ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 16, 2005.

ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 16, 2005

THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS
GLASNIK OF THE SECTION OF NATURAL SCIENCES, 16, 2005.

UDK 530.19

M. Jaćimović i Ž. Lj. Kovačević

PROJEKCIONI METOD FUNKCIJA GRINA U BCS MODELU SUPERPROVODNIKA

Sažetak

Projekciona tehnika u metodu jednačine kretanja za funkcije Grina je primijenjena da bi se istraživao spektar elementarnih pobuđenja u Bardin-Kuper-Šriferovom modelu klasičnih superprovodnika.

GREEN FUNCTION PROJECTION METHOD IN BCS MODEL OF THE SUPERCONDUCTIVITY

Abstract

The projection technique in the equation of motion for the Green function was applied in order to investigate the spectrum of the elementary excitations in the Bardin-Cooper-Schrieffer model for classic superconductors.

Polazeći od osnovnih postavki kvantne statističke fizike, u ovom radu koristimo tri teorijska metoda za mikroskopski opis superprovodnog stanja običnih (klasičnih) superprovodnika [1]- [3].

Relativno novi i još uvijek u razvoju je treći navedeni metod, metod projekcije jednačina kretanja funkcija Grina (PJKFG), [4]-[9] koji se zasniva na projektovanju desne strane jednačine kretanja funkcija Grina (GF) na polaznu GF. Pošto GF predstavlja propagaciju (prenošenje) nekog kvazičestičnog pobuđenja kroz mnogočestični sistem, onda se može reći da metod PJKGF ima fizički smisao (tj. da se sastoji) u izdvajanju glavnog (linearnog) dijela rasijanih kvazičestica, zbog interakcije sa ostalim česticama sistema.

1. METOD JEDNAČINA KRETANJA FUNKCIJA GRINA

U okviru kvantne statističke fizike mnogočestičnih sistema koristi se metod matrice gustine ili statističkog operatora pri izračunavanju srednjih vrijednosti fizičkih veličina kao što su, na primjer, energija sistema, magnetizacija, površinska gustina struje i slično. Tako se statistička srednja vrijednost neke fizičke veličine f izračunava kao

$$\langle f\rangle = Tr(\ f) = \sum_{nm} {}_{nm} f_{mn}\,, \tag{1}$$

gdje Tr označava 'trag' matrice (suma dijagonalnih elemenata) i gdje u slučaju statističke ravnoteže, statistički operator κ ne zavisi od vremena. Ako se ne mijenja broj čestica sistema u razmotrenoj zapremini, onda se koristi Gibsov kanonski ansambl, t. j.

$$= \frac{1}{Z} e^{-\beta H}\,,\ Z = Tr(e^{-\beta H})\,,\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = \left[H,\ \ \right] \tag{2}$$

gdje je $[A, B] = AB–BA$ komutator operatora A i B, koji se javlja u Liuvilovoj jednačini za κ. Statistička suma Z određuje Helmholcovu slobodnu energiju $F = -\beta^{-1}\ln Z$, gdje je H hamiltonijan sistema čestica, $\beta = 1/(k_B T)$, Bolcmanova konstanta $k_B = 1{,}38\cdot 10^{-23}\,J/K$, a T – temperatura. U namjeri da se opiše odziv sistema na spoljašnje uticaje ili, na primjer, rasijanje čestica u sistemu međusobno interagujućih čestica, na prirodan način se pojavljuju korelacione funkcije. Za operatore u Hajzenbergovoj slici $A(t) = \mathrm{e}^{iHt/\hbar} A \mathrm{e}^{-iHt/\hbar}$ i analogno za *B(t)* se definiše vremenska korelaciona funkcija u obliku ravnotežnih srednjih vrijednosti $\langle A(t)B(t')\rangle$. Ako se uzme u obzir vremenska evolucija operatora u Hajzenbergovoj slici $i\hbar\partial A(t)/\partial t = [A(t), H]$, dobija se jednačina kretanja za korelacione funkcije u obliku:

$$i\hbar\frac{d}{dt}F_{AB}(t-t') \equiv i\hbar\frac{d}{dt}\langle A(t)B(t')\rangle = \langle [A(t), H]B(t')\rangle. \tag{3}$$

Neka na sistem čiji hamiltonijan H ne zavisi od vremena, djeluje dodatno i perturbacija $H' = B\delta(t-t_0)$. Onda će statistički operator u Hajzenbergovoj slici biti $\rho'(t) = \rho + \Delta\rho(t)$ gdje je

$$\Delta\rho(t) = -i\int_{-\infty}^{t} dt' \mathrm{e}^{-iHt}[H'(t'),\rho]\mathrm{e}^{iHt}. \tag{4}$$

Tada je statistička srednja vrijednost operatora u Hajzenbergovoj slici

$$\overline{A(t)} = Tr(\rho A) + Tr\{\Delta\rho(t)A\} = \langle A\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle\langle A(t), H'(t')\rangle\rangle^r, \tag{5}$$

gdje je u saglasnosti sa Zubarevom notacijom [2] i [3]

$$G_{AB}^r(t,t') \equiv \langle\langle A(t), B(t')\rangle\rangle^r = -i\theta(t-t')\langle[A(t),B(t')]\rangle \tag{6}$$

komutatorska retardovana (koja kasni) dvovremenska funkcija Grina (GF), a $\theta(t>0)=1$ i $\theta(t<0)=0$ je Hevisajdova funkcija 'stepenica'. Koristeći relaciju $\partial\theta(t-t')/\partial t = \delta(t-t')$, gdje je $\delta(t)$ Dirakova 'delta funkcija', dobija se jednačina kretanja za GF:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle A(t), B(t')\rangle\rangle^r = \delta(t-t')\langle[A,B]\rangle + \langle\langle[A(t),H],B(t')\rangle\rangle. \tag{7}$$

Ako se uvedu Furijeove transformacije (F.T.) za korelacione funkcije i GF respektivno,

$$F_{AB}(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} J_{BA}(\omega)e^{i\omega(t-t')}d\omega, \quad G_{AB}^r(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_{AB}^r(E)e^{-iE(t-t')}dE, \tag{8}$$

onda jednačina kretanja za GF dobija sljedeći oblik:

$$\omega G_{AB}^r(\omega) = \langle[A,B]\rangle + \langle\langle[A,H];B\rangle\rangle_\omega^r. \tag{9}$$

Koristeći jednakost

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = P\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x), \tag{10}$$

gdje $\varepsilon \to 0$, $P\dfrac{1}{x}$ označava Košijevu glavnu vrijednost integrala funkcije $1/x$, dobija se sljedeća relacija izmedju F. T. korelacione funkcije i GF:

$$J_{BA}(\omega) = \frac{-2}{e^{\beta\omega}-1} Im G_{AB}(\omega + i\varepsilon), \tag{11}$$

gdje je *Im* imaginarni dio odgovarajuće kompleksne veličine. Dokaz relacije (10) navodimo u Dodatku, na kraju ovog rada.

2. SUPERPROVODNOST U MODELU BARDIN-KUPER-ŠRIFERA

Za opisivanje osnovnih osobina klasičnih (BCS - Bardin, Kuper, Šrifer) superprovodnih jedinjenja, koristi se hamiltonijan

$$H_{BCS} = \sum_p \varepsilon_p a_p^+ a_p + \frac{1}{2}\sum_{pp'} V_{BCS}(p,p') a_p^+ a_{-p}^+ a_{-p'} a_{p'}, \tag{12}$$

gdje je $\varepsilon_p = \varepsilon(p) - \mu$, μ je hemijski potencijal, $p = (\mathbf{p},\sigma)$, $\sigma = \pm 1$ označava z-projekciju spina, a $\mathbf{p}$ – impuls elektrona. Samo za $p' = -p$ efektivno privlačna interakcija u uskom energetskom sloju širine $2\omega_D \sim k_B T_C$ oko Fermi sfere ima nenultu vrijednost $V_{BCS}(p,p') \equiv -g$, gdje je $g > 0$ konstanta privlačne interakcije između elektrona u Kuperovom paru. Sopstvene vrijednosti razmatranog hamiltonijana H_{BCS}, naći ćemo na tri načina.

2. 1. Bogoljubovljev metod kanonskih transformacija

Spektar elementarnih pobudjenja E_p, tj. svojstvenih vrijednosti hamiltonijana H_{BCS}, se može izračunati koristeći Bogoljubovljev metod kanonskih transformacija sa Fermijevih operatora a_p za elektrone na nove Fermijeve operatore α_p za kvazičestice

$$(a_p \quad a_p^+ \quad a_{-p} \quad a_{-p}^+) = W^T\,(\alpha_p \quad \alpha_p^+ \quad \alpha_{-p} \quad \alpha_{-p}^+), \tag{13}$$

gdje je

$$W = \begin{pmatrix} u_p & 0 & 0 & v_p \\ 0 & u_p & v_p & 0 \\ 0 & -v_p & u_p & 0 \\ -v_p & 0 & 0 & u_p \end{pmatrix}, \qquad W^{-1} = W^T, \tag{14}$$

ortogonalna matrica 'u-v transformacije'. Da bi antikomutacione relacije bile zadovoljene i za nove operatore α_p, tj. da bi 'u-v transformacija' bila kanonska, potrebno je da bude zadovoljen uslov $u_p^2 + v_p^2 = 1$. Tako se H_{BCS} izražava kao hamiltonijan fermi gasa međusobno neinteragujućih kvazičestica [1]-[3]

$$H_{BCS} = \sum_p E_p \alpha_p^+ \alpha_p + \sum_p (\varepsilon_p v_p^2 - \frac{\Delta_p^2}{2E_p}), \tag{15}$$

gdje je spektar elementarnih kvazičestičnih pobuđenja $E_p = (\varepsilon_p^2 + |\Delta_p^2|)^{1/2}$ odakle se vidi da Δ_p predstavlja energetski procjep u spektru i izražava se na sljedeći način:

$$\Delta_p = \sum_{p'\sigma'} V(p,p') \langle a_{-p'} a_{p'} \rangle. \tag{16}$$

Ako se za grube ocjene uzme da je $V(p,p') \cong V = const$, onda se dobija i energetski procjep $\Delta_p \cong \Delta$ kao funkcija od temperature *T*, jer se statistički srednja vrijednost (1) izražava preko statističkog operatora (2).

2. 2 Metod prekidanja lanca jednačina kretanja za funkcije Grina

Jednačina kretanja za normalnu GF $G_p(t-t') = \langle\langle a_p(t); a_p^+(t')\rangle\rangle$ dovodi do neophodnosti uvođenja anomalne GF $F_p^+(t-t') = \langle\langle a_{-p}^+(t); a_p^+(t')\rangle\rangle$ uz pretpostavku [1]-[3] da u sistemu postoji izvor Kuperovih parova elektrona (vezanog stanja dva elektrona sa suprotnim projekcijama spina σ i suprotnim impulsima **p**), tj.

$$H = H_{BCS} + \nu \sum_p W_p (a_p^+ a_{-p}^+ + H.c.). \tag{17}$$

Uvodeći tzv. anomalne srednje koje odgovaraju stvaranju ili poništavanju Kuperovih parova $\langle a_p^+ a_{-p}^+ \rangle_\nu$ i $\langle a_{-p} a_p \rangle_\nu$ na kraju računa se sprovodi granični prelaz $\nu \to 0$ (tzv. metod kvazisrednjih vrijednosti Bogoljubova). Koristeći aproksimaciju srednjeg polja, lanac međusobno povezanih jednačina GF se prekida na prvom koraku, pa su F.T. jednačina kretanja za normalnu i anomalnu GF respektivno

$$(\omega-\varepsilon_p)G_p(\omega)=1+\Delta_p F_p^+(\omega), \qquad (\omega+\varepsilon_p)F_p^+(\omega)=\Delta_p^+ G_p(\omega). \quad (18)$$

Rješavanjem gornjeg sistema linearnih algebarskih jednačina po $G_p(\omega)$ i $F_p^+(\omega)$ dobija se $G_p(\omega)=\dfrac{\omega+\varepsilon_p}{\omega^2-E_p^2}$; $\qquad F_p^+(\omega)=\dfrac{\Delta_p^+}{\omega^2-E_p^2}$. (19)

Dalje se dobija [3] samosaglasni izraz za računanje energetskog procjepa, zatim srednja vrijednost energije sistema i srednja vrijednost zauzatosti jednočestičnih stanja na isti način, kao i na kraju sljedećeg paragrafa.

2. 3. Metod projekcije jednačina kretanja funkcija Grina

Da bi se koristila teorija perturbacija (npr. metod Fajnmanovih dijagrama) za opis superprovodnog stanja, pogodno je uvesti tzv. matričnu GF

$$\mathcal{G}_p(t-t')=\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22}\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} G_p(t-t') & F_p(t-t') \\ F_p^+(t-t') & -G_{-p}(t'-t)\end{pmatrix}. \quad (20)$$

Uvodeći dvokomponentne (spinorne) Nambu operatore

$$\Psi_p=\begin{pmatrix} a_p \\ a_{-p}^+\end{pmatrix}, \qquad \Psi_p^+=(a_p^+ \quad a_{-p}). \quad (21)$$

F. T. matrične GF ima sljedeći oblik:

$$\mathcal{G}_p(\omega)=\langle\langle\Psi_p\,|\,\Psi_p^+\rangle\rangle_\omega=\begin{pmatrix} G_p(\omega) & F_p(\omega) \\ F_p^+(\omega) & -G_{-p}(-\omega)\end{pmatrix}. \quad (22)$$

Da bismo primijenili metod projekcionih jednačina kretanja, treba najprije napisati jednačinu kretanja za Nambu operator Ψ_p

$$i\frac{d}{dt}\Psi_p\equiv Z_p=[\Psi_p,H]=E\Psi_p+Z_p^{ir}, \quad (23)$$

gdje je Z_p^{ir} ireducibilni dio matrice kolone Z_p, koji se javlja kao posljedica procesa neelastičnog rasijanja prilikom propagacije elektrona u interagujućem mnogočestičnom sistemu. Iz uslova ortogonalnosti $\langle\{Z_p^{ir},\Psi_p^+\}\rangle=0$ i jednakosti $\langle\{\Psi_p,\Psi_p^+\}\rangle=I$, gdje je I - kvadratna jedinična matrica, a $\{A,B\}=AB+BA$ je antikomutator operatora A i B, se dobija tzv. frekvencijska matrica po definiciji

$$E = \langle \{Z_p, \Psi_p^+\} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \{Z_{11}, a_p^+\} & \{Z_{11}, a_{-p}\} \\ \{Z_{21}, a_p^+\} & \{Z_{22}, a_{-p}\} \end{pmatrix} \rangle. \tag{24}$$

Matrični elementi matrice kolone Z_p su određeni jednačinama kretanja redom operatora $a_p(t)$ i $a_{-p}^+(t)$, tj.

$$i\frac{d}{dt}a_p(t) = [a_p(t), H_{BCS}] = \varepsilon_p a_p + \sum_{p'} V(p,p') a_{-p}^+ a_{-p'} a_{p'} \equiv Z_{11} \tag{25}$$

$$i\frac{d}{dt}a_{-p}^+(t) = [a_{-p}(t), H_{BCS}] = -\varepsilon_p a_{-p}^+ + \sum_{p'} V(p,p') a_{p'}^+ a_{-p'}^+ a_p . \equiv Z_{21} \tag{26}$$

Koristeći operatorske identitete

$$\{AB, C\} = A[B,C] + \{A,C\}B, \qquad [A, BC] = \{A,B\}C - B\{A,C\} \tag{27}$$

lako se dobijaju sljedeće relacije:

$$\{Z_{11}, a_p^+\} = \varepsilon_p + 2V(p,p) a_{-p}^+ a_{-p}, \qquad \{Z_{11}, a_{-p}\} = \sum_{p'} V(p,p') a_{-p'} a_{p'}, \tag{28}$$

$$\{Z_{21}, a_p^+\} = \sum_{p'} V(p,p') a_{p'}^+ a_{-p'}^+, \qquad \{Z_{11}, a_{-p}\} = -\varepsilon_p - 2V(p,p) a_p^+ a_p . \tag{29}$$

odakle se posle statističkog usrednjavanja (1) dobijaju elementi frekvencijske matrice E (24). Izvršavajući F.T. jednačina kretanja GF (22) dobija se sljedeća relacija:

$$\omega \langle\langle \Psi_p \mid \Psi_p^+ \rangle\rangle = I + E \langle\langle \Psi_p \mid \Psi_p^+ \rangle\rangle + \langle\langle Z_p^{ir} \mid \Psi_p^+ \rangle\rangle. \tag{30}$$

Efekti superprovodnog sparivanja elektrona se mogu izučavati u okviru generalisane Hartri-Fok-Bogoljubovljeve aproksimacije, kada je $\langle\langle Z_p^{ir} \mid \Psi_p^+ \rangle\rangle \cong 0$. Tako se dobijaju redom sljedeći izrazi za normalu $G_p(\omega)$ i anomalnu $F_p(\omega)$ GF:

$$G_p(\omega) = \frac{\omega + \widetilde{\varepsilon}_p}{\omega^2 - \widetilde{E}_p^2}, \qquad F_p(\omega) = \frac{-\Delta_p}{\omega^2 - \widetilde{E}_p^2} \tag{31}$$

gdje su zbog interakcije V dobijene prenormirane vrijednosti jednočestičnih energija $\widetilde{\varepsilon}_p$ i energija elementarnih eksitacija $\widetilde{E}_p$

$$\widetilde{\varepsilon}_p = \varepsilon_p + 2V(p,p) n_p, \qquad \widetilde{E}_p = (\widetilde{\varepsilon}^2 + |\Delta_p|^2)^{1/2} \tag{32}$$

i gdje je srednja popunjenost jednočestičnih stanja $n_p = \langle a_p^+ a_p \rangle$, koja je u normalnom stanju jednaka Fermi-Dirakovoj funkciji raspodjele. Koristeći relaciju (11) dobija se korelaciona funkcija

$$\langle a_p^+ a_{-p}^+ \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{1+\exp(\beta\omega)} \{-2ImF^+(\omega + i\varepsilon)\} \tag{33}$$

Primjenom relacije (10) i izraza za ermitski konjugovanu anomalnu GF

$$F_p^+(\omega) = -\frac{\Delta_p^+}{2\widetilde{E}_p} \{ \frac{1}{\omega - \widetilde{E}_p} - \frac{1}{\omega + \widetilde{E}_p} \} \tag{34}$$

dobija se

$$\langle a_p^+ a_{-p}^+ \rangle = -\frac{\Delta_p^+}{2\widetilde{E}_p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{1+\exp(\beta\omega)} \{ \delta(\omega - \widetilde{E}_p) - \delta(\omega + \widetilde{E}_p) \} = \frac{\Delta_p^+}{2\widetilde{E}_p} \tanh \frac{\widetilde{E}_p}{2/\beta}. \tag{35}$$

Tako se na osnovu prethodne relacije (35) i definicije (16) dobija samosaglasna relacija za određivanje energetskog procjepa

$$\Delta_p = \sum_{p'} V(p,p') \frac{\Delta_{p'}}{2\sqrt{\widetilde{\varepsilon}_{p'}^2 + |\Delta_{p'}|^2}} \tanh \frac{\sqrt{\widetilde{\varepsilon}_{p'}^2 + |\Delta_{p'}|^2}}{2/\beta}. \tag{36}$$

Zbog toga što dozvoljene vrijednosti impulsa **p**' skoro neprekidno ispunjavaju I Briluenovu zonu, može se preći od sume po **p**' na integraciju po koordinatama impulsa u sfernom koordinatnom sistemu. Izvršavanjem integracije po ugaonim promjenjivim, dalje se može preći sa integracije po $|\mathbf{p}|$ na integraciju po energiji ε, pri čemu se će se ispod integrala pojaviti i gustina elektronskih stanja $N_\varepsilon = dp/d\varepsilon$. Uzevši u obzir ranije pomenute aproksimacije $V(p,p') \cong g$, zatim za energetski procjep $\Delta_{p\sigma} = \Delta_\varepsilon \sigma/|\sigma|$, gdje je $\sigma = \pm 1$, ima nenulte vrijednosti $\Delta_\varepsilon \cong \Delta$, samo u uskom intervalu energija ω_D oko Fermijevog nivoa ε_F i $N_\varepsilon \cong N_F$, gdje je N_F – gustina elektronskih stanja na Fermijevom nivou, dobija se integralna jednačina iz koje se može dobiti temperaturna zavisnost $\Delta(T)$ u slučaju ako se uzme da je $\widetilde{\varepsilon}_p \cong \varepsilon_p$g

$$\frac{1}{gN_F} = \int_0^{\omega_D} d\widetilde{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\widetilde{\varepsilon}^2 + \Delta(T)^2}} \tanh \frac{\sqrt{\widetilde{\varepsilon}^2 + \Delta(T)^2}}{2k_B T}, \tag{37}$$

inače se mora ona rješavati zajedno sa odgovarajućom samosaglasnom jednačinom za zauzetost jednočestičnih nivoa n_p koja se izražava preko Δ, kao što će biti izvedeno na kraju ovog paragrafa. Za temperature

$T \geq T_C$ energetski procjep nestaje $\Delta \to 0$, pa se dobija sljedeća jednačina za ocjenjivanje temperature T_C prelaza u superprovodno stanje

$$\frac{1}{gN_F} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}} \tanh \frac{\tilde{\varepsilon}}{2k_B T_C}. \tag{38}$$

Na nultoj temperaturi $(T \to 0)$, jednačina (38) za energetski procjep $\Delta(T=0) \equiv \Delta_0$ dobija sljedeći oblik:

$$\Delta_0 = gN_F \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \frac{\Delta_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\Delta_0^2|}}, \tag{39}$$

odakle se skraćivanjem Δ_0 i izračunavanjem tabličnog integrala dobija sljedeći izraz $1/(gN_F) = \ln(\omega_D + \sqrt{\omega_D^2 + \Delta_0^2})/(\Delta_0)$. Zadržavajući samo članove prvog reda po $\Delta_0/\omega_D \ll 1$, dobija se konačno $\Delta_0 \approx 2\omega_D e^{-1/(gN_F)}$, odakle se može ocijeniti vrijednost energetskog procjepa na $T=0$ kao $\Delta_0 \sim 10^{-2}\omega_D \sim 0.1$ meV, pri čemu je uzeto da je za klasične superprovodnike proizvod jačine privlačne interakcije elektrona u Kuperovom paru i Fermijeve energije iznosi $gN_F \leq (0.5 \div 0.2)$.

Navedimo na kraju i relacije iz kojih se dalje lako mogu dobiti termodinamičke osobine BCS superprovodnika. U aproksimaciji srednjeg polja, dobija se da je srednja vrijednost energije

$$U = \langle H_{BCS} \rangle = 2\sum_p \varepsilon_p n_p - \frac{1}{2}\sum_p \frac{|\Delta_p|^2}{\tilde{E}_p} \tanh \frac{\tilde{E}_p}{2k_B T}. \tag{40}$$

Srednji broj kvazičestica u stanju p je

$$n_p = \langle a_p^+ a_p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{e^{\beta\omega}+1} \{-2ImG_p(\omega + i\varepsilon)\}. \tag{41}$$

Ako se iskoristi na osnovu (31) relacija

$$G_p(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\tilde{\varepsilon}_p/\tilde{E}_p}{\omega - \tilde{E}_p} + \frac{1-\tilde{\varepsilon}_p/\tilde{E}_p}{\omega + \tilde{E}_p} \right), \tag{42}$$

i relacija (10), dobija se samosaglasni izraz za popunjenost jednočestičnih stanja, jer je u okviru definicije (32) za prenormirane energije jednočestičnih nivoa $\tilde{\varepsilon}_p$ sadržana i zavisnost od n_p

$$n_p = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\widetilde{\varepsilon}_p}{\widetilde{E}_p}\tanh\frac{\widetilde{E}_p}{2k_B T}\right). \tag{43}$$

koja se mora rješavati, kao što je već naglašeno ranije, zajedno sa samosaglasnom jednačinom za energetski procjep (37), odnosno (38), koji figuriše u definiciji spektra elementarnih pobuđenja (32).

3. ZAKLJUČAK

Koristeći metod projekcije jednačina kretanja GF dobijaju se isti izrazi za normalnu i anomalnu GF kao u metodu prekidanja lanca jednačina kretanja GF. Ako se ispusti razlika u znaku kod anomalne GF koja ne dovodi do suštinskih fizičkih posljedica, jedina razlika je dobijanje prenormirane energije jednočestićnih nivoa $\widetilde{\varepsilon}_p$ i prenormirane energije elementarnih pobuđenja $\widetilde{E}_p$(32).

Dok je za dobijanje vrijednosti energetskog procjepa na $T = 0$, važe iste relacije u oba metoda, dobijanje temperaturne zavisnosti $\Delta(T)$ u okviru metoda projekcije jednačina kretanja predstavlja mnogo složeniji numerički zadatak.

ZAHVALNICA

Osjećamo potrebu da istaknemo da i ovaj rad predstavlja rezultat naučne saradnje sa istraživačkim centrom Ujedinjenim institutom za Nuklearna istraživanja (JINR) u Dubni (Rusija). Posebno se zahvaljujemo Prof. N. M. Plakidi iz JINR – Dubna za mnogobrojne korisne komentare.

4. DODATAK

Relacija (10) se često koristi u metodu GF. Ovdje navodimo njen jednostavan dokaz [10]. Razdvojimo realni i imaginarni dio izraza $1/(x \pm i\varepsilon)$,

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \frac{x \mp i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \qquad (\varepsilon \to 0+). \tag{44}$$

Uzevši u obzir da je jedna od reprezentacija Dirakove 'δ-funkcije'

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \tag{45}$$

onda se imaginarni dio izraza (45) može zapisati u obliku imaginarnog dijela relacije (10). Realni dio pomnožimo sa funkcijom $f(x)$ koja je neprekidna u $x = 0$, pa sprovedimo integraciju po x

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2 + \varepsilon^2} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \lim_{\eta \to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\eta} + \int_{-\eta}^{+\eta} + \int_{+\eta}^{+\infty} \right) \frac{xdx}{x^2 + \varepsilon^2} f(x). \tag{46}$$

Drugi integral u relaciji (45) je jednak nuli, tj.

$$\lim_{\eta \to 0+} \int_{-\eta}^{+\eta} \frac{xdx}{x^2 + \varepsilon^2} f(x) \cong f(0) \lim_{\eta \to 0+} \frac{1}{2} \ln(x^2 + \varepsilon^2)|_{-\eta}^{+\eta} = f(0) \lim_{\eta \to 0+} \frac{1}{2} \ln \frac{\eta^2 + \varepsilon^2}{\eta^2 + \varepsilon^2} \equiv 0. \tag{47}$$

Ako zamijenimo redosljed traženja granične vrijednosti u preostala dva integrala, onda se konačno dobija relacija

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2 + \varepsilon^2} f(x) = \lim_{\eta \to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\eta} + \int_{+\eta}^{+\infty} \right) \frac{dx}{x} f(x). \tag{48}$$

Postavljanjem $f(x) \equiv 1$ u relaciji (48), dobija se i realni dio relacije (10).

LITERATURA

[1] N. N. Bogoljubov, *Lekcii po kvantovoj statistike. Izabranie trudi*, "Naukova dumka", Kiev 1970.

[2] D. N. Zubarev, *Neravnovesnaja statističeskaja termodinamika*, "Nauka" Moskva, 1971.

[3] N. M. Plakida, *Nektorie voprosi kvantovoj teorii tverdogo tela*, MGU, Moskva 1974.

[4] N. M. Plakida, V.Yu. Yushankhai, I. V. Stasyuk, *Physica C*. 1989. V. 160. P.80.

[5] V. Yu. Yushankhai, N.M. Plakida and P. Kalinay, *Physica C.* 1991. V. 174. P. 401.

[6] N. M. Plakida, V.S. Oudovenko. *Phys. Rev. B.* 1999. V. 59. P. 11949.

[7] Ž. Kovačević, I. Chaplygin, R. Hayn and N.M. Plakida}. *Eur. Phys*. J. B. 2000. V. 18. P. 377.

[8] N. M. Plakida, *JETP Letters*, 2001. V. 74. P. 36.

[9] Ž. Kovačević, N.M. Plakida and R. Hayn, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2003. V. 136 (2). P. 1166.

[10] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë *Quantum mechanics*, Herman, Paris and J. Wiley, New York 1977.