ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 18, 2009.

ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 18, 2009

THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS
GLASNIK OF THE SECTION OF NATURAL SCIENCES, 18, 2009.

UDK 531.01:517.928

R. M. Bulatović, M. Kažić****

O ASIMPTOTSKI STABILNIM SISTEMIMA SA VELIKOM NEPOTPUNOM DISIPACIJOM

Izvod

U radu se razmatra uticaj veličine nepotpunog prigušenja, iskazane preko jednog skalarnog parametra, na karakter kretanja asimptotski stabilnih linearnih mehaničkih sistema sa konačnim brojem stepena slobode. Na osnovu analize prirode sopstvenih vrijednosti zaključuje se da su pri dovoljno velikom prigušenju ovi sistemi djelimično oscilatorni. U tom slučaju, broj prigušenih oscilatornih modova jednak je razlici broja stepena slobode i ranga matrice disipativnih sila. Specijalno, data je kompletna analiza uticaja prigušenja na oscilatornost sistema sa dva stepena slobode, koja pokazuje da postoje neoscilatorni sistemi, kao tipična klasa, na konačnom intervalu promjene parametra prigušenja.

1. UVODNA RAZMATRANJA

Dinamika linearnog viskozno prigušenog elastičnog sistema sa n stepena slobode opisana je vektorsko-matričnom diferencijalnom jednačinom drugog reda

$$A\ddot{q} + \beta B\dot{q} + Cq = 0\,,\ q \in R^n\,,\ \cdot = \frac{d}{dt}\,, \tag{1}$$

[*] Mašinski fakultet Univerziteta Crne Gore

gdje su A, B i C realne simetrične matrice reda n, a $\beta \in R^+$. Inercijska A i matrica krutosti C su pozitivno definitne (>0), dok je matrica prigušenja βB, u opštem slučaju, pozitivno semidefinitna (≥ 0). Pozitivni parametar β karakteriše intezitet disipativnih sila. Kada je $rank\,B$ = n (B>0) prigušenje je potpuno, a u slučaju kada je $rank\,B$ < n govori se o nepopunom (djelimičnom) prigušenju.

Potpuno prigušen sistem (1) je asimptotski stabilan, a u slučaju nepotpunog prigušenja on je ili asimptotski stabilan (tada se govori o prožimajućem prigušenju) ili samo stabilan [1]. U poslednjem slučaju, posredstvom odgovarajuće koordinatne transformacije, sistem se može raspregnuti na dva međusobno nepovezana podsistema od kojih je jedan asimptotski stabilan a drugi neprigušen [2]. Imajući u vidu ovu činjenicu, dalje ćemo pretpostavljati da je nepotpuno prigušeni sistem (1) asimptotski stabilan i razmatraćemo uticaj veličine prigušenja (parametra β) na karakter kretanja sistema.

Pošto je A pozitivno definitna a B pozitivno semidefintna matrica, postoji nesingularna realna matrica Q takva da je

$$Q^T A Q = I \,, \qquad Q^T B Q = D \tag{2}$$

gdje je I jedinična a D dijagonalna matrica (v., npr., [3]), koju je pogodno zapisati u obliku

$$D = \left(\begin{array}{c|c} D_{11} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), D_{11} = diag(d_1, \ldots, d_k)\,, \tag{3}$$

pri čemu je $k = rankB$ i $d_k \geq d_{k-1} \geq \ldots \geq d_1 > 0$. Linearnom zamjenom koordinata

$$q = Q\left(\begin{array}{c} y \\ \hline z \end{array}\right), \qquad y \in R^k, z \in R^{n-k} \tag{4}$$

imajući u vidu (2) i (3), jednačina (1) se svodi na oblik

$$\left(\begin{array}{c} \ddot{y} \\ \hline \ddot{z} \end{array}\right) + \beta \left(\begin{array}{c|c} D_{11} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \dot{y} \\ \hline \dot{z} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{12}^T & K_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y \\ \hline z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \end{array}\right) \tag{5}$$

gdje je

$$K = Q^T C Q = \left(\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hdashline K_{12}^T & K_{22} \end{array}\right) \tag{6}$$

transformisana matrica krutosti podijeljena na blokove saglasno podjeli matrice D.

Pretpostavljajući rješenje jednačine (5) u obliku

$$\begin{pmatrix} y \\ \hdashline z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ \hdashline Z \end{pmatrix} \exp(\lambda t) \tag{7}$$

prelazi se na sopstveni zadatak

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda^2 I_k + \lambda\beta D_{11} + K_{11} & K_{12} \\ \hdashline K_{12}^T & \lambda^2 I_{n-k} + K_{22} \end{array}\right) \begin{pmatrix} Y \\ \hdashline Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hdashline 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

gdje je sa I_r označena jedinična matrica reda r, a broj λ i vektor $U = \left(Y^T \mid Z^T\right)^T$ koji zadovoljavaju (8) su sopstveni par sistema – sopstvena vrijednost i sopstveni vektor, respektivno. Razmatrani sistem ima 2n sopstvenih vrijedenosti - rješenja karakteristične jednačine

$$\Delta(\lambda, \beta) = \det \left(\begin{array}{c|c} \lambda^2 I + \lambda\beta D_{11} + K_{11} & K_{12} \\ \hdashline K_{12}^T & \lambda^2 I + K_{22} \end{array}\right) = 0 \tag{9}$$

S obzirom da se prepostavlja da je sistem asimptotski stabilan, za što je potrebno i dovoljno da bude [4]

$$rank\left(K_{12}^T \mid K_{22}K_{12}^T \mid \ldots \mid K_{22}^{n-k-1}K_{12}^T\right)^T = n-k, \tag{10}$$

sopstvene vrijednosti su kompleksni brojevi sa negativnim realnim i različitim od nule imaginarnim djelovima (tada se javljaju u konjugovanim parovima) ili negativni realni brojevi. Konjugovano kompleksnim sopstvenim vrijednostima odgovara prigušeno oscilatorno kretanje, a realnim – eksponencijalno opadajuće neoscilatorno kretanje.

Prema tome, sistem (1), odnosno (5), je oscilatoran (svako kretanje je oscilatornog karaktera) ako su sve njegove sopstvene vrijednosti kompleksni brojevi, djelimično oscilatoran ako njegov spektar, osim realnih brojeva, sadrži bar jedan konjugovano kompleksni par i neoscilatoran ako su sve sopstvene vrijednosti sistema realni brojevi. Određivanje prirode kretanja viskozno prigušenih sistema, zaobilazeći direktno računanje sopstvenih vrijednosti, ima ne samo teorijski već i praktičan značaj [1], [5]. Sistem (5) je oscilatoran ako je $\beta < 2d_k^{-1}\Omega_1$, gdje je Ω_1 najmanja kružna frekvencija odgovarajućeg neprigušenog sistema [6]. S druge strane, dobro je poznato da je *potpuno* prigušeni sistem neoscilatoran pri dovoljno velikim vrijednostima parametara β (recimo za $\beta > 2d_1^{-1}\Omega_n$, Ω_n - najveća kružna frekvencija neprigušenog sistema, v.[7]). Osim toga, u svim poznatim kriterijumima neoscilatornosti formulisanim preko opisnih matrica pretpostavlja se definitnost matrice D, tj. oni su neprimjenljivi na djelimično prigušene sisteme, [7], [8].

U ovom radu, u narednom odjeljku, analizira se uticaj veličine parametra β na karakter kretanja djelimično prigušenih sistema sa dva stepena slobode. Iz ove analize slijedi:

1) ne postoji, za razliku od slučaja potpunog prigušenja, vrijednost β_0 takva da je za $\beta \in (\beta_0, \infty)$ sistem neoscilatoran;

2) postoje dvije tipične klase sistema od kojih jedna takva da pod uticajem djelimičnog prigušenja ne može biti neoscilatorna i druga – neoscilatorna na nekom konačnom intervalu promjene parametra β. Karakter kretanja se mijenja pri onim vrijednostima parametara β pri kojim dolazi do bifurkacije sopstvenih vrijednosti sistema.

U odjeljku 3 pokazuje se da svojstvo 1) važi i za sisteme sa proizvoljnim konačnim brojem stepena slobode. Više od toga, dokazuje se da je u graničnom slučaju kada $\beta \to \infty$ broj prigušenih oscilatornih modova sistema (konjugovano kompleksnih parova sopstvenih vrijednosti) jednak razlici broja stepeni slobode sistema i ranga matrice disipativnih sila.

2. SISTEM SA DVA STEPENA SLOBODE

Za n = 2, u jednačini (5), odnosno (8), D_{11}, K_{11}, K_{22} i K_{12} su skalarne veličine; pozitivni skalar D_{11} može se pridružiti parametru β, tj. uzeti da je $D_{11} = 1$. Pozitivna definitnost matrice K i uslov asimptotske stabilnosti (10) nameću sljedeća ograničenja na koeficijente krutosti:

$$K_{11} > 0, \qquad K_{11}K_{22} - K_{12}^2 > 0, \qquad K_{12} \neq 0 \tag{11}$$

Ako se u (5) predje na bezdimenziono vrijeme $\tau = \sqrt{K_{22}}t$ i za tako dobijeni sistem razvije odgovarajuća jednačina (9), dobija se karakteristična jednačina četvrtog stepena

$$\Delta(\lambda,\gamma) = \lambda^4 + \gamma\lambda^3 + (a+1)\lambda^2 + \gamma\lambda + a - b = 0, \tag{12}$$

gdje su:

$$\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{K_{22}}}, \quad a = \frac{K_{11}}{K_{22}}, \quad b = \frac{K_{12}^2}{K_{22}^2}, \tag{13}$$

a uslovi (11) se svode na uslov

$$0 < b < a \tag{14}$$

Da bi ispitali uticaj veličine koeficijenta prigušenja γ na karakter kretanja razmatranog sistema uočimo krivu

$$\Gamma = \left\{(\lambda,\gamma) \in \Re^2 : \Delta(\lambda,\gamma) = 0, \lambda < 0\right\}, \tag{15}$$

koju ćemo zvati karakteristična kriva sistema. Ona je grafik funkcije

$$\gamma = -\frac{\lambda^4 + (1+a)\lambda^2 + a - b}{\lambda(\lambda^2+1)}, \quad \lambda \in (-\infty, 0), \tag{16}$$

čiji je prvi izvod

$$\gamma' = \frac{d\gamma}{d\lambda} = -\frac{f(\lambda^2)}{\lambda^2(\lambda^2+1)^2}, \tag{17}$$

gdje je

$$f(u) = u^3 + (2-a)u^2 + (1-2a+3b)u - (a-b) \tag{18}$$

Karakteristična funkcija (16) ima sljedeće osobine:

1) $\gamma(\lambda) > 0$, $\gamma \to \infty$ kad $\lambda \to -0$ i $\gamma \to \infty$ kad $\lambda \to -\infty$;

2) realni korijen jednačine (12) višestrukosti k (1< k ≤ 4) je kritična tačka funkcije $\gamma(\lambda)$ (nula funkcije (17)) reda k – 1, i obrnuto.

Osobina 2) se dokazuje na osnovu identiteta

$$\frac{d^i\Delta(\lambda,\gamma(\lambda))}{d\lambda^i} = 0, \text{ i} = 1, 2, ... \tag{19}$$

imajući u vidu da je korijen višestrukosti k jednačine (12) istovremeno i korijen jednačina

$$\frac{\partial^i \Delta(\lambda,\gamma)}{\partial \lambda^i} = 0,\ \mathrm{i} = 1,\ldots,\mathrm{k}\text{-}1 \tag{20}$$

Na osnovu prethodnih razmatranja, zaključuje se da je za neku vrijednost koeficijenta prigušenja, recimo $\hat{\gamma}$, broj različitih realnih korijena jednačine (12) jednak broju zajedničkih tačaka karakteristične krive (17) i prave $\gamma = \hat{\gamma}$; tačkama presjeka (transferzalnog) odgovaraju prosti korijeni a tačkama dodira korijeni čija je višestrukost za jedan veća od reda dodira.

Kritičnim tačkama funkcije (16) odgovaraju pozitivne nule polinoma (18). O karakteru nula kubnog polinoma zaključuje se na osnovu znaka njegove diskriminante (v., npr., [9]), koja je u našem slučaju

$$Q = \frac{b}{108}[108b^2 - 9b(1+14a+a^2) + 8(1+a)^3] \tag{21}$$

Kada je $Q > 0$ dvije nule su konjugovano kompleksni brojevi, a kada je $Q \le 0$ sve tri nule su realne. Kriva

$$B = \{(a,b) \in \Re^2 : Q(a,b) = 0, 0 < b < a\} \tag{22}$$

sastoji se od dvije grane – grafika funkcija

$$b_{\pm} = \frac{1}{24}[a^2 + 14a + 1 \pm (a-5)\sqrt{(a-5)(a+1/3)}], \tag{23}$$

definisanih za $a \ge 5$, sl. 1. Tačka (5,4) je povratna tačka krive B, gornja grana b_+ presijeca granicu oblasti asimptotske stabilnosti (14) u tački (8,8), a donja grana b_- asimptotski se približava pravoj

$$b = \frac{8}{9}a - \frac{32}{27}, \tag{24}$$

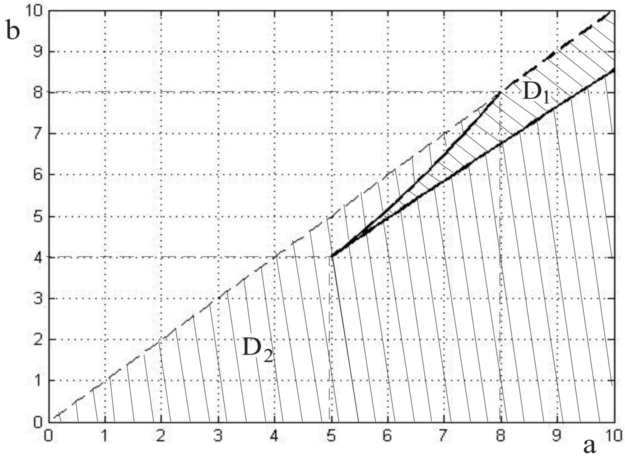
sa gornje strane kada $a \to \infty$, ne presijecajući je nu u jednoj tački. U oblasti

$$D_1 = \{(a,b) : a \ge 5, b_- \le b \le b_+, b < a\} \tag{25}$$

je $Q \le 0$ i, dakle, polinom (18) ima tri realne nule računajući njihovu višestrukost, a u oblasti

$$D_2 = \{(a,b) : 0 < b < a\} \setminus D_1 \tag{26}$$

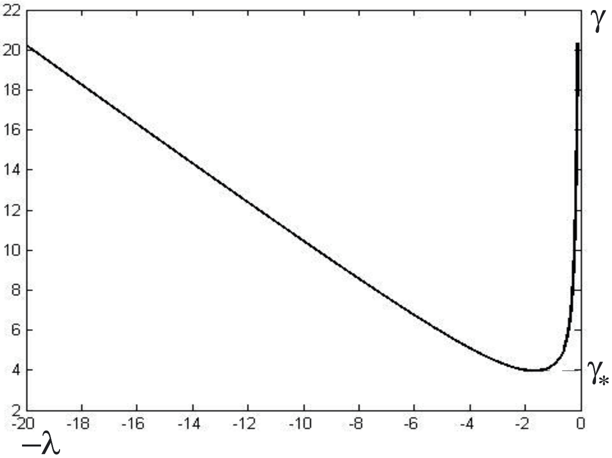
jednu (prostu) realnu nulu, jer je $Q > 0$, koja je pozitivna (zbog $f(0) = b - a < 0$).



Sl. 1

a) Slučaj kad je $(a,b) \in D_2$

Neka je u_* pozitivna nula polinoma (18). Tada je $\lambda_* = -\sqrt{u_*}$ jedinstvena kritična tačka funkcije (16) – tačka regularnog minimuma ($\gamma''(\lambda_*) > 0$) i karakteristična kriva izgleda kao na sl. 2.



Sl. 2

Za $0 < \hat{\gamma} < \gamma_*$, $\gamma_* = \gamma(\lambda_*) > 0$, prava $\gamma = \hat{\gamma}$ nema zajedničkih tačaka sa karakterističnom krivom sistema i, dakle, svi korijeni karakteristične jednačine (12) su kompleksni brojevi, odnosno svako moguće kretanje sistema je oscilatorno. Za $\hat{\gamma} \geq \gamma_*$, prava $\gamma = \hat{\gamma}$ ili presijeca karakterističnu krivu u dvije tačke ($\hat{\gamma} > \gamma_*$), ili je dodiruje ($\hat{\gamma} = \gamma_*$), pa jednačina (12) ima ili dva prosta realna korijena ili dvostruki realan korijen, respektivno, i dva konjugovano kompleksna korijena pa je sistem djelimično oscilatoran.

b) Slučaj kad je $(a,b) \in D_1$

Neka su u_{*_i} $(i = 1,2,3)$ realne nule polinoma (18). Pošto je u D_1, $a \geq 5$, $b < a$ i $27b > 24a - 32$, u ovoj oblasti biće: $2 - a < 0, 1 - 2a + 3b > 0$, $-(a-b) < 0$, pa u skladu sa Dekartovim pravilom [9], broj pozitivnih nula polinoma (18) je ili 1 ili 3.S druge strane, ako isto pravilo primijenimo na polinom $f(-u)$ zaključujemo da $f(u)$ nema negativnih nula. Slijedi, u oblasti D_1 sve tri realne nule u_{*_i} moraju biti pozitivne i to: proste kad je $(a,b) \in D_1 \setminus B$, jedna trostruka u povratnoj tački i jedna prosta i jedna dvostruka nula u ostalim tačkama krive *B*.

b.1) $(a,b) \in D_1 \setminus B$

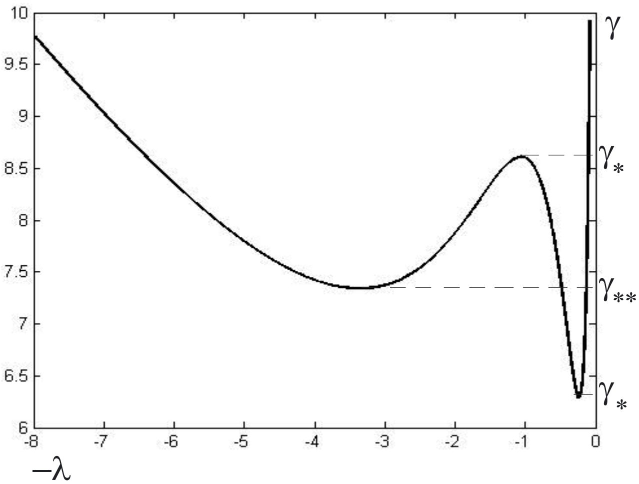
Neka je $u_{*1} < u_{*2} < u_{*3}$. Tada su $\lambda_{*1} = -\sqrt{u_{*1}}$ i $\lambda_{*3} = -\sqrt{u_{*3}}$ tačke regularnih lokalnih minimuma, a $\lambda_{*2} = -\sqrt{u_{*2}}$ tačka regularnog lokalnog maksimuma funkcije (16), sl. 3. Neka su: $\gamma_* = \min\{\gamma(\lambda_{*1}), \gamma(\lambda_{*3})\}$, $\gamma_{**} = \max\{\gamma(\lambda_{*1}), \gamma(\lambda_{*3})\}$ i $\gamma^* = \gamma(\lambda_{*2})$. Jasno je da je $\gamma_* \leq \gamma_{**} < \gamma^*$. Zaključujući analogno kao pod a), u pojedinim intervalima vrijednosti koeficijenta prigušenja broj realnih rješenja jednačine (12) je kako slijedi

– $\gamma \in (0, \gamma_*)$ – četiri konjugovano kompleksna korijena (oscilatorni sistem);

– $\gamma \in [\gamma_*, \gamma_{**})$ – dva realna i dva konjugovano kompleksna korijena (djelimično oscilatoran sistem);

– $\gamma \in [\gamma_{**}, \gamma^*]$ – četiri realna korijena (neoscilatoran sistem);

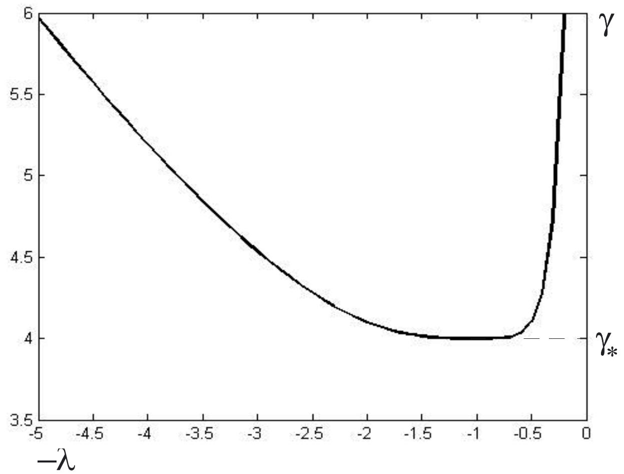
– $\gamma \in (\gamma^*, \infty)$ – dva realna i dva konjugovano kompleksna korijena (djelimično oscilatoran sistem)



Sl. 3

b.2) $(a,b)=(5,4)$

Polinom (18) ima trostruku nulu $u_* = 1$ kojoj odgovara tačka singularnog minimuma $\lambda_* = -1$ funkcije (18) ($\gamma''(-1)=\gamma'''(-1)=0, \gamma^{(IV)}(-1)>0$) sa kritičnom vrijednošću $\gamma_* = 2$, sl. 4. Kad je $\gamma \in (0,2)$ sistem je oscilatoran, za $\gamma = 2$ - neoscilatoran (četvorostruki realni korijen jednačine (12)) i za $\gamma \in (2,\infty)$ djelimično oscilatoran (dva realna i dva konjugovano kompleksna korijena).



Sl. 4

b.3) $(a,b) \in B \setminus (5,4)$

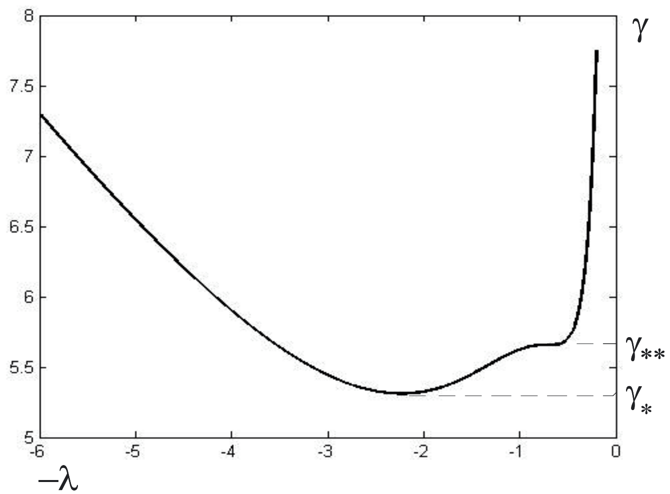
Polinom (18) ima jednu prostu u_{*1} i jednu dvostruku nulu $u_{*2} = u_{*3}$, kojima respektivno odgovara tačka regularnog minimuma $\lambda_{*1} = -\sqrt{u_{*1}}$ (dvostruki korijen jednačine (12)) i prevojna tačka $\lambda_{*2} = -\sqrt{u_{*2}}$ (trostruki korijen jednačine (12)) karakteristične funkcije (16), sl. 5. Karakter sistema u pojedinim intervalima vrijednosti koeficijenta prigušenja je:

– $\gamma \in (0, \gamma_*)$, $\gamma_* = \gamma(\lambda_{*1})$ – oscilatoran sistem;

– $\gamma \in [\gamma_*, \gamma_{**}), \gamma_{**} = \gamma(\lambda_{*2})$ – djelimično oscilatoran sistem;

– $\gamma = \gamma_{**}$ – neoscilatoran sistem;

– $\gamma \in (\gamma_{**}, \infty)$ – djelimično oscilatoran sistem.

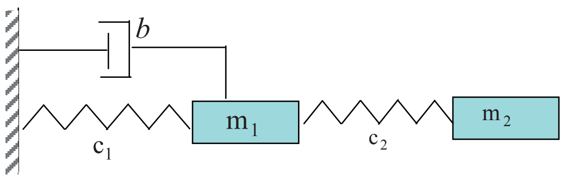


Sl. 5

Podvucimo da svaki neprigušeni sistem, asimptotski stabilan poslije uvođenja djelimičnog prigušenja, je predstavljen tačkom (a,b) u oblasti $\{(a,b) \in \Re^2 : 0 < b < a\}$, pri čemu parametri a i b zavise od inercionih i elastičnih koeficijenata sistema. Kriva B, čije su grane određene formulama (23), dijeli ovu oblast na dva dijela, odnosno razmatrane sisteme na dvije tipične klase, čiji se karakter kretanja mijenja na isti način sa promjenom parametra prigušenja γ, što je opisano u gore navedenim slučajevima a) i b.1) . Karakter kretanja (priroda sopstvenih vrijednosti) se mijenja pri onim vrijednostima parametra γ koje odgovaraju kritičnim vrijednostima karakteristične funkcije (16). Naime, kada γ rastući dostigne minimalnu vrijednost tada se par konjugovano kompleksnih sopstvenih vrijednosti stapa u dvostruku realnu sopstvenu vrijednost, koja se sa daljim povećanjem parametra γ razdvaja na dvije međusobno udaljavajuće proste realne sopstvene vrijednosti. S druge strane, kada γ rastući dostigne maksimalnu vrijednost dvije realne sopstvene vrijednosti, međusobno se približujući, stapaju se u jednu dvostruku, koja se sa daljim povećanjem parametra γ razdvaja na par konjugovano kompleksnih brojeva.

Sistemi za koje je $(a,b) \in B$ su „netipičnog" karaktera, jer malom proizvoljnom promjenom parametara a i b prelaze u jednu od navedenih tipičnih klasa.

Primjer 1. Razmotrimo jednostrano vezani lančani sistem, sl. 6, koji čine dva translatorno pokretna tijela masa $m_1 = m$ i $m_2 = 9m$, elastične opruge krutosti $c_1 = c$ i $c_2 = 9c$, kao i viskozni prigušivač sa koeficijentom prigušenja β.



Sl. 6

Za navedeni primjer jednostavno se nalazi

$$K_{11} = 10\frac{c}{m},\ K_{12} = -3\frac{c}{m},\ K_{22} = \frac{c}{m},$$

i prema (13):

$$\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{cm}}, \ a = 10, \ b = 9$$

Pošto je $(10,9) \in D_1 \setminus B$ (v. sl.1), sistem pripada slučaju b.1. Na osnovu nula polinoma (18), koje su:

$$u_{*1} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}, \ u_{*2} = 1, \ u_{*3} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2},$$

izračunavaju se ekstremalne vrijednosti karakteristične funkcije (16):

$$\gamma_* = \gamma_{**} = 6, \ \gamma^* = 6.5$$

Prema tome, sistem je oscilatoran za $0 < \beta < 6\sqrt{cm}$, neoscilatoran za $6\sqrt{cm} \leq \beta \leq 6.5\sqrt{cm}$ i djelimično oscilatoran za $\beta > 6.5\sqrt{cm}$.

Sopstvene vrijednosti sistema, dobijene numeričkim rješavanjem njegove karakteristične jednačine

$$\lambda^4 + \gamma\lambda^3 + 11\lambda^2 + \gamma\lambda + 1 = 0,$$

za dolje naznačene vrijednosti parametra γ, su kao što slijedi

$$\gamma = 5.9: \ \lambda_{1,2} = -0.3648 \pm 0.0896i, \ \lambda_{3,4} = -2.5852 \pm 0.635i;$$

$$\gamma = 6.2: \lambda_1 = -0.2775, \lambda_2 = -0.5726, \lambda_3 = -1.5726, \lambda_4 = -3.6035;$$

$$\gamma = 6.6: \ \lambda_{1,2} = -0.9626 \pm 0.27096i, \ \lambda_3 = -0.2247, \ \lambda_4 = -4.4501;$$

što je, očigledno, u skladu sa prethodnim zaključkom o karakteru kretanja datog sistema.

4. SISTEM SA n >2 STEPENA SLOBODE

Prethodna analiza pokazuje da koliko god bilo veliko djelimično prigušenje, kada je ono iznad određene dovoljno velike vrijednosti, sistem sa dva stepena slobode ima par konjugovano kompleksnih sopstvenih vrijednosti i dvije realne sopstvene vrijednosti. Ovaj zaključak se može uopštiti i na slučaj sistema sa proizvoljnim konačnim brojem stepena slobode. Naime, važi sljedeća teorema.

Teorema 1. Pri dovoljno velikoj vrijednosti parametra β, asimptotski stabilan sistem (1), odnosno (7), ima 2k, $k = rankB$, realnih i 2(n – k) kompleksnih sopstvenih vrijednosti.

Za dokaz teoreme 1 trebaju nam sljedeće dvije leme.

Lema 1. Kompleksna rješenja jednačine (11), nezavisno od veličine parametra β, leže u krugu

$$\{\lambda \in C : |\lambda| \leq \Omega_n\}, \tag{29}$$

gdje je $\Omega_n = \sqrt{\lambda_{\max}(K)}$ najveća kružna frekvencija odgovarajućeg neprigušenog sistema ($\beta = 0$).

Dokaz. Neka je $(\lambda \in C, U \in C^n, \mathrm{Im}(\lambda) \neq 0, \overline{U}^T U = 1)$ sopstveni par zadatka (10). Množeći s lijeva (10) sa konjugovano kompleksnim transponovanim vektorom $\overline{U}^T$, dobijamo

$$\lambda^2 + \lambda\beta\overline{U}^T DU + \overline{U}^T KU = 0 \tag{30}$$

gdje su D i K matrice oblika (5) i (8), respektivno. Očigledno je $\overline{U}^T DU \geq 0$ i $\overline{U}^T KU > 0$, jer je $D = D^T \geq 0$ i $K = K^T > 0$. Rješenja kvadratne jednačine (30) su

$$2\lambda = -\beta\overline{U}^T DU \pm i\sqrt{4\overline{U}^T KU - (\beta\overline{U}^T DU)^2}\ , \tag{31}$$

odakle je

$$|\lambda|^2 = \overline{U}^T KU \leq \lambda_{\max}(K) = \Omega_n^2 . \ \square$$

Lema 2. Ako je β dovoljno veliko, onda k rješenja jednačine (11) leže u krugovima

$$\left\{\lambda \in C : |\lambda + \beta d_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |k_{ij}|\right\}, \text{ i} = 1,...,\text{k} \tag{32}$$

a ostala se nalaze u krugu

$$\left\{\lambda \in C : |\lambda| \leq \max(1, \max_{k<i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |k_{ij}|)\right\} \tag{33}$$

Dokaz. Rješenja karakteristične jednačine (11) se poklapaju sa sopstvenim vrijednostima 2n x 2n matrice

$$G = \left(\begin{array}{c|c} -\beta D & -K \\ \hline I & 0 \end{array}\right) \tag{34}$$

Prema Geršgorinovoj teoremi [3], sve sopstvene vrijednosti matrice G leže u uniji krugova

$$\bigcup_{i=1}^{2n}(\lambda \in C : |\lambda - g_{ii}| \leq R_i), \; R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2n} |g_{ij}|, \tag{35}$$

a ako je unija r krugova povezana oblast koja se ne presijeca sa ostalim krugovima, onda u njoj leži tačno r sopstvenih vrijednosti. U našem slučaju je

$$g_{ii} = \begin{cases} -\beta d_i, i = 1,\ldots,k \\ 0, i = k+1,\ldots,2n \end{cases} \tag{36}$$

i

$$R_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} |k_{ij}|, i = 1,\ldots,n \\ 1, i = n+1,\ldots,2n \end{cases} \tag{37}$$

Pošto poluprečnici (37) ne zavise od parametra β, povezana oblast

$$\bigcup_{i=k+1}^{2n} \{\lambda \in C : |\lambda| \leq R_i\} \tag{38}$$

za dovoljno veliko β, neće imati zajedničkih tačaka sa krugovima

$$\{\lambda \in C : |\lambda + \beta d_i| \leq R_i\}, \text{ i = 1,...,k} \tag{39}$$

Slijedi, da tada 2n – k sopstvenih vrijednosti matrice G leži u krugu (33), a k u krugovima (32).

Dokaz teoreme 1. Iz lema 1 i 2 slijedi da su, za dovoljno velike vrijednosti parametra β, k rješenja jednačine (11), smještenih u krugovima (32), realni brojevi koji teže ka $-\infty$ kada $\beta \to \infty$. Dalje ćemo pokazati da od 2n – k sopstvenih vrijednosti smještenih u krugu (33) k realnih teže nuli , a preostalih 2(n – k) teže nenultim imaginarnim vrijednostima kada β neograničeno raste. Dalje ćemo razmotriti granično ponašenje sopsvenih vrijednosti ograničenih (smještenih) u krugu (33) kada β neograničeno raste.

Uočimo jednačinu

$$\widetilde{\Delta}(\widetilde{\lambda}, \beta) = \det(\widetilde{\lambda}^2 K + \widetilde{\lambda} \beta D + I) = 0 \tag{40}$$

čiji su korijeni, očigledno, recipročne vrijednosti korijena jednačine (11). Pošto je $K > 0$ i $D \geq 0$, $rankD = k$, postoji nesingularna realna matrica $\widetilde{Q}$ takva da je

$$\widetilde{Q}^T K \widetilde{Q} = I \text{ , } \widetilde{Q}^T DQ = \widetilde{D} = diag(\widetilde{d}_1,...,\widetilde{d}_k,0,...,0) \tag{41}$$

gdje je $\widetilde{d}_i > 0$, i = 1,...,k. Slijedi, (40) je ekvivalentno jednačini

$$\det(\widetilde{\lambda}^2 I + \widetilde{\lambda}\beta\widetilde{D} + \widetilde{K}) = 0 \tag{42}$$

gdje je $\widetilde{K} = \widetilde{Q}^T \widetilde{Q} > 0$, koja je, dakle, iste strukture kao i jednačina (11). Kada $\beta \to \infty$, na osnovu leme 2, k realnih rješenja jednačine (42) teži ka $-\infty$, odnosno k realnih rješenja jednačine (11) teži ka nuli, a 2(n – k) preostalih rješenja iz kruga (33) imaju nenulte granice.

Neka je $\lambda(\beta)$ jedna od ograničenih sopstvenih vrijednosti sa nenultom granicom, a $U(\beta) = (Y^T(\beta) \mid Z^T(\beta))^T$ njen jedinični sopstveni vektor. Pretpostavimo da $\lambda(\beta) \to \lambda_0 \neq 0$ i $U(\beta) \to U_0 = (Y_0^T \mid Z_0^T)^T$ kada $\beta \to \infty$. Iz (10) dobijamo

$$(\lambda^2(\beta)I_k + \lambda(\beta)\beta D_{11} + K_{11})Y + K_{12}Z = 0 \tag{43}$$

i

$$K_{12}^T Y + (\lambda^2(\beta)I_{n-k} + K_{22})Z = 0 \tag{44}$$

Množeći (43) s lijeva sa $\overline{Y}^T$ slijedi

$$\overline{Y}^T(\lambda^2(\beta)I_k + K_{11})Y + \overline{Y}^T K_{12}Z = -\lambda(\beta)\beta\overline{Y}^T D_{11}Y \tag{45}$$

odakle, s obzirom da je lijeva strana ove jednakosti ograničena kada $\beta \to \infty$, $\lambda_0 \neq 0$ i $D_{11} > 0$, zaključujemo da je $Y_0 = 0$. U graničnom slučaju, uzimajući da je $Y_0 = 0$, (44) daje

$$(\lambda_0^2 I_{n-k} + K_{22})Z_0 = 0, \tag{46}$$

tj. λ_0 je jedan od 2(n – k) korijena jednačine

$$\det(\lambda^2 I_{n-k} + K_{22}) = 0, \tag{47}$$

koji su čisto imaginarni brojevi, jer je $K_{22} > 0$. Odavde, imajući u vidu neprekidnu zavisnost sopstvenih vrijednosti od parametra β, zaključujemo da 2(n – k) sopstvenih vrijednosti iz kruga (33), za dovoljno veliko β, moraju biti kompleksni brojevi.

Ne umanjujući opštost, može se smatrati da je (n – k) dimenziona podmatrica K_{22} matrice (8) dijagonalna, tj.

$$K_{22} = diag(\tilde{\omega}_1^2, ..., \tilde{\omega}_{n-k}^2) \tag{48}$$

Zaista, pošto je K_{22} simetrična pozitivno definitna matrica reda n – k postoji ortogonalna matrica Q_1 reda n–k, takva da je $Q_1^T K_{22} Q_1 = diag(\tilde{\omega}_1^2, ..., \tilde{\omega}_{n-k}^2)$. Zamjenom koordinata

$$\begin{pmatrix} y \\ \hline z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & Q_1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \hline \tilde{z} \end{pmatrix} \tag{49}$$

zadržava se struktura sistema (7), ali sa dijagonalnom podmatricom K_{22}.

Teorema 2. Kompleksne sopstvene vrijednosti sistema (7), (48) su određene sledećim izrazima

$$\lambda_l^{\pm} = -\frac{1}{2\beta\tilde{\omega}_l^2} \sum_{j=1}^{k} \frac{k_{jk+l}^2}{d_j} \pm i\tilde{\omega}_l + o(\beta^{-1}),\ l = 1, ..., n-k \tag{50}$$

kada $\beta \to \infty$.

Dokaz. Iz (10), nakon smjene $\beta = 1/\varepsilon$, dobijamo

$$(\varepsilon\lambda^2 I_k + \lambda D_{11} + \varepsilon K_{11})Y + \varepsilon K_{12} Z = 0 \tag{51}$$

i

$$K_{12}^T Y + (\lambda^2 I_{n-k} + K_{22}) Z = 0 \tag{52}$$

Unoseći

$$\lambda = \lambda^{(0)} + \varepsilon\lambda^{(1)} + \dots,\ \lambda^{(0)} \neq 0, \tag{53}$$

i

$$Y = Y^{(0)} + \varepsilon Y^{(1)} + \dots,\ Z = Z^{(0)} + \varepsilon Z^{(1)} + \dots \tag{54}$$

u (51) i (52), slijedeći perturbacioni metod, prvo dobijamo

$$\lambda^{(0)} D_{11} Y^{(0)} = 0\,, \tag{55}$$

i

$$K_{12}^T Y^{(0)} + (\lambda^{(0)2} I_{n-k} + K_{22}) Z^{(0)} = 0\,, \tag{56}$$

a zatim

$$(\lambda^{(0)2} I_k + \lambda^{(1)} D_{11} + K_{11}) Y^{(0)} + K_{12} Z^{(0)} + \lambda^{(0)} D_{11} Y^{(1)} = 0\,, \tag{57}$$

i

$$K_{12}^T Y^{(1)} + 2\lambda^{(0)} \lambda^{(1)} I_{n-k} Z^{(0)} + (\lambda^{(0)2} I_{n-k} + K_{22}) Z^{(1)} = 0 \tag{58}$$

Iz (55), slijedi da je $Y^{(0)} = 0$, jer je $\lambda^{(0)} \neq 0$, a potom iz (56) određujemo

$$\lambda_l^{(0)2} = -\widetilde{\omega}_l^2\,,\ Z_l^{(0)} = (\delta_l^1, ..., \delta_l^{n-k})^T\,,\ l = 1, ..., n-k \tag{59}$$

gdje su δ_l^i Kronekerovi delta-simboli. Sada je, na osnovu (57),

$$\lambda_l^{(0)} Y_l^{(1)} = -D_{11}^{-1} K_{12} Z_l^{(0)} \tag{60}$$

Kada se (58) pomnoži s lijeva vektorom $Z_l^{(0)T}$ i u tako dobijenu jednačinu unese (60), iz nje se nalazi

$$\lambda_l^{(1)} = -\frac{1}{2\widetilde{\omega}_l^2} Z_l^{(0)T} K_{12}^T D_{11}^{-1} K_{12} Z_l^{(0)} = -\frac{1}{2\widetilde{\omega}_l^2} \sum_{j=1}^{k} \frac{k_{jk+l}^2}{d_j}\,, \tag{61}$$

jer je $(\widetilde{\omega}_l^2, Z_l^{(0)})$ sopstveni par matrice K_{22}. □

LITERATURA

[1] Inman D. J., *Vibration with Control*, Wiley, 2006.

[2] Bulatović R. M., A note on the damped vibrating systems, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 33, No. 3, 2006, pp. 213-221.

[3] Horn R. A., Johnson C. R., *Matrix Analysis,* Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[4] Bulatović R. M., Kažić M., O disipativnim sistemima sa prožimajućim prigušenjem, Glasnik Odjeljenja prirodnih nauka CANU, br. 17, 2007, str. 5-18.

[5] Papargyri-Beskou S., Beskos D. E., On critical viscous damping determination in linear discrete dynamic system, Acta Mechanica, Vol. 153, 2002, pp. 33-45.

[6] Müller P. C., Oscillatory damped linear systems, Mechanics Research Communications, Vol. 6, 1979, pp. 81-85.

[7] Bulatović R. M., Non-oscillatory damped multi-degree-of-freedom systems, Acta Mechanica, Vol. 151, 2001, pp. 235-244.

[8] Bulatović R. M., On the heavily damped response in viscously damped dynamic systems, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 71, 2004, pp. 131-134.

[9] Korn G. A., Korn T. M., *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York, 1961.

Ranislav M. Bulatović, Mila Kažić

ON THE ASYMPTOTICALLY STABLE SYSTEMS WITH LARGE INCOMPLETE DISSIPATION

Summary

In the paper the influence of the incomplete dissipation described by the scalar parameter, on the character of motion of the asymptotically stable linear mechanical systems with a finite number of degrees of freedom is studied. Based on the analysis of the nature of the eigenvalues, it is concluded that in the case of large enough dissipation, these systems are partially oscillatory. In that case the number of damped oscillating modes is equal to the number of degrees of freedom minus the rank of the matrix of dissipative forces. Particularly, the complete analysis of the influence of damping on the oscillatority of the system with two degrees of freedom is given. This analysis shows that, on the finite interval of the values of the parameter of dissipation, there exist non-oscillatory systems.