ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 10, 1994.
ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 10, 1994.
THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS
GLASNIK OF THE SECTION OF NATURAL SCIENCES, 10, 1994.

UDK 519.168

*Slobodan Dajović**

O MATEMATIČKIM METODAMA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA
ON MATHEMATICAL METHODS OF THE OPTIMAL CONTROL

Abstract

We consider in this paper the optimal control problem with differential constraints in Lagrange multiplier form by Pontryagin's maximum principle. We also consider the discrete optimal control problem with phase constraints by Milyutin-Dubovitskii's Theorem on interesection of convex cones.

1. Teorija optimalnog upravljanja je zasnovana na elementima klasičnih metoda rešavanja ekstermalnih problema i metoda varijacionog računa, ali takođe na njihovim uopštenjima koja su doprinela stvaranju savremene teorije ekstremalnih problema, koja je sredinom ovog veka formirana kao rezultat rešavanja problema upravljanja različitim letećim objektima i tehnološkim procesima složenije strukture.

Ako je $x^* \in X \subset R^n$ vektor za koji data funkcija $f(x) \in C^{(1)}(X)$ u otvorenoj oblasti $X \subset R^n$ dostiže ekstremum (u daljem izlaganju ograničićemo se na minimum), tada mora biti zadovoljen uslov stacionarnosti

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

odnosno

$$\nabla f(x^*) = 0, \tag{1.1'}$$

čime se polazni problem određivanja minimuma funkcije (fx) svodi na problem određivanja skupa njenih stacionarnih tačaka, za koje važi uslov

$$\nabla f(x) = 0, \tag{1.2}$$

Osnovni ekstremalni problem

$$f(x) \to \min, \quad x \in X \subset R^n, \tag{1.3}$$

u različitim primenama je prvo uopšten problemima tipa

* Prof. dr Slobodan Dajović, Prirodno-matematički fakultet, Beograd.

$$f(x) \to \min,\ g_i(x) = 0,\ x \in X \subset R^n,\ n = 1, \dots, m, \tag{1.4}$$

odnosno ekstremalnim problemima sa tzv. uslovnim ekstremumom, koji su rešavani metodom Lagranžovih multiplikatora, odnosno određivanjem stacionarnih tačaka funkcije

$$\begin{aligned} &F(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \langle\lambda, g(x)\rangle, \\ &\lambda_0 \geqslant 0,\ \lambda \in R^m,\ \lambda_0 + \|\lambda\| = 1, \end{aligned} \tag{1.5}$$

a zatim i problemima tipa

$$\langle c,x\rangle \to \min,\quad Ax = B,\quad x \geqslant 0 \tag{1.6}$$

koji je vrlo blizak linearnoj varijanti modela (1.4), mada se metoda Lagranžovih multiplikatora ne može koristiti za probleme linearnog programiranja (LP), jer je za probleme (1.4) oblast X otvoren skup, a za probleme (1.6) $X = \{x \in R^n : x \geqslant 0\}$ je zatvoren skup.

S obzirom na važnost primene problema LP (linearnog programiranja), počev od radova L. A. Kantorovića razrađivane su nove metode za rešavanje problema tipa (1.6), među kojima i Danzigova simpleks-metoda za numeričko rešavanje problema (1.6). Za metode LP vezana je i teorija dualnosti, u kojoj posebno mesto ima teorema o razdvajanju konveksnih skupova.

Korišćenje metoda konveksne analize omogućilo je rešavanje problema konveksnog programiranja

$$f(x) \to \min,\ g_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \dots, m,\ x \in X \subset R^n, \tag{1.7}$$

gde su f(x) i $g_i(x)$ konveksne funkcije, preko Kuhn-Tackerove teoreme, koja utvrđuje da za svako rešenje, problema (1.7) odgovarajuća Lagranžova funkcija dostiže minimum.

Osnovni problem klasičnog varijacionog računa

$$\left.\begin{aligned} &J(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)\ y(x'))\cdot dx \to \min, \\ &y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1, \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

gde je $y(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1]$, a $f(x,y,y')$ neprekidna skalarna funkcija s neprekidnim izvodima po svim argumentima zaključno sa izvodima trećeg reda, jeste tzv. Lagranžov problem sa fiksiranim krajevima, i predstavlja uopštenje polaznog ekstremalnog problema (1.3) ako se stavi da je $X = C^{(1)}[x_0,x_1]$, a minimizacija funkcije f(x), $x \in X \subset R^n$, zameni minimizacijom funkcionala $J(y(x))$, $y(x) \in$

$C^{(1)}[x_0,x_1]$.

Metoda varijacije pomoću koje se rešava problem (1.8) analogna je metodi ispitivanja diferencijala problema (1.3); pomoću ove metode dobijeni su osnovni rezultati u vidu neophodnih i dovoljnih uslova za ekstremum funkcionala (1.8).

Slično kao i u prethodnim problemima sa uslovnim ekstremumom (1.4), i za osnovni varijacioni problem se mogu uvesti dopunska ograničenja, što dovodi do tzv. izoperimetrijskog problema.

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))\, dx \to \min, \quad \int_{x_0}^{x_1} g(x,y(x), y'(x)\, dx = 0,$$
$$y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1, \tag{1.9}$$

gde je $g \in R^m$, a uslov stacionarnosti izražava se preko Ojlerove jednačine za odgovarajuću Lagranžovu funkciju

$$F(x,y,y', \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f\,(x,y,y') + < \lambda, g(x,y,y') >. \tag{1.10}$$

Treba napomenuti da je osnovni problem varijacionog računa, tj. problem minimizacije funkcionala (1.8), ekvivalentan problemu minimizacije tzv. Bolcovog funkcionala

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y(x), y'(x))\, dx + \Phi\,(y(x_0), y(x_1)\,) \to \min, \tag{1.11}$$

sa ograničenjima $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.

2. Neka je u faznom prostoru R^n kretanje fazne tačke (objekta upravljanja) dato u vidu diferencijalnog ograničenja

$$x = F(x,u,t), \tag{2.1}$$

gde je $u \in R^m$ vektor parametra upravljanja, $x \in R^n$ vektor faznog stanja, a $f = (f_1, \ldots, f_n)$ data vektorska funkcija.

Dopustivim upravljanjem nazivaćemo deo po deo neprekidnu funkciju

$$u(t) \in U\,(t) \subset R^m, \quad t \in [t_0,T], \tag{2.2}$$

koja na odsečku $[t_0,T]$ ima najviše konačno mnogo prekida prve vrste, neprekidna je zdesna u tačkama prekida i neprekidna sleva u tački T.

Pored klase deo po deo neprekidnih funkcija, često se razmatra u tzv. problemima optimalnog upravljanja i šira klasa dopustivih upravljanja — klasa svih ograničenih merljivih upravljanja koja zadovoljava ograničenja oblika (2.2).

Rešenje sistema (2.1) koje odgovara nekom dopustivom zadatom upravljanju $u(t) \in U\,(t)$ i početnom faznom stanju $x_0 \in R^n$ naziva se faznom trajektorijom objekta upravljanja definisanog relacijama (2.1) i (2.2) i predstavlja rešenja Košijevog problema

$$x(t) = f(x(t), u\,(t), t), \quad t \in [t_0,T], \; x(t_0) = x_0. \tag{2.3}$$

Napomena. S obzirom na pretpostavku da je funkcija $u(t)$ deo po deo neprekidna, tj. da može imati najviše konačno mnogo prekida prve vrste, pretpostavimo da su prekidi u tačkama $t_1, \ldots, t_k$, $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < T$. Ako se pretpostavi da postoji rešenje Košijevog problema (2.3) na odsečku $[t_0,t_1]$, gde je $x(t_1) = x_1$, razmatraćemo Košijev problem

$$x = f(x(t), u(t), t), \; x(t_1) = x_1$$

i, ako pri tom pretpostavimo da postoji rešenje na odsečku $[t_1,t_2]$ i da je $x(t_2) = x_2$, dolazimo do Košijevog problema.

$$x(t) = f(x(t), u(t),t), \quad x(t_2) = x_2.$$

Produžavanjem ovog postupka na svim podintervalima na kojima je data funkcija u(t) neprekidna, zaključno sa podintervalom $[t_k,T]$, dobili bismo rešenje Košijevog problema (2.3) na celom odsečku $[t_0,T]$ u obliku neprekidne funcije

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau. \tag{2.4}$$

U monografiji [4] je dat dokaz sledeće teoreme:

Teorema 1. Ako je vektorska funkcija f definisana i neprekidna po svim argumentima u oblastima $R^n \times R^m \times [t_0,T]$ i zadovoljava Lipšicov uslov

$$\|f(x,u,t) - f(x',u,t)\| \leq M\|x-x\|,$$
$$x,x' \in R^n, \quad u \in R^m, \quad t \in [t_0,T], \tag{2.5}$$

tada za svako početno fazno stanje $x_0 \in R^n$ i svako dopustivo upravljanje u(t) Košijev problem (2.3) ima jedinstveno rešenje (2.4) na celom odsečku $[t_0, T]$.

U odnosu na klasične varijacione probleme, u kojima se traži neka dovoljno glatka funkcija y(x) za koju zadati funkcional dostiže minimalnu vrednost, u problemima optimalnog upravljanja se pojavljuju dve komponente, x(t) i u(t), a njihov naziv (trajektorija i upravljanje) vezan je za rešavanje prvih problema teorije optimalnog upravljanja koji su, svakako, uticali i na činjenicu da se kao klasa dopustivih funkcija uzima skup deo po deo neprekidnih funkcija.

Osim ograničenja (2.2) koja se odnose na dopustiva upravljanja, mogu se razmatrati i ograničenja na fazne koordinate

$$x(t) \in X(t), \quad t \in [t_0,T], \tag{2.6}$$

kao i granični uslovi na krajevima trajektorija

$$x(t_0) \in S_0(t_0), \quad x(T) \in S(T), \quad t_0 \in \Theta_0, \quad T \in \Theta_T \tag{2.7}$$

gde

$$S_0(t_0), \; S(T) \subset R^n, \; \Theta_0, \Theta_T \subset R, \quad t_0 < T.$$

U slučaju fiksiranih t_0 i T imali bismo jednočlane skupove Θ_0 i Θ_T i tzv. problem sa fiksiranim vremenom. Ukoliko je $S_0(t) = \{x_0\}$, reč je o problemu sa fiksiranim levim krajem, odnosno sa fiksiranim krajevima ako je i $S(T) = \{x(T)\} = \{x_T\}$. U slučaju da je $S_0(t_0) = R^n$, $S(T) = R^n$, imamo problem upravljanja sa slobodnim krajevima, odnosno u ostalim slučajevima problem sa pokretnim krajevima.

U problemima upravljanja definisanim relacijama (2.1), (2.2) za trajektorije i upravljanja uz ograničenja (2.6), (2.7), treba odrediti upravljanje u(t) koje će minimizirati funkcional

$$\int_{t_0}^{T} f_0(x(t)u(t),t)dt + \Phi(x(T),T), \tag{2.8}$$

što predstavlja tzv. Bolcov problem optimalnog upravljanja, koji se naziva Lagranžovim problemom optimalnog upravljanja u slučaju kada funkcional (2.8) sadrži samo integralni, odnosno Majerovim problemom ako sadrži samo terminalni deo funkcionala $\Phi(x(T),T)$. Razmotrimo problem optimalnog upravljanja

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t),$$
$$x(t_0) \in S_0, \quad x(T) \in S, \quad u(t) \in U. \quad t \in [t_0,T], \tag{*}$$

sa graničnim uslovima

$$S_0 = \{x \in R^n: g_i(x) = 0, \quad i = 1,\dots, \tau\},$$
$$S = \{x \in R^n: h_j(x) = 0, j = 1, ,\dots, k\}, \tag{**}$$

sa fiksiranim vremenom i sa funkcionalom

$$\int_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt + \Phi\,(x(T)) \rightarrow \min. \tag{***}$$

Uvedimo tzv. Hamiltonovu funkciju

$$H(x,u,t,\Psi_0,\Psi) = \sum_{i=0}^{n} \Psi_i f_i(x,u,t) \tag{2.9}$$

gde je Ψ_0 = const $\Psi(t) = (\Psi_1(t),\dots, \Psi_n(t))$. Tada se pomoću Hamiltonove funkcije (2.9) može napisati sistem jednačina za fazne promenljive

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \Psi}$$

odnosno sistem za konjugovane promenljive u odnosu na upravljanje u(t) i trajektoriju x(t)

$$\dot{\Psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{2.10}$$

to jest

$$\Psi_i(t) = -\Psi_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t),u(t),t) - \sum_{j=1}^{n} \Psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x_1} f_j(x(t),$$
$$u(t),t), \quad i = 1,\dots, n$$

Na osnovu Teoreme 1 može se zaključiti da sistem (2.10) ima na celom odsečku $[t_0,T]$ jedinstveno, neprekidno rešenje $\Psi(t)$, pod proizvoljno datim početnim uslovima.

3. Sledeća teorema koja, kao i sve slične teoreme koje se zasnivaju na tzv. uslovu maksimuma odgovarajuće Hamiltonove funkcije, predstavlja tzv. Pontrjaginov princip maksimuma, daje neophodan uslov optimalnosti za problem optimalnog upravljanja definisan relacijama (*), (**) (***).

Teorema 2. Pretpostavimo da su funkcije $f_0, f_1, \ldots, f_n, \Phi, g_1, \ldots, g, h_1, \ldots, h_k$ neprekidne i neprekidno diferencijabilne po svim promenljivim $x_1, \ldots, x_n$, a neprekidne po promenljivim $u_1, \ldots, u_m$, gde $x \in R^n$, $u \in U \subset R^m$, $t \in [t_0,T]$. Neophodan uslov optimalnosti procesa $(u(t), x(t))$, $t \in [t_0,T]$, definisanog relacijama (*), (**), (***). jeste egzistencija rešenja Ψ konjugovanog sistema (2.10) koje odgovara procesu $(u(t),x(t))$, i konstante $\Psi_0 \leqslant 0$, $(|\Psi_0| + \|\Psi(t)\| \neq 0$, $t \in [t_0,T]$), tako da važe sledeći uslovi:

1^0 uslov maksimuma, tj. za svako $t \in [t_0,T]$

$$H(x(t),u(t),t,\Psi_0,\Psi(t)) = \max_{u \in U} H(x(t),u,t,\Psi_0, \Psi(t)); \tag{3.1}$$

2^0 uslov transverzalnosti na levom kraju, tj. postoje takvi skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_\tau$ da je

$$\Psi(t_0) = \sum_{i=1}^{i} \alpha_i g_i(x(t_0)), \tag{3.2}$$

3^0 uslov transverzalnosti na desnom kraju, tj. postoje takvi skalari $\beta_1, \ldots, \beta_k$ da je

$$\Psi(T) - \Psi_0 \Phi(x(T)) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j h_j(x(T)). \tag{3.3}$$

Ova teorema se može dokazati za slučaj tzv. igličastih varijacija upravljanja (impulsa) oblika

$$u_\varepsilon(\tau) = \begin{cases} u - u(\tau), & t \leqslant \tau < t + \varepsilon, \\ 0, & \tau \in [t_0,T] \setminus [t, t+\varepsilon], \end{cases}$$

gde je $u(t)$ optimalno, a $u \in U$ proizvoljno dopustivo upravljanje.

4. Sa razvojem metoda optimalnog upravljanja u kojima je korišćen princip maksimuma pojavila se potreba za zasnivanjem neke opštije teorije za rešavanje ekstremalnih problema jer su, zahvaljujući intenzivnom razvoju funkcionalne analize, mnogi varijacioni problemi poprimili apstraktniji oblik. U radu [6] Dubovicki i Miljutin su formulisali jednu opštu metodu za razmatranje ekstremalnih problema, koja je korišćena za dobijanje novih rezultata u teoriji optimalnog upravljanja, posebno kad je reč o optimalnim problemima sa faznim ograničenjima. Pomoću konveksnih konusa koji aproksimiraju date skupove (pomoću kojih se definišu fazna ograničenja) i odgovarajućih konjugovanih konusa dobijeni su opšti uslovi minimuma, nazvani Ojlerove jednačine, odakle je izveden princip maksimuma. Zahvaljujući ovom rezultatu, Boltjanski je dokazao da je princip maksimuma neophodan uslov optimalnosti za

diskretni problem optimalnog upravljanja sa pokretnim krajevima i sa faznim ograničenjima.

U konačnodimenzionoj varijanti metode Dubovickog — Miljutina u slučaju problema određivanja uslovnog ekstremuma

$$f(x) \to \min, \quad g(x) = 0,$$

$$x \in R^n, \quad f(x), g(x) \in C^{(1)}, \quad \nabla f(x) \neq 0, \quad \nabla g(x) \neq 0,$$

pretpostavimo da je x_0 rešenje datog ekstremalnog problema. Vektor $\tau \in R^n$ predstavlja zabranjenu varijaciju ako je

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \to = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{d}{d\varepsilon} f(x_0 + \varepsilon\tau) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \cdot \tau < 0, \qquad \text{(I)}$$

odnosno predstavlja dopustivu varijaciju u odnosu na ograničenje $g(x) = 0$ ako je

$$\frac{\partial g(x_0)}{\partial \tau} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{d}{d\varepsilon} g(x_0 + \varepsilon\tau) = \frac{\partial g(x_0)}{\partial x} \tau = 0, \qquad \text{(II)}$$

S obzirom da su skupovi zabranjenih varijacija i dopustivih varijacija u tački x_0 konveksni, pomoću teoreme o razdvajanju konveksnih skupova izražene preko koeficijenata linearne forme koja predstavlja hiperravan koja razdvaja date skupove, može se pokazati da skupovi (I) i (II) nemaju zajedničkih tačaka; ova dva skupa se mogu razdvojiti ako i samo ako je

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \frac{\partial g(x_0)}{\partial x}$$

što se posredstvom Lagranžove funkcije može napisati u obliku

$$F(x, \lambda) = f(x) - \lambda\, g(x),$$

što znači da je uslov minimuma sveden na uslov disjunktivnosti konveksnih skupova.

5. Neka su sada u Banahovom prostoru zadati funkcional $\Phi(w)$, konačan broj ograničenja tipa jednakosti i ograničenja tipa nejednakosti. Svako ograničenje tipa nejednakosti jeste skup koji predstavlja zatvaranje nekog otvorenog skupa u prostoru B, a ograničenja tipa jednakosti predstavljaju zatvorene podskupove prostora B, bez unutrašnjih tačaka u odnosu na prostor B. Ako je w^* tačka minimuma funkcionala $\Phi(w)$, tada se određuju skup zabranjenih varijacija Ω_0 elemenata w^*, skup varijacija dopustivih po i-tom ograničenju tipa nejednakosti Ω_i i skup varijacija dopustivih po ograničenju tipa jednakosti Ω. Ako se pretpostavi da su svi skupovi Ω_0, Ω_i, Ω neprazni, tada je Ω zatvoren konus, a Ω_0, Ω_i su otvoreni konusi sa centrom u koordinatnom početku.

Iz definicije konusa sledi da konus Ω_0 predstavlja aproksimaciju skupa $\{w: \Phi(w) < \Phi(w^*)\}$ u okolini tačke w^*, konus Ω_i u okolini tačke w^* aproksimira skup elemenata dopustivih po i-tom ograničenju tipa nejednakosti, a konus aproksimira skup elemenata tipa jednakosti u okolini tačke w^*.

Prvi neophodan uslov minimuma u metodi Dubovickog-Miljutina je zasnovan na činjenici da je presek svih konusa Ω_0, Ω, Ω_i $i = 1, \ldots, n$, prazan skup, a drugi neophodan uslov je izražen preko konjugovanih konusa. Označimo sa Ω^+, Ω_i^+ konuse konjugovane sa konusima Ω (zatvoreni konveksni konusi) i Ω_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ (otvoreni konveksni konusi). Ako je w^* tačka minimuma funkcionala $\Phi(w)$, tada postoje takvi funkcionali $w_i \in \Omega_i^+$, $i = 0,1, \ldots, n$, $w \in \Omega^+$ (od kojih je bar jedan različit od nule) da važi tzv. Ojlerova jednačina

$$w_0 + w_1 + \ldots + w_n + w = 0,$$

kojom se izražava drugi neophodan i dovoljan uslov da presek konveksnih skupova Ω, Ω_i, $i = 0,1, \ldots, n$, bude prazan skup, odakle sledi teorema o razdvajanju konveksnih skupova [7].

Ovaj rezultat je omogućio Boltjanskom [5] da dokaže da je princip maksimuma neophodan uslov optimalnosti za diskretni problem optimalnog upravljanja sa faznim ograničenjima u smislu minimuma odgovarajućeg zbirnog funkcionala u kome treba odrediti dopustivo upravljanje $u(0), u(1), \ldots, u(N-1)$ i odgovarajuće trajektorije $x(0), x(1), \ldots, x(N)$ tako da budu zadovoljeni uslovi:

1^0 promene faznih stanja

$$x(t+1) = f_t(x(t), u(t)), \quad x(t) \in R^n, \quad t = 0,1, \ldots, N-1;$$

2^0 ograničenja za dopustiva upravljanja

$$u(t) \in U_t \subset R^m, \quad t = 0,1, \ldots, N-1;$$

3^0 fazna ograničenja

$$x(0) \in M_0, \quad x(1) \in M_1, \ldots, \quad x(N) \in M_n, \quad M_i \subset R^n;$$

4^0 $$J = \sum_{t=0}^{N-1} f_t(x(t), u(t)) \rightarrow \min.$$

Takođe se može dokazati da se navedeni diskretni problem optimalnog upravljanja sa faznim ograničenjima može svesti na problem matematičkog programiranja.

U vrlo širokoj lepezi raznovrsnih ekstremalnih problema sa ograničenjima, navedeni problemi u kojima se kao neophodan uslov optimalnosti koristi princip maksimuma, sačinjavaju vrlo značajnu klasu, kako zbog mogućnosti primene u različitim dinamičkim sistemima tako i zbog činjenice da predstavlja uopštenje klasičnih varijacionih problema.

LITERATURA

1. L. S. Pontrjagin, V. G., Boltjanski, R. V., Gamkrelidze, E. F. Miščenko, *Matematičeskaja teorija optimaljnih procesov*, Nauka, Moskva 1983.
2. V. M. Tihomirov, *Vypuklij analiz.* Sovrem. problemy matematiki. Fundamentaljnie napravlenija, T14, Moskva 1987.
3. R. Gabasov, F. M. Kirilova, *Metody optimaljnogo upravlenija.* Sovrem, problemy matematiki, t. 6. Moskva 1976.
4. V. M. Alekseev, V. M. Tihomirov, S. V. Fomin, *Optimaljnoe upravlenie.* Nauka, Moskva 1979.
5. V. G. Boltjanski, *Metod šatrov v teorii ekstremaljnih zadač.* Uspehi matemat. nauk. T. XXX, 3 (183), 1975.
6. A. I. Dubovicki, A. A. Miljutin, *Zadači na ekstremum pri naličii ograničenii.* ŽVM MF, T. 5, № 3 (1965).
7. V. G. Boltjanski, *Teorema o peresečenii množestv.* Izv. Arm. AN, Matematika, T. 7, № 5 (1972).
8. J. Céa, *Optimisation — Théorie et algorithmes.* Dunod, Paris 1971.
9. L. C. Young, *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory.* Sunders, Philadelhpia, 1969.