

МИЛОРАД БЕРТОЛИНО, Београд

## ФИЛОЗОФСКИ ЗНАЧАЈ ИДЕЈНИХ ПРАВАЦА У МАТЕМАТИЦИ

Уколико математика више шири своје контакте са све већим бројем других наука и делатности, уколико се више ово „прожимање“ математиком данас осећа као општа потреба и неминовност, утолико и филозофски значај математике бива упадљивији и јаснији. Због тога је ова „математизација“ као све присутнији садржај целине људске делатности достојна филозофског коментара. „Математизам“ се може јавити и као једностраност, претерана претензија, тежња да се неодговарајућим метром мери и оно што таквом мерењу нужно измиче.

У овом чланку не можемо обухватити сву ширину филозофске релеванције математике, „математизације“ и „математизма“, ни формулисати неке коначне ставове о њима у оквиру марксистичког погледа на свет. Даћемо себи следећи, знатно скромнији задатак.

Познато је да постоји више идејних праваца у вези са математиком. Неки од њих се односе на ставове о значају, смислу, будућности појединих математичких теорија, па би могли изгледати као „чисто“ математичка проблематика, са мотивацијама и аргументацијом само унутар математике. Оваква изолованост од ванматематичких система судова често је привидна — у ствари, бива реч о ширим филозофским теоријама „увезеним“ у математику, са циљем да се од математике начини добар пример за те теорије. Такви поступци не остављају, међутим, ни саму математику „неоштећеном“ — они доводе до форсирања једних а запостављања других области или математичких поступака, што математици може, али не мора користити. Други правци се у математици рађају, па прелазе у друге области, тежећи да постану

општи поглед на свет. Таква су проширења бременита претераним упрошћавањем, али могу и знатно освежавати општије, ван-математичке теорије.

Нећемо набрајати све идејне правце једне или друге врсте, или њихових комбинација и међуврсти. Изабраћемо само неке, али их нећемо излагати са свим подробностима, заустављајући се на оном степену који нам се чини довољан за расправу о филозофској вредности односног правца са марксистичког становишта: до које је мере прихватљив, коју тежину има његова евентуална неприхватљивост — да ли општа идејна неприхватљивост значи или не значи и безвредност појединачних математичких резултата који се махом везују за одређене идејне правце. Овде није по среди никаква класификација „изама“ у математици — неки од наведених праваца су супротни једни другима, неки су сродни, неки ужи од других, уклапајући се у њих, нека су неупоредиви и по проблематици у односу на коју се опредељују. Избор је вршен тако да се, по могућству што ефектније, види разноврсност дилема и богатство идејних проблема.

1. Знаменити грчки филозоф Платон изрекао је значајне ставове и када се ради о филозофији математике. За математичаре је термин „платонизам“ (чији је смисао иначе, с обзиром на велику обухватност Платонове мисли, већином знатно шири) првенствено везан за Платонова схватања о математици, нарочито на Платоново тврђење да у објективној стварности нема никаквих тачака, линија, површи, итд., али да је ту ипак реч о ентитетима који објективно егзистирају у некој другој стварности, другом свету на који смо сачували успомене — наше представе о тачкама, линијама, површима и осталим геометријским објектима наша су сећања на бивши свет, у коме смо живели, а у коме они реално егзистирају, у идеалном виду.

Очигледно је Платоново становиште идеалистичко својим стављањем геометријских објеката ван нашег чулног искуства, са јасним мистичним асоцијацијама, и више од тога. Реч је, међутим, о тзв. „објективном идеализму“, јер се нека егзистенција ван нас самих признаје — додуше у свету ирационалном и мистичном.

Овакво схватање, наравно, заслужује онакве коментаре какве и сваки други објективни идеализам и представља „увоз“ таквог идеализма у математику из филозофије, користећи једно опште филозофско становиште за тумачење природе, порекла математичких појмова. Саму математику — њене поступке и развитак оно не мора угрожавати — може чак давати извесну слободу, корисну за апстрактни развој математике који је њен битни саставни део, али ова слобода нипошто није немогућа без објективног идеализма. Напротив, марксистички и дијалектички схваћено јединство категорија одраза и праксе, у коме је активност људска битни чинилац у сазнању, допушта бескрајну стваралачку маштовитост које, међутим, не може бити без почетне и суштинске инспирације из области реалног — људска инвен-

тивност, посебно у области математике, иде, дакако, знатно преко те реалности, залазећи и у област могућег, а не само сазнатог, стварајући веома опште теорије које често налазе и неочекиване примене, али знају и да остану саме себи циљ.

Неоспорно је да је карактер апстраховања који чинимо прелазећи од реалних, чулно доступних (непосредно или посредно) објеката на идеализоване, „чисте“ математичке појмове гносеолошки сложени и везани за не мале филозофске тешкоће. Платонистичко схватање, на начин сличан религијском, као да пребацује тешкоће о којима је реч у једну другу „раван“, овога пута мистичну, која може бити јасна неком вишем уму, а нашој је логици недоступна. Пребацили смо непојамно, или недовољно схватљиво неком другом, па се можемо „мирно“ бавити оним што нам је приступачније, како знамо и умемо.

Међутим, оваква „пребацавања“ не треба олако схватити само као пут мањег отпора. Има у томе и нечега што дубље одговара могућностима нашег сазнавања суштине, које су опет, са своје стране (као објективно условљене) и саме у одређеној врсти склада (никако непротивречног ни праволинијског) са правим „стањем ствари“. Узмимо, рецимо, Геделове ставове о немогућности да се непротивречност довољно развијених математичких теорија докаже средствима њих самих. Ту је доказано, онаквом математичком строгошћу какву данас поседујемо, да се решење проблема непротивречности (крупног и основног питања једне теорије) има решавати негде „другде“, не ту где би се очекивало. То „другде“ за математику у целини није пронађено, али се одатле могу изводити једино закључци у прилог важења својеврсне објективне дијалектике (о чему смо у више махова писали, последњи пут у брошури Дијалектика и савремена математика, Рад 1976. године), а никако, јер за то нема никаквог основа, у смеру некаквих „мистичних додатака“. Или, узмимо чињеницу да су довољно формализоване елементарне теорије бројева непотпуне ако су непротивречне, а противречне ако су потпуне. Чим тежимо потпуности, тј. да у оквиру једне целине решимо све што нам се чини да се у оквиру те целине може решити, одмах се јавља противречност. Не можемо очекивати „целу истину“ у уским мисаоним оквирима, ма колико се нама чинило да смо те оквире замислили довољно широко. И за „другде“ се мора штошта остављати. То „другде“ не може бити „обећана земља“ у којој је све што се да замислити решено или решиво, него је илустрација поступног, никад завршеног, асимптотског пута којим се достиже „апсолутна истина“, схваћена динамички развојно, са унутрашњим противречностима, како се то чини већ код класика марксизма.

2. За Емануела Канта везује се *концептуализам*, као идејни правац у математици. Може се рећи да се ради о специфичној пројекцији Кантовог схватања о несазнатљивости, „ствари по себи“, а с друге стране, категоричким тврдњама о априорности нашег сазнања сврстава се у субјективни идеализам.

Математички судови су, по Канту, синтетички судови а приори. Он пориче да се спољашње ствари (чију принципијелну, али уз несазнатљивост, егзистенцију признаје) заиста налазе у простору, пошто је просторни изглед ствари само облик који им даје наш дух, у коме је просторност априорна — део наше структуре (ми не можемо друкчије да схватамо ствари него само просторно). И Кант сматра да су предмети геометријског знања стварни, али само у оквиру наше свести, јер њихова стварност по себи, ма колико била принципијелно призната, не може бити предмет нашег разматрања.

Иако су субјективни и објективни идеализам уопште и у математици довољно јасно супротстављени један другом, ипак они имају много заједничког, посебно у њиховом преношењу на терен математике. На крају крајева, није битно да ли су идеални геометријски објекти реално постојећи у неком другом свету или су реално постојећи само у нашој свести, јер у оба случаја они су суштински одвојени од стварности. Врло су натегнути покушаји да се успешност људске праксе у применама математике протумачи полазећи од оваквих становишта. Коментари које би било нужно дати у вези са концептуализмом умногоме би били сродни онима које смо дали поводом платонизма, с обзиром на њихову сродност, и поред својеврсне супротстављености.

Често се Кантов концептуализам критикује као погрешан због Кантових закључака о еуклидском простору као једино могућем, ономе који нам је, априорношћу коју Кант заступа, усађен тако да друкчије не можемо замислити. Из ових тешкоћа Кант би, вероватно, умео изаћи, с обзиром на чињеницу да еуклидски простор заиста има једно чвршће утемељење у нама, па би нееуклидски простори, ма колико то противречно деловало, одговарали неким „перифернијим“ доменима свести. Додуше, ово „чвршће утемељење“ еуклидског простора заснива се на досадашњем искуству човечанства које, с обзиром на вечност, није предугачко, али позивање на искуство, у најмању руку, не би било типично за Кантов начин расуђивања. Свеједно, чини нам се да главни правац критике не треба да иде тим путем — важнији је дефект концептуализма у натегнутој вези са праксом; о могућим мистификацијама да и не говоримо.

3. „Интуиционизам“ је посебно значајан идејни правац у математици који је, може се рећи развио и посебну логику и математичку апаратуру, одбацујући много од постојећег, уносећи (како се то често каже) „приличну пустош“ у класичну математику, не признајући низ њених принципа и поступака. Не признају принцип искључења трећег. Одбацују доказе побијањем супротне претпоставке. Не признају актуалну, него само потенцијалну бесконачност. Прихватају само тзв. конструктивне доказе итд.

Оваквим својим конструктивизмом, својом потенцираном строгошћу, интуиционизам би, на први поглед, деловао као екс-



тремна тежња сигурном, опипљивом, реалном, материјалном — као да би био сродан неком врло опрезном материјализму. Одмах, међутим, сам назив „интуиционизам“ као да противречи оваквом утиску. Рекло би се, према таквом називу, да се ради о безграничном ослањању на интуицију, дакле, на нешто што се не да увек уклопити у калупе, што може довести и до фикција у крајњој линији. У ствари, назив правца и није сасвим одговарајући. Јесте да тзв. „интуиција природног броја“ игра значајну улогу у филозофском образложењу интуиционистичких мотивација, али се ту интуиција ипак узима у једном посебном смислу, тако да назив „више обећава“ него што садржај (у погледу неке врло широко схваћене интуиције) пружа. Ипак, пажљивија анализа показује да је основна идејна подлога интуициониста пре идеалистичког него материјалистичког карактера. Оно, дакле, што личи на ригорозно инсистирање на сигурном, превише ригорозно, може бити мотивисано не толико егзактним расуђивањима. Наглази се и обрнутих примера, да и веће инсистирање на реалности у основној мотивацији доводи до „лебдећих“ резултата. Наведимо следеће коментаре А. Приора (*Хисторија логике*):

„Према Брауеру математика није систем формула и правила већ основни облик људске дјелатности, дјелатности која има свој темељ у нашој способности да апстрахирамо схваћање „двојства“ из узастопних фаза људског искуства и да увидимо како се та операција може понављати неодређени број пута да би произвела бесконачно напредујући низ природних бројева. У систему математике, основаном на тој првобитној интуицији, језик служи само као помоћ памћењу и комуникацији и не може сам од себе створити нов математички систем; наше ријечи и формуле имају значење само уколико су подржаване битно нејезичком дјелатношћу духа. Најпосле, формулација једног теорема има смисао само ако означава менталну конструкцију неког математичког ентитета или показује немогућност ентитета у питању. Брауерово схваћање доказа као битно менталног корисно је као коректив за уско формалистичко објашњење које би хтјело интерпретирати доказ у даном формалном систему, иако је његов психологизам филозофски споран — Л. Витгенштајн је својим радовима учинио више него сумњивом тезу да је језик само небитни пра-тилац мисли, потребан само за сврхе памћења и комуникације. У интуиционизму нису толико важне његове психологистичке црте колико његов нагласак на конструктивности и облик математике који одређује његов критериј смисаоности“.

Навели смо овако дуг Приоров цитат због његове јасноће и садржајности. Битност људског разликовања двојства, „многог“, „другог“, заиста је битна за интуитивно схватање природног броја и ту су, чини нам се, интуиционисти у основи у праву. Али, потцењивање значаја језика које затим долази изгледа пренагљено и не види се по чему недвосмислено проистиче из претходних премиса. Када су дошли до „менталне конструкције неког

математичког ентитета“, интуиционисти ће одједном, чини се без праве потребе, апсолутизовати ту менталну конструкцију у смеру Кантовог концептуализма. Не види се довољно зашто оно што је „здрово“ у интуиционистичком схватању конструктивности мора бити наслоњено на кантијански субјективизам. Али, дајмо реч С. Баркеру (Филозофија математике):

„Читаво учење да бројеви и скупови почињу да постоје захваљујући чистој интуицији процеса бројања сувише је неодређено и подложно критици, ако се узме сасвим дословно. Шта би требало да буде та „чиста интуиција“? Какав доказ имамо да дух у „чистој интуицији“ може да броји само коначном брзином? Зар дух не би могао да броји бесконачно брзо у „чистој интуицији“ и тако да „конструира“ трансфинитне бројеве? Необичност овог учења јасно долази до изражаја када се сетимо да је оно последица Кантове теорије, а вероватно и Браурерове, да закони бројева важе само за ствари које дух интуитивно сазнаје (опажа), а не за ствари какве су по себи. Схватање да се број не може применити на ствари какве оне заиста јесу по себи значи да ствари у стварности нису ни једне ни многе. То је сувише близу противречности да би било плаузибилно.“

Из овог Баркеровог цитата може се закључити да интуиционисти, у својој математичкој пракси тако трезвени, увођењем кантијанства с недовољно јасном аргументацијом долазе до апсурда у третирању „ствари по себи“. Ако, дакле, посматрамо овај правац у смислу опредељивања око тога да ли он значи „увоз“ филозофије у математику или обрнуто, можемо закључити следеће: Опажајући извесне логичке тешкоће у математици (које нису толико апсолутне колико се то може учинити на први поглед) они дају своје варијанте које су математички интересантне и које свакако значе вредан прилог развоју математичких наука. Тражећи образложење за своје поступке они, недовољно мотивисано и „прекорачујући овлашћења“ која им математика даје зову у помоћ концептуалистичку филозофију. То јесте нека врста „увоза филозофије“ у математику, али не иницијативом филозофије која би у математици тражила своју потврду, него настојањем математичара да дубље образлаже своју математичку реформу, која би и без нарочите помоћи филозофије, посебно концептуалистичке, имала свога смисла.

Конструктивности и опрезности сличне интуиционистичким, у математици и ван ње, имају једну глобалну материјалистичку обојеност. Али, претеривањем у таквом смеру може доћи у супротност са марксистичким настојањем слободе у револуционарном мењању света — до страшљивог односа према сваком смељем кораку, до одбијања свега што не би било у нама сасвим чврсто à priori (а то би могло бити само оно што се већ добро зна).

4. „Номинализам“ постоји као теорија схоластичке филозофије, а у складу са овом је и номиналистички правац у матема-

тици. По номиналистима, универзалије немају реалност — то су само речи, имена. Реалност се признаје само појединачним физичким објектима. У математици су номиналистичка схватања на одређен начин сродна интуиционистичким, у смислу „осиромашења“ неких области класичне математике. С друге стране, номинализам има једну „реалистичнију“ црту, својим поуздањем у појединачне предмете, које, у неком смислу, изгледа ближе признању њиховог објективитета, у смислу адекватности објективној стварности. Одричање реалитета општим појмовима, с друге стране, допушта и „провалу“ формализма, када се „именима“ ипак почне манипулисати. „Имена“ конституишу један „чисто“ људски свет који онда погодује субјективизму и превише се одваја од иначе признатих појединачних предмета. Реч је, ипак, о идеалистичкој филозофији — призна се објективна реалност, али онда долази до превеликог удаљавања од ње. Номиналисти наилазе на битне тешкоће када треба дати колико-толико кохерентну теорију природних бројева. Ово због тога што кореспондирање природних бројева појединачним објектима увек остаје на коначном — прелазак на бесконачност не изгледа ничим оправдан.

5. „Реализам“ у математици, а и у филозофији шире, није оно што му име каже. Супротан је интуиционизму јер, сликовито речено, признаје егзистенцију, одн. реалност свему што се само замислити може. Математички појмови, „идеални“ математички објекти, постојећи су исто онако као и било који објект чија се егзистенција може чулно верификовати. Расел је изразити представник овога правца. „Реализам“ би, значи, био у томе што се границе реалности знатно шире. Овакав је, међутим, „реализам“ битно удаљавање од материјалистичког схватања света — ни религиозна митологија не одриче (баш напротив) „реалност“ својим конструкцијама. „Реалистичко“ схватање у математици погодује формализму који не води много рачуна о пореклу и природи појмова којима оперише, задовољавајући се „правилима игре“ и њиховим комбинацијама. Само је наизглед противречна честа позитивистичка настројеност код представника „реалистичког“ правца, будући да претерана ширина коју они имају према стварности, у ствари, изражава једну равнодушност у односу на онтолошку проблематику математичких „бића“, која се, међутим, у математици не да избећи, при чему јој се не сме прилазити тако као да је сама себи циљ.

6. „Формализам“ је становиште у математици које заузимају многи „реалисти“, али не само они, а које од математике чини својеврсну „пасијанс“ проблематику, свдећи је на „правила игре“, оперисање ентитетима сасвим независно од порекла и циљева. Како пише С. Баркер: „На тај начин ће гледиште формалиста бити да не постоји значење или истинитост математичких система; ти системи уопште не садрже исказе, већ само знаке. Једна врста система није никад „тачнија“ од других (претпо-

стављајући да су обе правилно формализоване). Када се уреди као формализовани систем, теорија скупова интуициониста чини различиту игру знацима од теорије Зермела или Фон Нојмана, али су све то добре игре. Коју треба играти? Ако се покаже да једна од њих, у дужем временском периоду, има поузданије и плодније примене у науци него друге, онда је то разлог да јој дамо предност“.

Ове последње тврдње, очигледно, нису лишене основе, само су постављене сувише априористички — као да треба просто „лиферовати“ теорије па после гледати како се која слаже са реалношћу, ако је то случај — као да увид у стварност није важна ако не и пресудна мотивација при креирању „правила игре“.

Формализам се, међутим, не јавља само као идејно становиште у тумачењу математике, него и као ефективан приступ неким математичким проблемима, посебно проблему непротивречности математичких теорија. Овај приступ А. Приор објашњава на следећи начин: „Теорија сама могла би да садржи симболе за трансфинитне кардиналне бројеве и друге идеалне елементе, али то не би била препрека за доказ консистентности, јер у таквом једном доказу од нас се само тражи да те симболе третирамо као опажајно дате предмете и да покажемо да се они неће никад појавити у некој формули чија је негација такођер доказљива. С друге стране, Хилберт је вјеровоа да се бесконачни појмови, иако су допустиви у самој математици, не смију трпјети у теорији доказа која треба да осигура консистентност“. Као што се види „формалистичко“ становиште је сродно „реалистичком“ у крајњој линији — оно је својеврсна „продужена рука“ реалистичког становишта у његовој математичкој операционализацији, са још наглашенијим позитивистичким акцентима. Финитност у алгоритмима сведочи о математичкој скрупулозности. Иако Хилбертов програм, везан за проблематику непротивречности, није доживео потпун успех, он је ипак, како то вазда у сличним случајевима бива, донео лепих узгредних математичких плодова.

7. „Логистицизам“ је идејни правац који, у различитим видовима, своди математику на логику, или бар њене делове. И поред суштинске и дубоке сродности, логика и математика, међутим, нису идентичне ни са гледишта метода ни са гледишта објеката истраживања. Може се рећи да је сродност утолико већа уколико логика више тежи егзактности а математика формализацији. Оно што у математици припада интуицији, као и све оно што математику посредно или непосредно потичући из спољашњег света инспирише и коригује, не подлеже потпуној формализацији. С друге стране, ни логика се не може свести само на формалну логику уколико жели да буде дијалектичка, да обухвата „целу истину“. Уочљиво је да у данашњој формалној логици математичка логика заузима све видније место. Као и многа једностраност логистицизам у „чистом“ виду води формализму,

али се и ту не могу оспорити значајни математички резултати, важни и за математику и за логику, до којих су дошли представници овога правца.

8. „Конвенционализам“ је својеврстан „извоз“ математике у области ширег важења. Учење да су математичке теорије (што се код конвенционалиста односи уопште на законе природних наука) само договори, мање или више „згодне“ или „удобне“ за примену у пракси, а да су у основи наше, субјективне конструкције, оштро је критиковао Лењин у свом знаменитом делу *Материјализам и емпириокритицизам*, класификујући га као субјективни идеализам. Чувени математичар, физичар и филозоф Анри Поенкаре један је од највиђенијих представника овога правца. О конвенционализму смо писали у више махова (чланци *О конвенцији у математици* и *Анри Поенкаре у часопису Дијалектика* већ споменута брошура *Дијалектика и савремена математика* и др.), па се у то сада нећемо опширније упуштати. Иако и он има своје „рационално језгро“, с обзиром на заиста велику улогу конвенције у математици, ипак је овде могућност злоупотребе при преношењу у друге области и могућа и велика, рекли бисмо и изузетно велика, можда већа него код свих осталих побројаних „изама“. Када се овакви конвенционалистички ставови пренесу у политику и морал, они могу послужити као правдање сваке произвољности, недоследности, разних огрешења, све до злочина. Конвенционализам, када се потенцира до апсурда, релативизира сваку чврстину и поузданост — променимо само конвенцију и систем аксиома, прогласимо, по договору, да се „расе“ деле на „ниже“ и „више“, па ће се моћи правдати и хитлеровске душегупке.

9. У последње време се све више говори о „математизму“, као што смо већ у почетку нагласили — утолико више уколико се шири „математизација“ осталих наука. У претераностима „математизма“ признаје се само оно што се математизирати и сматра се да математизацији нема граница. Сличне ставове заступао је велики Лајбниц, који је иначе својим генијем битно допринео математизацији многих области које се дотле изгледале недоступне свакој егзактности. Лајбниц вели (цитирано према А. Приору): „Док сам још био дјечак који познаје само обичну логику, и није учио математику, долазила ми је мисао, не знам по ком инстинкту, да се може пронаћи анализа идеја из које би на некакав комбинаторни начин истине могле настајати и оцјењивати се помоћу бројева.“ Такозвана „геделизација“ свакако је једно од остварења ове Лајбницове тежње. Али, када је реч о моћи и ограчењима математике, дајемо реч великом совјетском математичару Колмогорову:

„Принципијелно, област примена математичке методе неограничена је: сви облици кретања материје могу се математички изучавати. Међутим, улога и значај математичке методе различити су у различитим случајевима. Никаква одређена матема-

тичка схема не исцрпљује сву конкретност реалних појава; зато процес сазнања конкретног тече увек у борби двеју тенденција: с једне стране, издвајања облика изучаваних појава и логичке анализе тих облика, с друге стране, откривања момената који се не уклапају у установљене форме, и прелаза на разматрање нових форми, гипкијих и које боље обухватају појаве. Ако се све тешкоће изучавања било ког круга појава састоје у остварењу друге тенденције, ако је сваки нови корак везан за квалитативно нове стране појаве, тада математичка метода одступа на задњи план; тада дијалектичка анализа све конкретности појаве може бити само помрачена математичком схематизацијом. Ако, насупротив томе, релативно просте и стабилне форме проучаваних појава обухватају те појаве са великом тачношћу и потпуношћу, но зато већ у границама тих фиксираних форми ничу довољно тешки и сложени проблеми, који захтевају специјална математичка истраживања, посебно, стварање специјалне симболике и специјалног алгорита за своје решење, то ми долазимо у сферу господства математичког метода.“

Једноставно говорећи, математика „успева“ при релативној стабилности појмова, а главни задатак јој је да објашњава њихове узајамне односе. Јасно је да овакав исказ може представљати само једно од ближих објашњења у вези са наменом математике, а ни изблиза њену дефиницију.

\*

Покушаји филозофског идеализма и других једностраних филозофских праваца да резултате природних и математичких наука користе за своје сопствено оправдање не мимоилазе, као што смо управо видели, ни математику. Ипак, рекли бисмо да је физика више злоупотребљавана у смислу, рецимо, таквих паничних крилатица као што је она позната „материја ишчезава“, којом су „духови“ директно увођени на поприште. Када је реч о математици, њена су једнострана тумачења, све у свему, ишла више у смеру агностицизма и позитивизма. Конвенционализам остаје као најизоштренији вид могуће злоупотребе математике у ванматематичке сврхе. Покушаји обарања дијалектике под изговором да математика, узор егзактности, истиче непротивречност као услов без кога се не може, могу се сматрати, развојем математике саме, обеснаженим до краја.

И математика је трпела насиље разних догматских спутавања, иако можда не у онако драстичном виду као што се то дешавало код нацистичког проглашавања неких области савремене физике за „јеврејску измишљотину“ или стаљинистичког за „буржоаску науку“. Данашње реакције на претерани ларпурлартизам, тамо где се он јавља, сасвим су другог типа. Математика већ има дуго, вековно искуство. Пребродила је кризе, видела да



је криза у ствари стална, али да се кроз њу долази до нових успеха. Она све више налази праву равнотежу између онога што значи, кроз апстракцију, њену стваралачку слободу независно од тога чему служи и онога што јој се, као све нови и нови захтеви реалног живота, непрестано намеће као задатак. У овом смислу све јој мање сметају једностране идејни коментари.

\*

Велики биолог Чарлс Дарвин изразио је, у свом животопису, жаљење што се није боље упознао са математиком, јер му се чинило да људи који владају том науком имају неко „нарочито схватање“. Иако је добро владао Еуклидовим Елементима, осећао је беспомоћност пред основним начелима алгебре — чинило му се да никад не би могао да их схвати до краја. Ипак је и касније повремено прелиставао математичке текстове, са својеврсном носталгијом, иако без довољно разумевања. Био је пример онога што се назива „страхом од математике“, коју је иначе високо ценио.

Иако су прошла времена Теодосијевог и Јустинијановог кодекса у којима су математичари изједначени са злочинцима и врачарама, а математика забрањена као „вештина достојна осуде“, иако се у многим стручним, и не само стручним, круговима отишло и у супротну крајност — веру у свемоћ математике, ипак су и данас у вези са улогом математике и њеним местом у оквиру интегралног погледа на свет живе многе недоумице и непознавања.

Ту скоро сам прочитао чланак у једном недељном листу о Бертрану Раселу, као добитнику Нобелове награде за књижевност, са нарочитим нагласком на Раселовој свестраности. Ипак, ниједном речју није споменуто да је Расел био и математичар, иако је он то био на највишем нивоу, тако да ће, врло вероватно, баш по својим математичким резултатима првенствено и остати у историји науке. Споменуто је да је био склон природним наукама и то документовано чињеницом да је био лични пријатељ Алберта Ајнштајна. Да је при томе написао и једну од најбољих популаризација Ајнштајнове теорије — није речено.

Овакво писање о Раселу, и не само о њему, уопште није реткост. Зато се, изгледа, не треба претерано плашити понављања и навођења општих места, него користити сваку прилику за потенцирање неких основних чињеница о математици. На упорност и тврдокорну распростањеност заблуде може се одговорити само супротном упорношћу, али боље аргументованом и убедљивије логички структурираном — тек тада се стварају неки од предуслова за разбијање тако окорелих неразумевања.



\*

Не падајући у непотребне ламентације, рецимо коју реч поводом Дарвинове мисли о „нарочитом схватању математичара“ До које мере познавање математике формира слику света?

Већ и из до сада изложеног се види да нема једнозначног усмерења коме би у овом смислу математичко образовање водило сваког мислиоца без разлике. Мислим да врхунски математички резултати умногоме релативизирају многа припроста веровања и доводе у питање бројне предрасуде о апсолутној тачности, о томе да је у математици све просто и јасно („као два и два — четири“), да је математика наука у којој је одговор увек „да“ или „не“. Проват нееуклидске геометрије, теорије скупова, математичке логике значајно је умногоме „коперникански обрт“. Дошло је, рекло би се, до амбиса, до крајњих могућих граница људске мисли. А ипак су и те границе пређене. Најапстрактније теорије показале су се веома погодним за примене. Оно што је на први поглед личило на кризу математичке и људске мисли уопште, све више је постајало ново, снажно оруђе у савладавању природе.

У чињеници да непротивречност математике у целини ни до данас није доказана може се видети и својеврсна објективна дијалектика. За формализоване елементарне теорије бројева, рекли смо већ, доказано је да су противречне ако су потпуне, а да непротивречност повлачи за собом непотпуност. Чим тежимо свеобухватности, тоталитету, одговору на сва питања, противречност се јавља као неминовност. Непротивречност се остварује само у теоријама ужег домета. Па ипак је тежња ка потпуности легитимна тенденција која доводи до дубљих сазнања. Дијалектички је противречна ова стална тежња ка непротивречности, која не доводи до Свезнања, али која није ни обртање у кругу — увек на путу до звезда кроз трње.

Математика, коезистенцијом међусобно супротних теорија у смислу еуклидске и нееуклидске геометрије, теорија са потврђеним или одречним одговором на Зермелову хипотезу или хипотезу континуума, чак истовременом применљивошћу тих супротних теорија, пружа лепе, природне примере јединства супротности, који нису само згодно конструисане схеме са циљем да се докажу дијалектика, него појаве битне за главну матицу математике.

Веома особени математички приступ комуникацији са објективном стварношћу саставни је, неодвојиви део оних темеља на којима се, у најширем смислу, може конституисати материјалистички поглед на свет. Иако оперише апстрактним појмовима, математика је далеко од сваког волунтаризма (при чему унутар и ван ње не недостају покушаји да се и њој наметну волунтаристички токови, сами собом задовољни).

Резултати теорије о решивости математичких проблема показују да у математици није све у „или—или“<sup>+</sup> него и те како

и у оном дијалектичком „и једно и друго“. Егзистенција умесно постављених питања на језику дате теорије, на која у оквиру исте теорије нема одговора, сведочанство је о прожетости математике дубоким дилемама.

Изложили смо како ни математика није имуна од застрањивања разних врста. Пренаглашавање једне компоненте у односу на друге и у односу на целину ствари и у математици, као и у свакој другој дисциплини, значи одступање од духа науке саме, коме је именитан одговорајући склад, ма колико услован, дијалектичан и динамичан он био и који је више незадржива тежња хармонији, него хармонија сама.

\*

Платонизам, концептуализам, номинализам, интуиционизам, реализам, логистицизам, формализам, конвенционализам, математизам, које смо укратко анализирали, представљају неке од путања којима се људска, математичка мисао кретала у циљу сазнавања себе саме, ко је, шта је и куда се упутила. Увек се полазило од неких исправних запажања, од објективно присутних појава и искустава, долазило у тако изабраном смеру до важних закључака који су се уграђивали у нове, проширене и продубљене темеље науке, али се онда залазило у странпутицу, кадгод се хтело затворити очи пред контрааргументом и контрапримером, кадгод се хтео уоквирити круг, прогласити да је апсолут достигнут.

Од свих споменутих математичких „изама“ издвојили смо конвенционализам као, у извесном смислу, друштвено најрелевантнији, ако буде искоришћен за правдање разних антихуманистичких идеолошких конструкција. Иако смо у разним приликама истицали „стихијски материјализам“ једнога Поенкареа, не приписујући му никакве мизантропске намере, јер их код њега није било, никако нисмо затварали очи пред хладном аморалношћу коју и данас свакодневно срећемо, а чија конвенционалистичко-позитивистичка обојеност жели да делује као ледена непристрасност, „чиста“ научност, потпуна објективност. Ма колико ми били далеко од вулгарно материјалистичког трагања за буквалним присуством класног интереса иза сваког правца у науци и филозофији, ма колико били свесни да већ у личностима класика марксизма Маркса, Енгелса и Лењина имамо еклатантне примере превазилажења властите класне позиције, ипак не можемо превиђати врло често поклапање позитивистичке оријентације у теорији са конзервативизмом у животној и политичкој пракси, при чему се позитивизам зна камуфлирати на врло различите начине, често празном емфазом у прилог значаја науке која споља личи на одушевљење за будућност човечанства, а у ствари је само димна завеса пред злоупотребом науке у нехумане сврхе.

Било је математичара (као *Бесел*) за које свет ван математике није постојао, али и таквих чија разноврсност управо задивљује. Њутн и Лајбниц су блистави представници ове странености: Њутн као физичар, математичар, астроном, хемичар, филозоф, историчар, економист, Лајбниц као математичар, филозоф, физичар, хемичар, биолог, геолог, психолог, правник, медицинар, историчар, крећући се у свим овим областима не аматерски него креативно, остављајући у њима дубок траг. Наш *Михаило Петровић*, математичар који је познавао и неколико других природних наука, чувени је рибар и рибарски стручњак, пасионирани путник и путописац, познавалац књижевности, филозоф и музичар. Као што је рекао *Вајерштрас*, „онај ко у себи нема нешто и поетског, неће никад бити потпун математичар“. Веза између математике и поезије код *Пола Валерија* одраз је његових свесних настојања и његове стваралачке природе у којој су се ове склоности суштински преплитале.

Нарочито је склоност ка филозофији присутна код математичара. *Декарт* је сањао о таквој науци која би била нека врста универзалне математике. *Лаплас* размишља о илузорној, универзалној формули света. *Питагора* у вези са појмом броја заснива читаву мистичну филозофију са одређеним култом и ритуалом. Пољски математичар *Вронски* основао је „месијанизам“ као специфичан филозофски смер. Велики *Поенкаре*, представник конвенционализма, био је лоше филозофске среће ако се његов правац гледа у целини, али су појединачне његове гносеолошке заслуге неоспорне. *Паскал* је својом мистичном филозофијом, чије су многе дубине ипак признате, ширем кругу чак познатији као филозоф. Општи поглед на математичаре као филозофе као да даје утисак било једне тежње ка тоталитету, свеобухватности, било свеопштој дедукицији, било конвенционалном схватању разних категорија, чему, и једном, и другом, и трећем, можемо делимично тражити порекло и у математичким навикама аутора.

Разноврсна је и ангажованост математичара ван математике, посебно у области друштвених делатности. Било их је који су хтели и знали да саграде своју кулу од слонове кости, али и оних чије је учешће имало видне резултате. Изврсни француски математичар *Пенлеве* постао је председник владе. Два секретара КПЈ, *Филип Филиповић* и *Сима Марковић*, били су математичари. Француски математичар *Лоран Шварц*, представник теорије дистрибуција, једне од најапстрактнијих области, чије је порекло из праксе неоспорно, представник у исто време ларпурлартистичке математичке пасијанс-филозофије, истакнути је представник француске левице, дугогодишњи *Сартров* сарадник и члан *Раселовог* суда у вези са *Вијетнамом*. Аналогно *Балзаку*, *Коши*, који у свом делу представља незадрживу тежњу новом, у политичким схватањима остаје најконзервативнији ројалиста — присталица старије гране *Бурбона*, коме је чак *Луј Филип* сувише леви, тако да 1830. емигрира, да се врати тек после га-

ранције француске владе да се не мора политички ангажовати (гаранција која се, по правилу, не даје никоме, али која сведочи о изванредном Кошијевом угледу).

\*

Тешкоће овладавања математиком везане су за њен непрекидни раст, који је довео и до перманентне кризе у настави. Јер, много више новог и значајног се јавља него што, изгледа, старог заслужује да буде одбачено. И овде долази до изражаја она стара истина да је онтогенеза рекапитулација филогенезе, па је, изгледа, и појединачном уму лакше да у учењу математике пође од појмова које је човечанство срело у својој младости. Чини нам се да је погодно послужити се следећим цитатом британског математичара Бродбента: „Као темељ великог дела наше данашње науке и технике, и, потпуно исто толико важна као велика стваралачка уметност, као универзални језик, као темељни начин мишљења, математика је саставни део наше модерне културе, и ту тврдњу тешко да би могао ко да порекне. Можда ту тврдњу понекад дочекују са смехом? Шта — кажу критичари — хоћете ли озбиљно да тврдите да *Лебегов* интеграл има исто тако велику и исто тако дубоку привлачност и место у нашој култури као, рецимо, *Изгубљени рај* или *Ватиканска Афродита*? Могли бисмо одвратити да је пребројавање глава врло лош начин процењивања вредности уметничког дела. Али постоји и бољи одговор, наиме, смела тврдња да ја верујем да исто толико људи може да цени и одиста цени *Лебегов* интеграл колико их цени *Изгубљени рај*, јер при том оцењивању ја намеравам да искључим све оне који ће вам спремно рећи да је *Милтон* велики песник, а *Изгубљени рај* велики спев, иако никад нису прочитали ниједно певање тог спева, нити икада намеравају да га прочитају, нити би чак разумели и један ред када би то и учинили. Не, измерите оба поља обавештеног прецењивања и сигуран сам да се неће много разликовати међу собом.“

\*

Ако има математичара који у свом погледу на свет показују приличну скученост, онда се узроци не могу наћи у математици самој, него су сложенији. Има математичара уроњених у своју науку на начин који се не може назвати ларпурлартистичким у неком програмираном смислу, где није реч чак ни о уживању ради уживања, него о некој врсти пасивне опседнутости, где ван тога просто ништа не постоји, а сам тај рад као да не даје нарочите стваралачке импулсе. Такви, али и многи прави математичари у знатном степену су лишени комуникативности и обилато доприносе неинформисаности о математици, која је широко рас-

прострањена, чак и код многих од којих се то не би могло очекивати. Наћи ће се интелектуалаца који (у доба када се тешко пребројавају и нове математичке дисциплине, а о десетинама хиљада нових научних радова да и не говоримо) мисле да се на факултету учи само средњошколска математика, али на веома упоран начин, тако да би дипломирани математичар био онај ко уме да реши све средњошколске задатке. Овоме је криво и споро мењање програма — у основној и средњој школи доскора се предавао само део математике, док се у већини других предмета ипак даје наука у целини, мада на нивоу који одговара узрасту.

Има код математичара презира према свакој „причи“ ван математичких формула, као нечему што хоће да руши математичку строгост. Као да строгост и та „прича“ не могу да коезистирају једна уз другу, и то тако да једна без друге не иде. Има и страха од профанације, неког неопитагорејског самозадовољства у остајању у најужем кругу.

Потребно је, значи, вишеструким и вишестраним напорима рушити преграде, градити мостове, упознавати се међусобно. То не иде без напора, то излажење из сопствене љуштуре, јер улажење у друкчији начин мишљења, наравно, није увек лагодно ни глатко. Живимо, међутим, у времену у коме већа отварања у свим правцима немају озбиљније алтернативе.

Milorad BERTOLINO

#### L'IMPORTANCE PHILOSOPHIQUE DES SENS IDEOLOGIQUES DANS LES MATHÉMATIQUES

##### Résumé

L'auteur analyse, d'une manière concise et avec certaine observation du point de vue de la gnoséologie marxiste, les sens idéologiques déjà connus dans les mathématiques: platonisme, conceptualisme, nominalisme, intuitionnisme, réalisme, logicisme, formalisme, conventionalisme et mathématicisme.

Ces sens sont présentés comme les voies par lesquelles l'idée mathématique évoluait pour connaître soi-même et déterminer qui est elle et où s'est elle dirigée. L'auteur souligne qu'on y partait toujours des observations justes, des choses et des expériences objectivement présents, faisant un détour toujours quand on voulait fermer les yeux devant le contre-argument et le contre-exemple, toujours quand on voulait encadrer le cercle et proclamer que l'absoluité est atteinte. Dans un tel sens choisi on tirait de très importantes conclusions et on les incorporait dans les nouveaux fondements, élargis et approfondis, de la science mathématique et de ses applications.

---

On a souligné que la philosophie des sens idéologiques mentionnés considérablement influençait, et influence toujours, la formation de la vision du monde non seulement des mathématiciens purs, mais aussi de tous ceux qui s'occupent des applications de la mathématique dans les recherches des phénomènes dans la nature et dans la société.

