Ернест Стипанић

ЕМПИРИЈСКИ РЕАЛИЗАМ И МАТЕМАТИЧКИ РАЦИОНАЛИЗАМ У ПРОУЧАВАЊУ ФЕНОМЕНА СТВАРНОСТИ

1. - Питања која су битно онтолошко-гносеолошког и општеметодолошког значаја за математику, а тиме и за теорију спознаје у области математике и примјену ове спознаје у проучавању феномена стварности, јесу, наприм]ер, сљедећа:

Каква је природа математичких модела, односно појмова и теорија који се разматрају у математици? У којем степену их човјек слободно конструише, а у којем су наметнути споља у човјековом судару са феноменима стварности, и како сазнајемо њихове особине? У каквом међусобном односу стоје емпиријска и рационална истина, када је ријеч о математичком моделовању феномена стварности? Другим ријечима, какви су одговори на питања која имплицира вјечита онтолошко-гносеолошка тема „a priori-a posteriori"? Колико је егзистенција математичких модела, као апстрактних мисаоних творевина, различита и независна од егзистенције конкретних предмета, односа и појава стварности и колико су они условљени човјековим опажањима и проучавањима феномена стварности? Другим ријечима, какви су одговори на питања која имплицира друга онтолошко-гносеолошка тема, а наиме, „апстрактно-конкретно"? У чему је узрок спознајне моћи математичких модела, када се употријебе као средства истраживања у свијету природних феномена? Како објаснити да математички модели, уколико су апстрактнији, по правилу, стичу све већу спознајну моћ, као инструменти којима се служимо у проучавању феномена стварности? Како се данас остварује јединство емпиријског реализма и математичког рационализма у проучавању цјелокупне природе за које је, може се сликовито рећи, карактеристична, у дијалектичком смислу, девиза „ratio cum natura"? Садржина одговора на постављена питања уграђују се научно и филозофски у свијест савременог истраживача природе, друштва и мишљења, којем је математика неопходна у тим истраживањима. Ти одговори битно одређују његов однос између емпиријског реализма и математичког рационализма.

Математички модели при површном посматрању могу изгледати да су неке вјештачке и произвољне творевине неког људског априорног духа или неке априорне имагинације, без везе са општом друштвеном праксом. Такве идеалистичке представе о њима, а није мали број математичара и истраживача корисника математичких модела који су склони да их тако онтолошко и гносеолошки третирају и на тој основои уграђују у свој поглед на свијет, могу се формирати у условима када упознавање са њима произлази само на основу њихових коначних и формализованих формулација, а заборављају се њихова генеза и њихов развитак. Међутим, ако им се приђе са позиција њихове стварне генезе и њихове историјске и научне еволуције, које су битно условљене општом друштвеном праксом и захтјевима унутрашње изградње математике као науке, а ови веома често представљају индиректно испољавање потреба и захтјева опште друштвене праксе, онда се ситуација битно мијења у нашим представама тих модела; открива се њихов реалан и дубок смисао као природних средстава спознаје стварности, а њихове коначне и формализоване формулације као круна њиховог развитка, јер они настају из сталног сударања човјека са стварношћу, без којег би остали скривени у човјеку само као могућност, попут оне Његошеве искре, да се метафорично изразимо, која би „у кам очајала" да је „удар" тамо није нашао.

Зато је у математици, као и у свакој другој науци, од битног значаја разматрати „садашње" у вези са „прошлим", јер се „садашње" развило из „прошлог", а исто тако „будуће" ће се развити из „садашњег". Проучавање „прошлог" у свакој науци, па и у математици, претвара се у средство којим се појми „садашње" и предвиђа „будуће" и тако се осмишљава развитак сваког математичког модела као историјски процес у спознаји феномена стварности. Откривање континуитета еволуције скоковитим, дијалектичким прелазима „прошлог" и „садашње" и овог у „будућег" пут је научне спознаје сваког развитка и основа за одговор на питања шта је и како се мијењало у одређеним етапама развитка оно чији развитак разматрамо.

Такав би морао бити научни и уопште филозофски, тачније онтолошшки и гносеолошки, прилаз одговорима на напријед постављена питања која се тичу математичких модела. То је пут да се разоткрије њихова дијалектичка и материјалистичка суштина и да се омогући одређивање односа између емпиријског реализма и математичког рационализма, када је математика средство којим се проучавају феномени стварности.

2. - Савремени токови математике одређени су њеним претходним токовима, са непрекидном појавом нових идеја и метода. Неограничена је, у начелу, област примјена математике, јер се готово сви облици кретања материје могу проучавати математички. Но, ипак су различити улога и значај математичких идеја и метода у тим проучавањима, имајући увијек у виду да математичка схема не исцрпљује све конкретности реалних појава на којем се примјењује. Процес спознаје конкретног у појавама одвија се непрекидно у борби двију основних тенденција. Наиме, у истицању форми изучаваних појава и у математичко-логичкој анализи тих форми, као и у откривању момената који се не уклапају у већ установљене форме, затим у прелажењу на разматрање нових форми које су математичко-логички гипкије и које боље обухватају проучаване појаве.

Ход данашње математике у теоријама и примјенама, одвија се у непрекидној борби наведених тенденција. Ми се можемо запитати: На основу којих је критеријума вршена периодизација историјског развитка математике? Руковођени критеријумима заснованим, углавном, на хронолошким начелима, разни историчари математике, и сами математичари, извршили су различите периодизације у развитку математике. Један од највећих математичара нашег доба, математичар Андреја Николајевич Колмогоров извршио је периодизацију развитка математике, скоро прије педесет година, давши један општи синтетички поглед на развитак математике и одредивши његове основне етапе. Он се у својој периодизацији развитка математике руководио методолошким принципом који у генези и развитку математичких идеја и метода као најбитнији факт узима прелаз од апстракције *нижег* ка апстракцији *вишег* степена. Тај принцип за гносеолошку подлогу има *дијалектичко* схватање развитка као прелаз од простијег ка сложенијем, од нижег ка вишем, па се Колмогоровљева периодизација развитка математике може схватити као *дијалектичка* периодизација. Овдје се јасно види како се математичка мисао у свом развоју креће спиралним путем сазнања од конкретно и појединачног ка апстрактном и општем, и обратно, при чему се посебно уочава дијалектичка релативност појмова „конкретно" и „апстрактно", „појединачно" и „уопште". На примјер, појмови реалан број, комплексан број, вектор и рјешење хомогеног система линеарних једначина, иако међусобно *различити*, сједињује појам *линеарног простора*, као апстракција вишег степена, него што су сваки од датих. Он у њиховој *различитости* истиче односно фиксира њихову *идентичност*. У томе се, управо, састоји смисао исказа да су наведени појмови *дијалектички* генералисани и сједињени у појму линеарног простора.

Аналогним путевима развијају се, генералишу и синтетизују и други појмови математике, па и читаве математичке теорије у данашњој математици. Зато се сходно томе говори да су генерализације појмова у математици типични примјери *дијалектичких* генерализација. Откривати то у процесима развитка математичких појмова и затим их свјесно у том смислу усвајати значи спознати њихову дијалектичку садржину и дијалектички овладати њима као средствима спознаје и као средствима примјене у мијењању стварности. То је један од сасвим природних путева којим се *данашња математика* уграђује као један од основних конститутивних елемената научног и филозофског погледа на свијет, као и његовог стварног сазнања. Ту се веома јасно манифестује јединство емпиријског реализма и математичког рационализма.

3. - Претходно смо истакли један од основних методолошких принципа на основу којег посматрамо ток развитка математике, па у том смислу и ток развитка *данашње математике*, који нас води ка принципијелном одговору на питање: куда иде данашња математика.

Развитак данашње математике покреће се мисаоним и методолшким захватима великих математичара, математичких школа и центара. Они математичким теоријама и примјенама утичу на *општу друштвену праксу*, мијењајући је револуционарно, а ова обратно утиче на сам ток развитка данашње математике.

Поменути мисаони и методолошки захвати очитују се како у данашњој математици као цјелини тако и у појединим њеним областима: у алгебри, логици, геометрији, топологији, теорији функција, теорији бројева, функционалној анализи, диференцијалним једначинама, теорији вјероватноће, математичкој статистици и рачунској математици. У свим овим областима стиче се јасан увид у *ход данашње математике,* у међусобни однос јединства и прожимања *емпиријског реализма* и *математичког рационализма* као средства у проучавању феномена стварности.

Појављују се и развијају нове области, гдје се помјерају основне силе математичара, као што су: теорија алгоритама, теорија информације, теорија игара, операционо истраживање, а поготово кибернетика. Настаје и развија се *дискретна* или *коначна математика* у вези са основним задацима теорије управљачких система. Ту је веома важна улога комбинаторне анализе, теорије графова и теорије кодирања.

Са проблемима најбољег управљања физичких или механичких система, заснивају се математичке теорије оптималног управљања, које су блиске питањима управљања у конфликтним ситуацијама. Настаје и развија се теорија диференцијаланих игара. Истраживања у проблемима управљања и у областима математике које су повезане на њима заједно са рачунском техником дају основу за аутоматизацију нових сфера људске дјелатности.

Навели смо непосредно низ математичких области, веома значајних за путеве развитка *данашње математике*. У овоме што даље слиједи покушаћемо да кроз те области, односно њихове токове савременог развитка, научно за шири круг заинтересованих освијетлимо стазе којима се креће *данашња математика.*

4. - Једна од највећих области математике је алгебра, упоредо са аритметиком и геометријом. Данашња алгебра сматра се као наука о операцијама над ма којим математичким објектима. Она је раздио математике који формира опште појмове и методе за сву математику и у том стилу дјелује на читав *ход данашње математике*, на математички рационализам у односу на емпиријски реализам у проучавању феномена стварности. За њу је карактеристично да се у центру њеног занимања налазе својства операција, као што су, на примјер, асоцијативност, комутативност, дистрибутивност и друга својства операција.

Та својства над математичким објектима у разним ситуацијама некада су потпуно различита, а некада једнака, без обзира на различите објекте. Кад апстрахујемо природу објеката и утврдимо одређена својства операција над објектима, долазимо до појма *скупа*, коме је наметнута *алгебарска структура*, тј. долазимо до *алгебарског система*. Потребе развитка данашње математике као науке дале су низ алгебарских система, као што су *група*, *прстен*, *поље*, *линеарни простор* и други алгебарски системи.

Никола Бурбаки у свом чланку *Архитектура математике*, објашњавајући појам структуре, подвлачи да се у математичко-огичкој изградњи полази од основних ставова или *аксиома* и да се на бази тога изводи теорија структура, односно теореме које се односе на структуру. На тај се начин изграђује *аксиоматска теорија* структуре. Подвлачи *хијерархију структура* и баца суштинске погледе на формалистички карактер стаза *хода данашње математике*.

Истраживање сложених алгебарских система, њихових својстава на основу *општих* појмова, један је од основних предмета савремене алгебре. Осим тога, она изучава примјену алгебарских метода на друге раздјеле математике, на примјер, на топологију, функционалну анализу, теорију бројева, алгебарску геометрију, рачунску математику, теоријску физику, кристалографију и на друге раздјеле или појединачне дјелове.

Раздио математичке логике који изучава исказе јесте *алгебра логике*. Њено заснивање представља покушај рјешавања традиционалних логичких задатака алгебарским методама. Развитак теорије скупова и математичке логике значајно је измијенио предмет *алгебре логике*. Он се суштински састоји у изучавању исказа, а истинитост или лажност добијених сложених исказа зависи од истинитости и лажности полазних исказа и одговарајућег третирања веза као операција над исказима. Тако се савремена алгебра нашла и у сфери рјешавања проблема мишљења, испреплела се са логиком и у том смислу карактеристична је за токове данашње математике.

Раздио математике који изучава алгебарске многострукости је *алгебарска геометрија*. Ове многострукости су скупови тачака мјерног простора, чије су координате рјешења полиномског система једначина. Она се данас јавља као једна од најинтензивнијих развијајућих раздјела математике. Њене методе огромно утичу на раздјеле данашње математике, сусједне с алгебарском геометријом, као на теорију функција многих комплексних промјенљивих и на теорију бројева, а исто тако на раздјеле математике, далеке од алгебарске геометрије, као на парцијалне диференцијалне једначине, алгебарску топологију, теорију група и друге.

Савремена апстрактна алгебра у тијесној је вези са математичком логиком. У питањима која се односе на проблеме у теорији алгоритама постигнути су многи значајни резултати који управо стоје на граници апстрактне алгебре и математичке логике. Зато и на тај начин данашњи токови развитка алгебре доприносе трасирању савременог *хода* цијелокупне математике.

Логика која се развија математичким методама јесте математичка логика. Она је битно карактеристична за данашњу математику. За њу је особито значајно коришћење формалних језика са веома тачном синтаксом и јасном семантиком, као и једнозначно дефинисаним поимањем формула. У вези са необичном разрадом основа математике истакла се потреба за таквом логиком, нарочито настајањем теорије скупова са откривеним антиномијама у тој теорији, затим потребом прецизирања појма алгоритма, као и другим дубоким и принципијелним питањима математике као науке. Но, треба нагласити, да се значај математичке логике за науку у цијелини не исцрпљује у њеним математичким примјенама, она долази до изражаја у свим наукама. Зато се математичка логика може с правом окарактерисати као логика не само савремене математике него и науке уопште.

Узимајући у обзир методолошке поступке, говори се о *дедуктивној* логици, која иде од општих ка појединачним ставовима, и *индуктивној* логици, која иде од појединачних ка општим ставовима. Свака од њих игра одређену улогу у савременој логици. За рјешење проблема у савременој логици примјењује се метода *формализације* доказа. Ту долази до пуног изражаја систем формализованих аксиома и формалних правила извођења. Свугдје долазе до пуног израза добро познати закони, као што су закон искључења трећег, закон конјункције и дисјункције, закон импликације и други закони.

Математичка логика је посебно утицала на начин расуђивања у многим данашњим наукама. Њен је битан допринос развитку *логике науке.*

За *логику науке* може се рећи да је у посебном смислу дисциплина која примјењује појмове и технички апарат савремене логике у анализи система научних знања. Она се често употребљава као ознака развитка науке, тј. као логика научног развитка, затим као ознака правила и процеса научног истраживања, другим ријечима - као логика истраживања и као учење о психолошким и методолошким претпоставкама научних открића, односно као логика научних открића.

Основни круг проблема *логике науке* обухвата: изучавање логичке структуре научних теорија: изучавање формализованих језика науке истраживања различитих облика дедуктивних и индуктивних извођења, који се примјењују у природним, техничким и социјалним наукама; анализа формалних структура фундаменталних и производних научних појмова и одредаба; разматрање и усавршавање логичких процедура и операција, као и разрада логичких критеријума и њихове проналазачке ефективности; истраживање логичко-гносеолошког и логичко-методолошког садржаја редукције научних теорија, процеса апстракције, објашњења, предвиђања, екстраполације и томе слично, у свим сферама научне дјелатности.

У посљедење вријеме *логика науке* доживљава преломни развитак, нарочито ако се узме у обзир распрострањеност идеја и метода логичких анализа у областима социјалних наука. Зато је за даљи развитак логике науке неопходно појачано истраживање у области симобличке логике и њене примјене у области истраживања и рјешавања проблема којима се бави *логика науке.* Тако се данашња математика јасно уклапа у развитак *логике науке.*

5. - Потребно је указати на три савремена правца који карактеришу токове проучавања основа математике и, тако рећи, владају њеном филозофијом, наиме на: *логицизам*, *формализам* и *интуиционизам.*

Правац чија се основна теза javља у тврђењу о сводљивости математике на логику јесте логицизам. Глави представници тог правца су Г. Фреге и Б. Расел.

У тежњи да се ослободе очигледности и интуиције у изградњи математике, једноставно речено, тврдили су: да се основни појмови аритметике могу помоћу дефиниција свести на логичке појмове као што су „не” „и” „или” „је”, „сваки”, „извјестан”, „ако... тада”; да се аксиоме аритметике могу извести из логичких ставова који се граде помоћу наведених појмова. Створена је посебна симболика, којом је постигнута максимална формализација математичких ставова и њихових доказа, тако да је сваки став постао једна конфигурација одређеног система симбола.

Овдје се можемо одмах запитати: ко ће одлучити о томе да ли смо установљена правила тачно примијенили у операцијама са симболима? Да ли је коначна конфигурација система симбола баш она на коју смо жељели да сведемо почетну конфигурацију? Одговор на ова питања не може се замислити без одређене улоге очигледности интуиције, уколико их схватимо као облике нашег непосредног контакта са системом математичко-логичких симбола. Тако се кроз мала врата, како је духовито на једном мјесту примијетио математичар и филозоф F. Gonseth, очигледност и интуиција појављују управо онда када смо мислили да смо се њих ослободили. Зато „криза очигледности и интуиције", коју су прогласили логицисти и други разни формалисти, није криза која доводи у сумњу принципијелну вриједност очигледности и интуиције у процесу откривања истине у математици, већ је то криза њихове *једностране* примјене у наведеном процесу, условљене, у крајњој линији, стањем развитка математике. Дакле, ни максимално формализован ситем аритметичких, односно математичких истина не може се ослободити од позивања на очигледност и интуицију.

Формализам је такође један од основних праваца у проучавању основа математике. Као главни задатак у том проучавању сматра да је доказ *непротивурјечитости* математичких теорија, а у крајњем циљу и математике у цјелини. Тај задатак постао је актуелан послије открића антиномија теорије скупова, која је у основи великог дијела данашње математике. Формалистички програм школе Давида Хилберта истакао је идеју *формализације* логичко-математичких теорија, а то значи њихово представљање у облику *неинтерпретирајућих рачуна*, односно формалних система. Њихова неприврјечност мора бити затим установљена средствима неке садржајне теорије, коју је Хилберт назвао *метаматематиком* односно теоријом доказа.

Даља апсолутизација идеје формализације довела је до формалистичке концепције, која је стално подвргнута гносеолошким критикама. Она се састоји у томе, што сматра да предложена теорија ништа не означава сама по себи, да нема никаквог смисла и да је свака научна теорија само „игра са знацима", а њена ваљаност да се обезбјеђује формалним доказом непротиврјечитости. Однос између стварних и идеалних поставки у свим школама које изучавају основе математике прави разлику међу њима, нарочито када је у питању улога идеалних поставки. То не постоји код већине конкретних математичара, који ступњевима апстракције и идеализације долазе до одређених резултата у проучавањима појава и објеката.

Хилбертов формализам полази од хипотезе могућности пуне и непротирјечиве формализације цјелокупне класичне математике. Међутим, теорема K. Gödela о непотпуности аксиоматске аритметике често се третира као оповргавање формализма, односно наведене

Хилбертове хипотезе. Многи знаменити математичари тежили су изналажењу конструктивних средстава, која би допустила метатеоретске доказе разних дјелова формалне математике и која ревидирају формализам, не у цјелини, већ Хилбертову концепцију која се односи на метатеоретска инстраживања метода доказа.

Хилбертов формализам разматра неинтерпретирана израчунавања сама по себи, тј. независно од питања њихове интерпретације или могућности да се интерпретирају. У сазнању могућности формалног разматрања логике и логичко-математичких израчунавања, Хилбертова школа постигла је веома значајне резултате који се односе на спознају технике нашег мишљења. Развила је апарат који је чврсто ушао у арсенал математичке логике и широко се примјењује од свих математичара и логичара.

Теорија о математичкој интуицији добила је свој пун израз у *интуиционизму* као математичком правцу који у интуицији види основу математике и формалне логике. Настао је у вези са познатим антиномијама теорије скупова и као реакција на правце формализма и логицизма. Најистакнутији представници интуиционизма су математичари L.J. Brouwer, A. Heatinig i H. Weyl.

По Брауеру, математика као наука слободна је од логичких претпоставки, а једини јој извор може бити интуиција, из које са непосредном јасношћу произлазе појмови и закључци у математици. Математичка или теоријска интуиција несводљива је, према интуиционистима, на чулне појаве: она је иманентна разуму који је у ствари орган интуитивног сагледавања.

„Математика", вели Вејл, „уопште се не састоји у томе да развија логичке закључке из датих претпоставки, већ се њени проблеми тичу интуиције, живог научног духа, а ти се проблеми не могу ријешити по утврђеној схеми подобно аритметичким школским задацима. Дедуктивни пут, који води њиховим рјешењима, није предодређен, треба га открити, а као помоћ при том служи обраћање тренутно уоченим многообразним везама интуиције".

Досљедни свом схватању интуиције и њене улоге у заснивању и изградњи математике, интуиционисти закључују да се у математици могу сматрати доказаним они ставови помоћу којих се долази до резултата остварењем конструкције или који указују бар на принципијелну могућност конструкције. Доказати, по њима, грубо речено, значи исто што и конструисати. У интуиционистичкој математици признаје се егзистенција једног математичког објекта само тада кад се укаже и на пут којим се тај објект конструише. Хејтинг, на примјер, каже да „постојати" значи исто што и „бити конструисан". Тврди се, даље, да је принцип потпуно математичке индукције основни и најспецифичнији принцип за математику, логички неизводљив, и да се открива само посредним интелектуалним сагледавањем, односно интелектуалном интуицијом. Критикујући Канторова схватања актуелно бесконачног и усвајајући само потенцијално бесконачно, а држећи се чврсто свог схватања интуиције као методе непосредног интелектуалног сагледавања у математици, интуиционисти су дошли до своје *конструктивне логике,* у којој не важи закон искључења трећег, у смислу да се не може примијенити на бесконачне скупове као што се примјењује на коначне. Низ природних бројева и непосредно сагледана могућност додавања јединице као конститутивног елемента природног броја, интуиција итерације, по Вејлу, чини основу математичког мишљења. Она је сам један израз интуитивног прихватања природног броја као математичког појма.

Постоје и други правци у данашњој математици у вези са основама математике и њене филозофије. Међу њима истаћи ћемо конструктивизам или *конструктивну математику*. Она се може кратко окарактерисати сљедећим основним цртама: њен предмет изучавања су конструктивни процеси и у вези с тим остварење *конструктивних објеката;* она изводи разматрање конструктивних процеса и објеката у границама *апстракције потенцијалне остварљивости* са пуним искључењем актуелне бесконачности, интуитиван појам ефективности везује са тачним појмом алгоритма; имајући у виду специфичност конструктивних процеса и објеката, користи специјалну *конструктивну логику*. Један од најзначајнијих представника у конструктивној математици је совјетски математичар и логичар А. А. Марков, као и одговарајућа совјетска математичко-логичка школа.

Математика је данас у пуном расцвату. Зато се сасвим природно постављају захтјеви да се испитају њене основе, да се оне што прецизније утврде и да на тај начин дедуктивно закључивање из полазних појмова и ставова буде што сигурније и убједљивије. Тако се теорије које се односе на основе математике јављају као веома важан фактор у научним истраживањима и испитивањима. У томе је њихова примарна важност. Докази непротивврјечивости, потпуности и независности полазних ставова су веома тешки, па се у вези с тим у савременом развитку математике развила метаматематика као наука која се бави теоријом доказа у математици, а која основе математике посматра са дубљег логичког и филозофског гледишта уопште. Она веома апстрахује математику тиме што математичке теорије замјењује формалним системима, а доказе низовима веома познатих формула. Тако *математика* битно карактерише *ход данашње математике* у научним и филозофским погледима.

6. - *Геометрија*, као веома обимна област математике у теоријама и примјенама, доживљава у токовима данашње математике развитак

који је нужно везан с њеним претходним развитком. Веома значајно мјесто у данашњим токовима геометрије заузима појам *простора*. Он се дефинише као сваки уређени пар састављен од произвољна скупа S и произвољна подскупа P који сваком подскупу X скупа S придружује један једини подскуп скупа C који се зове простор скупа X. *Простор* се, дакле, опредјељује као скуп елемената, односно тачака, са условом, да су у том скупу установљени односи који су слични с обичним просторним односима. То значи да се скупови поимају као простори ако се у њих конструишу одговарајући односи, на примјер растојање између тачака. Управо, на еволуцији појма растојања, од Frechet-овог стварања метричких простора, може се јасно и конкретно увидјети у развитку математике прелаз са нижег степена апстракције на *виши* степен апстракције.

Значај геометријских теорија и степен њиховог значаја одређује се садржајем њихових задатака и добијеним резултатима, као и њиховим међусобним везама, затим везама с другим математичким областима, са природним наукама и техником. На то данас указују својим теоријама и разноврсним примјенама еуклидска и нееуклидска геометрија, диференцијална, аналитичка и многомјерна геометрија, која својим генерализацијама заузима истакнуто мјесто у *ходу данашње математике.*

Као дио геометрије сматра се *топологија.* Она је посвећена изучавању феномена непрекиданости и у данашњој математици је у пуном развитку. Разнообразност појава непрекидности, као и широки спектар различитих приступа њеног изучавања, довели су до раздвајања јединства топологије у ред одјељених топологија, наиме до опште топологије, до алгебарске топологије и до топологије вишеструкости. Оне се једна од друге разликују по предмету и методи изучавања.

Крупно достигнуће опште топологије су компактни тополошки простори, а дио опште топологије, који је највише геометријски оријентисан, јесте *општа теорија димензије.* У њеним границама успијева се, на примјер, дати јасно опште одређење интуитивног појма геометријске фигуре и посебно појма линије и површи.

Развитак топологије, посебно алгебарске и топологије вишеструкости, продужава се данас у свим правцима, а сфера њене примјене се непрекидно шири. Оснива се општа теорија хомологије и развија се теорија *хомотопије*, као и други дјелови модерне топологије, карактеристични за теорију и примјене данашње математике.

Функционална анализа је дио савремене математике у којој се као главни задатак јавља проучавање бесконачномјерних простора и њихових трансформација. Међу апстрактним просторима, за математичку и функцоналну анализу показали су се врло важним функционални простори, односно простори чији су елементи функције, па отуда и потиче сам назив *функционална анализа.*

За функционалну анализу карактеристично је спајање метода класичне анализе, топологије и алгебре. Њен развитак је текао паралелно с развитком савремене теоријске физике. Показало се да језик функционалне анализе најадекватније одражава закономјерност квантне механике, квантне теорије поља и других теорија савремене физике, које су показале битни утицај на проблематику и методе функционалне анализе. Разлагање функција у бесконачне редове типа Фуријевог реда, које је постигнуто у теорији интегралних једначина, за Хилберта је било од принципијелног значаја. Непрекидну функцију, разложену у Фуријеов ред, Хилберт посматра као бесконачни низ Фуријеових коефицијената, остваривши тако прелаз од функције, дефинисане на континууму вриједности, ка бесконачном низу, тј. прелаз од непрекидног ка дискретном. Од посебне су важности Хилбертове идеје о јединству математике, синтези њених разних области и о значају изналажења веза међу њима, идеје којима се руководио у својим истраживањима у теорији интегралних једначина, јасно показавши како је у тој области остварена плодотворна синтеза алгебре и анализе.

За данашњу етапу развитка функционалне анализе, необично важну за развитак математике данас, карактеристична је велика веза са теоријском физиком, а тако исто са различитим дјеловима класичне анализе и алгебре. Нарочито треба подвући савремене токове развитка теорије обичних и парцијалних диференцијалних једначина, затим теорије интегралних и интегро-диференцијалних једначина. Узимајући у обзир њихове разноврсне примјене, мора се посебно подвући теорија граничних услова. Све то карактерише, *ход данашње математике.*

7. - Потреба развитка саме математике, односно *данашња математизација* различитих области науке, затим продор математичких метода у многе сфере практичне дјелатности и прогрес рачунске технике доводи до премјештања основних сила математичара унутар сложених раздјела математике и појаве цијелог реда нових математичких дисциплина.

Једна од таквих дисциплина је *теорија алгоритама*, гдје се *алгоритам* може посматрати као дефинисани поступак којим се, корак по корак, долази до рјешења задатка из класе задатака или проблема датог типа. Данас проблем тачног математичког дефинисања алгоритма спада међу централне проблеме математике. *Теорија алгоритама* нашла је веома значајне и практичне примјене код електронских рачунара и других аутомата и много је допринијела да су се веома рашириле примјене математичких метода и да се све више шире. Може ли се за једну дату математичку теорију створити универзални алгоритам, тј. може ли се створити такав систем формално-логичких правила путем којих бисмо могли добити одговор на било које питање дате теорије? Уопште узев, јединствена математичка теорија не ствара јединствен алгоритам. Структура проучаваног система објеката може да буде потпуно одређена, а изучавање тог система може захтијевати неограничено образовање алгоритама.

Питања о најбољем управљању физичких или механичких система довела су до заснивања математичке теорије *оптималног управљања*, која је блиска питањима управљања објектима у конфликтним ситуацијама. Ту треба узети у обзир теорију *диференцијалних игара,* односно *теорију игара*, која изучава формалне моделе прихватања оптималних рјешења у условима конфликта. Истраживања у области општих проблема управљања и с њима везаних области математике, сједињених с прогресом рачунске технике дају основе за аутматизацију нових сфера људске дјелатности. Операциони рачун је једна од савремених метода математичке анализе која дозвољава да се у низу случајева помоћу простих правила рјешавају сложени математички задаци. Метода математичког *моделирања*, која своди истраживања спољњег свијета на математичке проблеме, разрађена у теорији модела, заузима истакнуто мјесто међу методама истраживања, нарочито појавом електронских рачунара. Математичка логика својим моделима може правнику пружити изванредну прилику да се учи потпуној, чврстој и објективној аргументацији, толико потребној његовој пракси. Стварањем математичких модела, адекватних, на примјер, за проучавање проблема лингвистике, гдје се већ развија *математичка лингвистика* и *универзална граматика*, затим за проучавање проблема којима се бави психологија, социологија и друге науке о друштву, може се са сигурношћу очекивати да ће се математика све више и више примјењивати у наукама у друштву, у наукама о језику и у наукама које се баве мишљењем. Симетрија, толико значајна као умјетничка категорија, нашла је своју рационалну, дубоку и суптилну разраду у теорији симетрије Х. Вејла, засновај на апстрактној теорији група као математичком моделу. Или, узмимо за примјер *математичку поетику*, дисциплину чије је конституисање у току. У њој се питањима пјесничког језика и његових фигура прилази путем логичког моделовања на основу теорије скупова, апстрактне алгебре и топологије. Методе и идеје математике које су засноване примарно на појмовима коначних скупова, тј. методе и идеје *коначне* или *дискретне* математике, гдје се електронске цифарске машине појављују као снажно оруђе математизације оних ситуација у науци, техници и пракси уопште, пред којима су стајале немоћне методе и идеје математике, засноване искључиво на појмовима бесконачног скупа, граничне вриједности и непрекидности. На методологију научног истраживања и праксе уопште битно утиче све већа улога метода и идеја *коначне* или *дискретне математике*, а у вези с тим и стално растућа улога рачунских машина. Математика бесконачног и математика коначног, односно математика непрекидног и математика дискретног, дијалектички поларизоване у ходу данашње математике, својим методама и идејама пружају неопходна и моћна оруђа егзактног истраживања природе, друштва и мишљења.

8. - Теорија вјероватноће развијала се под утицајем врло практичних проблема, на бази емпиријско-интуитивних мотивација. Тако је текао њен развитак скоро до XX вијека. Тек је током XX вијека *теорија вјероватноће* постала математичка дисциплина са својим јасно дефинисаним методама и јасно дефинисаним предметом, па се њен развитак одвија не само по логици њених конкретних примјена и емпиријско-интуитивних мотивација, него и по логици њених унутрашњих потреба као математичке дисциплине. У вези с тим, један од најзначајнијих момената у том периоду њеног развитка је њена аксиоматизација, коју је 1933. извршио А.Н. Колмогоров, кад је увео *простор вјероватноће,* формиран од сигурног догађаја, као скупа елементарних догађаја, од класе сложених догађаја, који су дијелови сигурног догађаја и од вјероватноће, као позитивне мјере на класи сложених догађаја, такве да је вјероватноћа сигурног догађаја једнака јединици. У данашњој теорији вјероватноће од битног су значаја *граничне теореме*, међу којима су *закони великих бројева*, са својим разноврсним примјенама у природним, техничким и социјалним наукама.

Савремени ток развитка теорије вјероватноће карактерише развитак теорије *случајних процеса*, као њене посебне области. Ријеч је о *случајним функцијама* у којима фигуришу случајне промјенљиве и неслучајна промјенљива, која се већином интерпретира као вријеме.

На теорији вјероватноће заснована је савремена математичка и примијењена статистика. Статистичке методе истраживања прикладне су за сва проучавања која се заснивају на великом броју посматрања, експериментисања и мјерења. На тај начин дошло је данас до широких примјена и афирмисања статистичких метода истраживања у економским и социјалним наукама, у метеорологији, биологији, нарочито у генетици, која се бави проблемима насљеђа, физици, хемији, астрономији, филологији, психологији, медицини, пољопривреди, техници и другим областима. Слободно можемо рећи да скоро нема људске дјелатности у којој не би могла доћи у обзир примјена статистике, кад год је ријеч о скупу чинилаца које не можемо, или врло тешко можемо, потпуно уочити и који су од значаја за појаве које желимо проучити, а које због таквих чинилаца имају карактер случајних догађаја.

У савременој математичкој статистици, строго заснованој на теорији вјероватноће, истичу се њене посебне области: теорија естимације, теорија тестирања статистичких хипотеза и теорија планирања експеримената, која је врло значајна за експериментална истраживања у природним наукама и техници.

На основу теорије вјероватноће и математичке статистике развила се у току другог свјетског рата и послије њега *теорија информације*, математичка дисциплина која чува процес одржања, преображаја и предаје информације и која је од великог практичног значај за савремено друштво и његову организацију. У њеној основи лежи способност мјерења количине информаицје, која је садржана у једном случајном објекту у односу на други случајни објект. Та способност омогућава да се количина информације изрази бројем. Посебно истичемо *информатику,* дисциплину која изучава структуру и општа својства научне информације, а тако исто и закономјерност њеног заснивања, преображаја, предаје и искоришћавања у разним сферама људске дјелатности.

Појам информације заузима веома важно мјесто у *кибернетици*, гдје се као основни објект јављају системи, а сама *кибернетика* је наука о управљању, везама и прерадама информација у живој и мртвој природи. Високи степен апстракције дозвољава кибернетици да налази опште методе прилаза изучавању система квалитативно различите природе, на примјер, техничких, биолошких и социјалних. Као примјери кибернетских система могу послужити разне врсте аутоматских регулатора у техници, електронске рачунске машине, људски мозак, биолошка популација и људско друштво. Математичко-аналитичке и експерименталне методе користи кибернетика гдје се нарочито истиче метода математичког моделирања. Основна техничка средства за рјешавање свих задатака у кибернетици су електронски рачунари, па је за савремену кибернетику тијесно повезан прогрес електронске рачунске технике. У ширем смислу кибернетика се састоји из већег броја раздјела који представљају самосталне научне правце. Тако постоји: *биолошка кибернетика*, као научни правац који открива идеје, методе и техничка средства кибернетике у биологији; *медицинска кибернетика*, научни правац повезан са проналажењем идеја, метода и техничких средстава кибернетике у медицини; техничка кибернетика, која се бави проучавањем идеја и метода техничких система управљања; *економска кибернетика* која се бави примјеном идеја и метода кибернетике у економским системима. У свим тим кибернетикама пробабилистичке и статистичке методе имају одређене утицаје.

9. - *Рачунска математика,* која за основу има нумеричку анализу, представља данас раздио математике који у себе укључује круг питања

повезаних с коришћењем електронских рачунских машина. Често се термин *рачунска математика* схвата као теорија бројевних метода и алгоритама рјешавања типичних математичких задатака. Међутим, садржина тог термина не сматра се установљеном, јер се односна област интензивно развија у вези с брзо растућим примјенама електронских рачунских машина. Повезаност између теоријске и примијењене математике, произашла из развитка математике данас у цјелини, толика је да је илузорно раздвајати теоријску од примијењене математике и да је такво раздвајање превазиђено и само традицијом задржано. Савремене и веома апстрактне математичке дисциплине, математичка логика и апстрактна алгебра данас су поуздан посредник између човјека и разних сложених аутомата, односно електронских рачунара. Примјенама математичке логике и апстрактне алгебре у теорији електронских рачунара и аутомата уопште показало се да се може постићи материјализација најапстрактнијих аналитичких релација и да проблеми конкретних конструкција врло сложених аутомата имају за посљедицу најапстрактнија математичка и логичка истраживања. Тако се без математичке логике, донедавно сматране дисциплином сасвим апстрактног карактера, без значаја за практичне примјене, данас не могу замислити рјешења врло практичних и актуелних проблема конструкције електронских рачунара и низа других проблема аутоматизације.

У *рачунској математици* могу се уочити сљедећа три већа раздјела: први је везан с примјеном електронских рачунских машина у разним областима научне практичне дјелатности. Може се окарактерисати као анализа математичких модела. Други се повезује с разрадом метода и алгоритама у рјешавању типичних математичких задатака који произлазе при истраживању математичких модела, док се трећи односи на питање упрошћења узајамног односа човјека и електронске рачунске машине. Ту се укључује теорија и пракса програмирања. Као примјер типичних математичких задатака који се често јављају у примјенама, могу се именовати задаци алгебре, гдје се јављају методе рјешавања обичних и парцијалних диференцијалних једначина, затим система линеарних алгебарских једначина, инвертовање матрица и налажење њихових сопствених вриједности. Ту долази до израза *економичност* методе, тј. добијања резултата при релативно малом броју операција. Брз правац развитка *рачунске математике* карактеришу бројевне *методе оптимизације,* којима се израчунавају екстремна значења функционала на скуповима веома сложене структуре. Важно мјесто овдје имају питања оптимизације метода рјешавања задатака, у којима учествује велики број промјенљивих. Задаци *математичког програмирања*, линеарног и динамичког, који настају при рјешавању тих задатака истраживања операција и теорија игара, од примарног су значаја у *рачунској математици*. Једним од основних задатака теорије програмирања сматра се однос човјека и машине. У реду покољења рачунских машина дошле су до израза брзина програмирања, тоерија алгоритама, универзални алгоритамски језици и систематско програмирање.

Рачунска математика, користећи сва теоријска достигнућа данашње математике и савремена техничка средства, показује конкретно путеве којима *хода данашња математика* у мијењању и унапређењу *опште друштвене праксе*, као укупне практичне и теоријске дјелатности човјека у разоткривању и проучавању феномена стварности.

10. - Својим готово неограниченим могућностима примјене, односно својим огромним утицајем на развитак савремене опште друштвене праксе, данашња математика је отворила свом оштрином нове и озбиљне проблеме образовања научних, стручних и педагошких кадрова у области наука, умјетности, технике и праксе уопште, што имплицира озбиљне проблеме у области основног, средњег, вишег и високог образовања.

Због скоро неограничених могућности примјена математике, све се више и више траже математичари који ће бити у стању да схвате математичке идеје и да их прате до њихових остварења у конкретним ситуацијама разних наука и праксе, уживљући се истовремено у проблеме тих наука и праксе. Они ће најуспјешније остварити везу математике с другим наукама и праксом и стално ће откривати нове области науке и праксе за примјену метода и идеја математике, односно математичких модела. И у том пголеду очигледан је утицај који врши развитак математике на општу друштвену праксу, као што је, обратно, очигледан утицај ове праксе, подигнуте на виши ниво примјенама математике, који она врши на развитак математике.

Данашња математика, својим теоријама и примјенама, не имплицира проблеме међуодноса емпиријске и рационалне истине, тј. *емпиријског реализма и математичког рационализма,* него и дубоке и суптилне филозофске, тачније: гносеолошке и онтолошке проблеме. Математичар, на примјер, не може бити равнодушан кад се постави питање *бића* математике, које није само математичко питање, већ и филозофско, прецизније: онтолошко. Одговор на то питање има практичних посљедица у математици, на примјер: у математичкој активности сваког математичара понаособ; у истраживачкој дјелатности у математици; у њеним примјенама и њеним разноврсним презентирањима, поготово у настави.

Математика као један *аспект поимања стварности* одражава стварност. Зато се у њој огледа јединство и многостраност појава стварности, а то доводи до образовања специјалних области. Данас се може констатовати да нема мање од 60 области, да свака од ових области има просјечно 6 дјелимичних области, а свака од дјелимичних области 6 подобласти, што чини укупно 2160 подобласти. Модерне дисциплине у данашњој математици бурно се развијају, тако рећи освајају идејно и методолошки разне гране математике, с јасним наговјештајима да ће бити врло значајне за конкретне примјене математике, упркос томе што су високо апстрактне и што на први поглед изгледају као дисциплине у којима се искључиво остварује принцип „математика ради математике", а не „математика ради примјена", односно у којима се математика манифестује само као нека врста најапстрактније интелектуалне игре. У ходу данашње математике оштро се испољава тенденција ка *диференцирању* и тенденција ка *интеграцији*. Многоструки су путеви којима се иде ка обједињавању, на примјер, путем *апстракције* преко генералних појмова, путем *аксиоматске методе*, путем хијерархије структура, путем *сједињавања* елемената различитих теорија, итд. Интуиција и разум великих математичара наслућују многоструко јединство реалности, дајући правац развитку *интеграционих* метода и идеја, па се наведени путеви *обједињавања* могу појмити као огледање многоструког јединства реалности у математици, исто онако као што све дубље понирање у појединачну појаву олакшава да се могу појмити путеви диференцирања.

Данашња математика потенцира старе и отвара нове научне и филозофске, тачније: гносеолошке и онтолошке дилеме и проблеме међуодноса математике и стварности, који је данас, у ери математизације опште друштвене праксе, као укупне теоријске и практичне дјелатности човјека, веома битан за научну и филозофску спознају међуодноса човјека и стварности. Развитак математике непрекидно и дијалектички тече узлазном линијом од апстракције нижег ка апстракцији све вишег степена, што се снажно испољава у ходу данашње математике.

Математика постаје, тако рећи, „савјест" спознаје стварности, а не само „инструмент" те спознаје, али би било илузорно и помислити да се специфичне методе појединих наука, с озбиром на савремено „математичко освајање" опште друштвене праксе, могу замијенити математичким методама, што би био идеализам своје врсте - *математизам*, изражен становиштем о некој „свемоћи" математике као инструмента којим се служимо у проучавању разних феномена стварности, јер математика данас заиста може много али далеко је од тога да може све. У том свјетлу потребно је научно и филозофски, с једне стране, посматрати *емпиријски реализам,* који произлази из посматрања и проучавања феномена стварности, и, с друге стране, *математички рационализам* који смо третирали у овом чланку, као извјестан интелектуални одраз емпиријског реализма.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Велика совјетска енциклопедија*, Москва 1974

2. *Математика е содержание, методи и значение*, Москва 1956

3. Jean Konztmann *Où vont les mathématiques 7,* Science publique, Hermann, Paris, 1967.

4. Michael Otte, Mathematiker Über die Mathematik, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1974.

5. *Mathematics in the modern world*, Scientific american, New York 1964.

6. Ернест Стипанић, *Поглед на свијет - Математика и поглед на свијет*, Радови са научног скупа, Херцегнови, 9, 10. и 11. октобар 1978, Црногорска академија наука и умјетности, Титоград 1984, стр. 291-313 (Видјети литературу уз чланак).

7. Ернест Стипанић, *Путевима развитка математике*, „Вук Караџић", Београд 1988, стр. 143-164, Куда иде савремена математика?

Ernest Stipanić

EMPIRICAL REALISM AND MATHEMATICAL RATIONALISM IN THE STUDY OF THE PHENOMENON OF REALITY

Summary

This paper, on the basis of the study of both this and some other authors, explains the essence of very abstract notions and theories in mathematics. It is shown that being familiar with the way mathematical. notions and theories have been created and developed considerably influences their conscious and creative acquisition as a powerful means in the process of explanation of natural phenomena on the one hand, and their contribution to the formation of a scientific and philosophical view of the world, on the other. For that purpose, gnostic and ontological problems connected to empirical realism and corresponding mathematical rationalism are considered and analysed through the application of mathematics in scientific and practical activities.