena dva kriterijuma koji sadrže potrebne i dovoljne uslove aperiodične stabilnosti linearnih autonomnih dinamičkih sistema. Prvi kriterijum uopštava raniji Merov-Kacov rezultat, a drugi je izražen preko uslova pozitivne semidefinitnosti simetrične matrice Henkelovog tipa čiji su elementi posredstvom Njutnovih formula vezani sa koeficijentima karakteristične jednačine sistema. Diskutuje se mogućnost aperiodične stabilnosti mehaničkih potencijalno disipativnih sistema sa singularnom matricom prigušenja.

ON APERIODIC STABILITY OF DYNAMICAL SYSTEMS

Abstract

Two criteria containing necessary and sufficient conditions of aperiodic stability of autonomous dynamical systems are derived. The first

*Prof. dr Ranislav Bulatović, Univerzitet Crne Gore, Mašinski fakultet, 81000 Podgorica

one is generalization of the previously given Merov-Kac result and the second one is given via conditions of the positive semidefinitness of the Hankel's type symmetric matrix whose elements, according to the Newton's formulae, are related to the coefficients of the characteristic equations of the system. Possibility of the aperiodical stabilization of the potentialy dissipative mechanical systems having singular damping matrix is discussed.

1. UVOD

Za autonomni linearni dinamički sistem kaže se da je aperiodično stabilan ako je on asimptotski stabilan i neoscilatoran. Drugim riječima, sistem će biti aperiodično stabilan ako poremećena kretanja nemaju oscilatorni karakter i iščezavaju kad vrijeme $t \to \infty$. Pošto prisustvo kompleksnih korijena u rješenju karakteristične jednačine uslovljava oscilatorni karakter komponenti poremećenog kretanja, ova definicija je u algebarskom prilazu ekvivalentna zahtjevu da svi korijeni karakteristične jednačine sistema budu realni i negativni. Prvi je, čini se, Merov (Izv. OTN ANSSSR, 1945) postavio kriterijum aperiodične stabilnosti izražen preko koeficijenata karakteristične jednačine, a koji je kasnije u radu Kaca [1] ponovo izveden, kao neophodan i dovoljan uslov, i zapisan u pogodnijem obliku. U ovom radu, u narednom odjeljku, pokazano je da je taj kriterijum samo dovoljan uslov, a zatim je, uključujući u analizu slučaj višestrukih korijena, uopšten tako da sadrži potrebne i dovoljne uslove aperiodične stabilnosti. U trećem odjeljku, primjenom Ermitovog (Hermite) metoda kvadratnih formi ustanovljen je alternativni kriterijum, a u četvrtom odjeljku diskutuje se pitanje aperiodične stabilnosti mehaničkih sistema sa potencijalnim i disipativnim silama.

2. KOREKCIJA I UOPŠTENJE MEROV-KACOVOG KRITERIJUMA

Neka je

$$\Delta(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{1}$$

karakteristična jednačina nekog linearnog dinamičkog sistema. Pretpostavlja se da su koeficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi i da je $\Delta(\lambda)$

standardni polinom $(a_0, a_n \neq 0)$. Uočimo polinom

$$\begin{aligned} F(z) &= \Delta(z^2) + z\Delta'(z^2) \\ &= a_0 z^{2n} + n a_0 z^{2n-1} + a_1 z^{2n-2} + (n-1) a_1 z^{2n-3} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \end{aligned} \tag{2}$$

Prema Kacu [1], svi korijeni karakteristične jednačine (1) su realni i negativni ako i samo ako je $F(z)$ Hurvicov (Hurwitz) polinom (tj., svi njegovi korijeni imaju negativne realne djelove), što se poklapa sa ranijim rezultatom Merova (v. [1]). Za $F(z)$ kad su svi koeficijenti jednačine (1) pozitivni, Huricovi uslovi su, kao što je pokazano u [1], ekvivalentni uslovima:

$$D_i > 0, \quad i = 1, \ldots, 2n-2 \tag{3}$$

gdje su D_i glavni dijagonalni minori $(2n-2) \times (2n-2)$ matrice

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 4a_4 & \ldots & 0 \\ na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & (n-3)a_3 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

tj., prema [1], uslovi (3)su potrebni i dovoljni za aperiodičnu stabilnost sistema sa karakterističnom jednačinom (1). Matrica D formira se na sledeći način. Najprije se formiraju prve dvije vrste. Treća i četvrta vrsta se dobija pomjeranjem prve i druge vrste za jedno mjesto udesno; peta i šesta - za dva mjesta udesno itd., a na upražnjena mjesta stavljaju se nule.

Sledeći primjer pokazuje da sistem može biti aperiodično stabilan a da nijesu zadovoljeni prethodni uslovi.

Primjer 1. Za sistem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

karakteristična jednačina je

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$

a njeni korijeni $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ i, dakle, sistem je aperiodično stabilan. S druge strane, za ovaj sistem polinom (2) je

$$F(z) = z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 4z + 4,$$

a njegovi korijeni su $z_{1,2} = -1 \pm i$, $z_{3,4} = \pm 2i$, $i = \sqrt{-1}$, pa prema tome $F(z)$ nije Hurvicov polinom.

Veza izmedju uslova (3) i prirode korijena karakteristične jednačine (1) može se rastumačiti pomoću rezultata izloženih u [2] (glava XVI, ξ 14).

Neka su $h(u)$ i $g(u)$ polinomi m-tog stepena, ili prvi m-tog a drugi (m-1)-og stepena, sa najstarijim koeficijentima istog znaka. Polinomi $h(u)$ i $g(u)$ čine *pozitivni par* ako su njihovi korijeni $u_1, \ldots, u_m$ i $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m$ $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_{m-1})$ različiti, realni, negativni i medjusobno se smjenjuju tako da je $\tilde{u}_1 < u_1 < \tilde{u}_2 < u_2 < \ldots < \tilde{u}_m < u_m < 0$ $(u_1 < \tilde{u}_1 < u_2 < \tilde{u}_2 < \ldots < \tilde{u}_{m-1} < u_m < 0)$.

Lema 1 [2]. *Da bi*

$$f(z) = h(z^2) + zg(z^2)$$

bio Hurvicov polinom potrebno je i dovoljno da $h(u)$ *i* $g(u)$ *obrazuju pozitivni par polinoma.*

Na osnovu leme 1, uzimajući da je $h(u) = \Delta(u)$ i $g(u) = \Delta'(u)$, lako je pokazati da su (3) potrebni i dovoljni uslovi da svi korijeni karakteristične jednačine (1) budu realni, negativni i *različiti*. Dakle, ovi uslovi su dovoljni (ali ne i potrebni) za aperiodičnu stabilnost sistema. Dalje će biti pokazano da se pomoću leme 1 može ustanoviti rezultat koji obuhvata i slučaj višestrukih korijena. Najprije dokažimo sledeće tvrdjenje.

Teorema 1. *Da bi svi korijeni karakteristične jednačine (1) bili realni i negativni potrebno je i dovoljno da svi korijeni polinoma (2) leže u zatvorenoj lijevoj poluravni kompleksne promjenljive z.*

Dokaz. Neophodnost. Pretpostavimo da jednačina (1) ima n-m prostih negativnih korijena i k negativnih korijena $\lambda_1^* < 0, \ldots, \lambda_k^* < 0$, respektivno, višestrukosti $n_1 \geq 2, \ldots, n_k \geq 2, n_1 + \ldots n_k = m$. Tada se polinom $\Delta(\lambda)$ može napisati u obliku

$$\Delta(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j^*)^{n_j} h_1(\lambda), \tag{5}$$

gdje je $h_1(\lambda)$ polinom stepena n-m čiji su svi korijeni različiti. Iz (5) slijedi da je

$$\Delta'(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j^*)^{n_j - 1} g(\lambda), \quad (' = \frac{d}{d\lambda}) \tag{6}$$

gdje je

$$g(\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda - \lambda_j^*)h_1'(\lambda) + \sum_{s=1}^{k} n_s \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{k} (\lambda - \lambda_j^*)h_1(\lambda) \tag{7}$$

Uočimo polinom

$$h(\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda - \lambda_j^*)h_1(\lambda) \tag{8}$$

Jasno je da je polinom (8) stepena n-m+k i da su svi njegovi korijeni λ_i različiti, realni i negativni; označimo ih tako da bude $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-m+k}$. Pošto je

$$h'(\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda - \lambda_j^*)h_1'(\lambda) + \sum_{s=1}^{k} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{k} (\lambda - \lambda_j^*)h_1(\lambda), \tag{9}$$

biće

$$h'(\lambda_i) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{k}(\lambda - \lambda_j^*)h_1'(\lambda_i), & \lambda_i \notin \{\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*\} \\ \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} (\lambda - \lambda_j^*)h_1(\lambda_i), & \lambda_i \in \{\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*\} \end{cases} \tag{10}$$

S druge strane, na osnovu (7), je

$$g(\lambda_i) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{k}(\lambda - \lambda_j^*)h_1'(\lambda_i), & \lambda_i \notin \{\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*\} \\ n_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} (\lambda - \lambda_j^*)h_1(\lambda_i), & \lambda_i \in \{\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*\} \end{cases} \tag{11}$$

Iz (9) i (10) slijedi da je sgn$[g(\lambda_i)]$=sgn$[h'(\lambda_i)]$ za $\forall i \in \{1, \ldots, n-m+k\}$ pa je

$$g(\lambda_i) \cdot g(\lambda_{i+1}) < 0, \quad i = 1, \ldots, n - m + k - 1 \tag{12}$$

Dakle, u svakom intervalu $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ polinom $g(\lambda)$ ima korijen $\tilde{\lambda}_i$, tj. biće

$$\lambda_1 < \tilde{\lambda}_1 < \lambda_2 < \ldots < \tilde{\lambda}_{n-k} < \lambda_{n-k+1} < 0 \tag{13}$$

Ovim smo pokazali da polinomi (8) i (9) čine pozitivni par, pa je, u skladu sa lemom 1, $h(z^2) + zg(z^2)$ Hurvicov polinom. Pošto je, s druge strane,

$$\begin{aligned} F(z) &= \Delta(z^2) + z\Delta'(z^2) \\ &= \prod_{j=1}^{k} (z^2 - \lambda_j^*)^{n_j - 1} (h(z^2) + zg(z^2)), \end{aligned} \tag{14}$$

to, očigledno, polinom (14) ima 2(n-m+k) korijen sa negativnim realnim djelovima i 2k imaginarnih korijena $\pm i\sqrt{-\lambda_j^*}$ višestrukosti $n_j - 1, j = 1, \ldots, k$.

Dovoljnost. Neka polinom (2) ima sve korijene sa nepozitivnim realnim djelovima. Pretostvimo, radi odredjenosti, da su $\pm i\Omega_1, \ldots,$ $\pm i\Omega_k$ imaginarni korijeni višestrukosti $n_1 \geq 1, \ldots, n_k \geq 1$, respektivno, a da ostali korijeni polinoma $F(z)$ imaju negativne realne djelove. Tada se (2) može napisati u obliku

$$F(z) = \prod_{j=1}^{k} (z^2 + \Omega_j^2)^{n_j} \varphi(z), \tag{15}$$

gdje je $\varphi(z)$ Hurvicov polinom stepena 2(n-m), $m = n_1 + \ldots + n_k$, koji se može predstaviti na sledeći način

$$\varphi(z) = \hat{h}(z^2) + z\hat{g}(z^2) \tag{16}$$

Iz leme 1, ako se ona primijeni na (16), slijedi da su svi korijeni polinoma $\hat{h}(u)$ realni i negativni, a kako je, na osnovu (2), (15) i (16),

$$\Delta(z^2) = \prod_{j=1}^{k} (z^2 + \Omega_j^2)^{n_j} \hat{h}(z^2), \tag{17}$$

to će i svi korijeni polinoma $\Delta(\lambda)$ biti negativni. □

Posledica: I kriterijum aperiodične stabilnosti. *Za aperiodičnu stabilnost sistema sa karakterističnom jednačinom (1) potrebno je i dovoljno da budu ispunjeni sledeći uslovi:*

$$a_n > 0, D_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, 2n - 2, \tag{18}$$

Dokaz. Potrebni i dovoljni uslovi za to da polinom (2) ima sve korijene sa nepozitivnim realnim djelovima jesu da svi glavni dijagonalni minori odgovarajuće Hurvicove matrice budu nenegativni [3]. Ovi uslovi, pokazuje se analogno kao u [1], ekvivalentni su uslovima (18). □

Primjer 2. Za sistem čija je karakteristična jednačina

$$\lambda^4 + 5\lambda^3 + 9\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0 \tag{19}$$

matrica (4) je

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 18 & 21 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 15 & 18 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 18 & 21 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 18 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 18 & 21 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 15 & 18 & 7 \end{pmatrix}$$

a njeni glavni dijagonalni minori su $D_1 = 5, D_2 = 3, D_3 = 24, D_4 = D_5 = D_6 = 0$. Prema tome, ispunjeni su uslovi (18) i dati sistem je aperiodično stabilan. U ovom slučaju, lako je izračunati da je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ i $\lambda_4 = -2$, što potvrdjuje prethodni zaključak.

3. PRIMJENA ERMITOVOG METODA

Pandan kriterijumu formulisanom u prethodnom odjeljku može se ustanoviti primjenom metoda kvadratnih formi. Osnove ovog metoda vezuju se za ime čuvenog francuskog matematičara Ermita koji je sredinom prošlog vijeka (dakle, znatno prije radova Rausa (Routh) i Hurvica) ukazao na tijesnu vezu izmedju prirode korijena algebarskih jednačina i signatura odgovarajućih kvadratnih formi (v. [2], glava XVI). Uočimo kvadratnu formu

$$S = (x, Px), \quad x \in R^n \tag{20}$$

sa Henkelovom matricom

$$P = \begin{pmatrix} n & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_n \\ p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & \cdots & p_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{n-1} & p_n & p_{n+1} & p_{n+2} & \cdots & p_{2n-2} \end{pmatrix} \tag{21}$$

čiji su elementi p_j $(j = 1, 2, \ldots, 2n-2)$ vezani sa koeficijentima karakteristične jednačine (1) posredstvom sledećih rekurentnih obrazaca:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 p_k + a_1 p_{k-1} + \ldots + a_{k-1} p_1 + k a_k = 0, \ k \le n \\ a_0 p_k + a_1 p_{k-1} + \ldots + a_n p_{k-n} = 0, \ k = n+1, \ldots, 2n-2 \end{array}\right\} \tag{22}$$

Naprimjer, iz (22) slijedi

$$p_1 = -\frac{a_1}{a_0}, p_2 = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_0}, p_3 = -\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3 + 3\frac{a_1 a_2}{a_0^2} - 3\frac{a_3}{a_0}, \ldots$$

Označimo sa P_i glavne dijagonalne minore matrice (21).

Teorema 2: II kriterijum aperiodične stabilnosti. *Da bi sistem sa karakterističnom jednačinom (1) bio aperiodično stabilan potrebno je i dovoljno da su svi njeni koeficijenti pozitivni i da budu ispunjeni sledeći uslovi:*

$$p_2 > 0, p_4 > 0, \ldots, p_{2n-2} > 0; \quad P_2 \geq 0, P_3 \geq 0, \ldots, P_n \geq 0. \tag{23}$$

Dokaz. Koeficijenti kvadratne forme (20) odredjeni obrascima (22) predstavljaju Njutnove sume korijena karakterističnog pilinoma $\Delta(\lambda)$ [4], tj.

$$p_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \tag{24}$$

U skladu sa jednim rezultatom iz [2] (teorema 6, glava XVI), broj različitih korijena polinoma $\Delta(\lambda)$ jednak je rangu, a broj različitih realnih korijena - signaturi forme (20). Odavde slijedi da će svi korijeni biti realni ako i samo ako je (20) pozitivno semidefinitna forma. Kvadratna forma je pozitivno semidefinitna ako i samo ako su svi dijagonalni elementi i svi glavni dijagonalni minori matrice te forme nenegativni. Medjutim, u ovdje razmatranom slučaju, kada su svi korijeni jednačine (1) realni, budući da je $\Delta(0) = a_n \neq 0$, na osnovu (24) je $p_{2j} > 0$, $j = 1, \ldots, n-1$. Ostaje da se primijeti da će jednačina (1) bez kompleksnih korijena imati n negativnih korijena ako i samo ako su svi njeni koeficijenti pozitivni. □

Napomena 1. *Ako je* $P_n = \det P \neq 0$, *uslovi (23) mogu se zamijeniti sa uslovima* $P_2 > 0, P_3 > 0, \ldots, P_n > 0$, *i tada su svi korijeni karakteristične jednačine (1) realni negativni i različiti.*

Kriterijum, sadržan u teoremi 2, ilustrujmo na primjeru 2 iz prethodnog odjeljka. Na osnovu (19), (21) i (22), nalazimo

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 & -11 \\ -5 & 7 & -11 & 19 \\ 7 & -11 & 19 & -35 \\ -11 & 19 & -35 & 67 \end{pmatrix}$$

Dijagonalni elementi ove matrice su pozitivni, a njeni glavni dijagonalni minori su $P_2 = 3, P_3 = 0, P_4 = 0$, tj. ispunjeni su uslovi aperiodične stabilnosti (23).

4. APERIODIČNA STABILNOST MEHANIČKIH POTENCIJALNO-DISIPATIVNIH SISTEMA

Razmotrimo linearni autonomni mehanički sistem sa konačnim brojem stepena slobode opisan vektorsko-matričnom diferencijalnom jednačinom

$$A\ddot{q} + \beta\tilde{B}\dot{q} + \tilde{C}q = 0, \ q \in R^m \tag{25}$$

gdje je A inercijska matrica, a $\beta\tilde{B}$ i $\tilde{C}$ su matrice prigušenja i krutosti; pozitivni skalarni parametar β karakterie intezitet disipativnih sila. Pretpostavlja se da su A i $\tilde{C}$ simetrične i pozitivno definitne matrice (> 0), dok je $\tilde{B}$, u opštem slučaju, simetrična i pozitivno semidefinitna (≥ 0). Uobičajeno je da se pomoću linearne zamjene koordinata $x = A^{1/2}q, A^{1/2}$ - pozitivno definitni kvadratni korijen matrice A, sistem (25) transformiše na prostiji oblik

$$\ddot{x} + \beta B\dot{x} + Cx = 0 \tag{26}$$

od koga će se polaziti u daljim razmatranjima, a gdje je $B = A^{-1/2}\tilde{B}A^{-1/2}$ i $C = A^{-1/2}\tilde{C}A^{-1/2}$. Karakteristčna jednačina sistema (26) je

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda^2 I + \lambda\beta B + C) = 0 \tag{27}$$

na koju, pošto se prethodno napiše u razvijenom polinomijalnom obliku, mogu biti primijenjeni kriterijumi iz odjeljaka 2 i 3. Medjutim, sa gledišta praktične primjene, pogodniji su kriterijumi izraženi direktno preko matrica B i C jer se pomoću njih lakše može vršiti analiza uticaja pojedinih fizičkih parametara (npr., karakteristika prigušnica) na aperiodičnu stabilnost sistema. Na primjer, kad je $BC = CB$ (klasično prigušenje) lako je pokazati da je sistem (26) aperiodično stabilan ako i samo ako je

$$\beta^2 B^2 - 4C \geq 0 \tag{28}$$

Kriterijum (28) pokazuje da je aperiodična stabilnost ove klase sistema, isto kao i asimptotska stabilnost, moguća *samo* kad je disipacija potpuna ($B > 0$). Naime, opšte je poznato da je klasično prigušen sistem (26) asimptotski stabilan ako i samo ako je $B > 0$, a takodje, samo tada je moguće naći pozitivan broj β^* tako da je za $\beta \geq \beta^*$ zadovoljen uslov (28), tj. intezivne disipativne sile pretvaraju asimptotsku u aperiodičnu stabilnost. Za sisteme sa opštim ($BC \neq CB$) i potpunim prigušenjem postoji nekoliko kriterijuma koji sadrže dovoljne uslove aperiodične stabilnosti. Tako, na primjer, klasični uslov velikog prigušenja [5]

$$\beta^2(By, y)^2 > 4(y, y)(Cy, y) \text{ za } \forall y \in R^n/\{0\} \tag{29}$$

implicira aperiodičnu stabilnost. Drugi kriterijumi, lakši za provjeru, ustanovljeni su u radovima [6], [7], [8]. S druge strane, za razliku od klasičnog, u slučaju opšteg prigušenja moguća je asimptotska stabilnost i kad je disipacija nepotpuna ($\det B = 0$). Za to je potrebno i dovoljno da nijedan modalni vektor odgovarajućeg konzervativnog sistema ne leži u nultom podprostoru matrice prigušenja B. Interesantno je pitanje: Može li asimptotski stabilan sistem sa nepotpunim prigušenjem biti aperiodično stabilan?

Naredna analiza pokazuje da je za m=2 (dva stepena slobode) odgovor na prethodno pitanje negativan. Zaista, u tom slučaju, ne umanjujući opštost razmatranja, može se uzeti da je

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

pri čemu koeficijenti krutosti zadovoljavaju uslove:

$$c_1 > 0, c_1c_2 - c_3^2 > 0, \; c_3 \neq 0 \tag{31}$$

Karakteristična jednačina sistema (26), (30) je

$$\lambda^4 + \beta\lambda^3 + (c_1 + c_2)\lambda^2 + \beta c_2\lambda + c_1c_2 - c_3^2 = 0, \tag{32}$$

a svi njeni korijeni pod uslovima (31) imaju negativne realne djelove. S druge strane, funkcija $\beta(\lambda)$, odredjena jednačinom (32), ima sledeće osobine: $\beta(\lambda) > 0$ i $\beta''(\lambda) > 0$ za $\lambda < 0, \beta \to \infty$ kad $\lambda \to -0$ i $\beta \to \infty$ kad $\lambda \to -\infty$. Dakle, za svaki pozitivan broj β jednačina (32) ima najviše dva realna korijena pa asimptotski stabilan sistem sa dva stepena slobode i nepotpunim prigušenjem ne može biti aperiodično stabilan.

Literatura

[1] Кац А. М., К вопросу о критерии апериодической устойчивости // ПММ, Т. 15, 1951, с. 120 - 121.

[2] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц. Москва, 1988.

[3] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости. Москва, 1998.

[4] Korn G. A., Korn T. M., Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. New York, 1961.

[5] Duffin R. J., A Minimax Theory for Overdamped Networks // J. Rat. Mech. Anal., Vol. 4, 1955, p. 221-233.

[6] Barkwell L., Lancaster P., Overdamped and Gyroscopic Vibrating Systems // ASME J. Appl. Mech., Vol. 59, 1992, p. 176-181.

[7] Bhaskar A., Criticality of Damping in Multi-Degree-of-Freedom Systems // ASME J. Appl. Mech., Vol. 64, 1997, p. 387-393.

[8] Bulatović R. M., On the Heavily Damped Response in Viscously Damped Dynamics Systems , submitted for publication.

[9] Moran T. J., A Simple Alternative to the Routh-Hurwitz Criterion for Symmetric Systems // ASME J. Appl. Mech., Vol. 37, 1970, p. 1168-1170.