ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 16, 2005.

ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 16, 2005

THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS
GLASNIK OF THE SECTION OF NATURAL SCIENCES, 16, 2005.

UDK 531.261:531.36

Ranislav M. Bulatović

O SUDARU KRUTIH TIJELA: SAGLASNOST NJUTNOVE SA POASONOVOM HIPOTEZOM

Sažetak

U ovom radu se razmatra saglasnost Njutnove sa Poasonovom hipotezom klasične teorije udara. Uvodi se karakteristična matrica tačke sudara, koja omogućava da se na jedinstven način tretiraju modeli sudara sa trenjem, kako slobodnih tijela, tako i tijela sa nepokretnim tačkama. Izvedeni kriterijumi saglasnosti sadrže, kao specijalne slučajeve, ranije formulisane rezultate.

ON THE COLLISION OF RIGID BODIES: COMPATIBILITY OF NEWTON AND POISSON HYPOTHESIS

Abstract

This paper is dealing with compatibility of Newton and Poisson hypothesis in the classical collision (impact) theory. Characteristic matrix of the point of collision is introduced, enabling us to obtain unique way of studying various models of collision of both free and constrained bodies in a case when friction is assumed. Derived compatibility conditions contain, as a special case, the already established results.

1. UVOD

U klasičnoj stereomehanici, sudar krutih tijela se tretira kao singularna pojava beskonačno malog trajanja pri kojoj nastupaju konačne promjene brzina tačaka tijela prouzrokovane udarnom silom konačnog impulsa. U okviru ove teorije razlikuju se dva modela koji su bazirani na Njutnovoj, odnosno Poasonovoj hipotezi. Obje hipoteze, preko koeficijenta udara kao fizičke karakteristike sudarajućih tijela, dovode do jedne skalarne jednačine koja zajedno sa teoremama o promjenama količina kretanja i momenata količina kretanja i, eventualno, zakonom trenja, omogućava da se, u okviru sheme apsolutno krutog tijela, riješi osnovni zadatak sudara – određivanje poslijeudarnih brzina tačaka tijela.

Njutnova hipoteza se, zbog svog kinematičkog karaktera, široko koristi u praktičnim proračunima [1]. Međutim, s druge strane, zapaženo je ne tako davno da ona u nekim konkretnim primjerima, za razliku od Poasonove hipoteze, dovodi do fizičkog paradoksa (povećanja energije nakon sudara) [2] (v., takođe [3],[4]). Stoga je interesantno pitanje: Pod kojim uslovima je Njutnova hipoteza posljedica Poasonove? Odgovor na postavljeno pitanje je predmet ovog rada. Razmatranjima su obuhvaćeni sudari slobodnih i vezanih tijela (glatkih i hrapavih). Dobijeni rezultati, formulisani u teoremama 1 i 2 u odjeljku 3, sadrže osim opštepoznatog slučaja slobodnog glatkog sudara i sve slučajeve ranije ustanovljene u radu [5], koji je takođe posvećen ovom problemu. Na kraju, radi ilustracije, dat je jednostavan primjer koji zadovoljava uslove izvedene u ovom radu, ali se na njega ne mogu primijeniti rezultati [5].

2. PROMJENA BRZINE NAPADNE TAČKE UDARNOG IMPULSA

2. 1. Slobodno tijelo

Pretpostavimo da na slobodno kruto tijelo, mase m i centralnog momenta inercije J, u tački K, čiji je položaj u odnosu na centar inercije C određen vektorom $\vec{a}$, djeluje udarni impuls $\vec{I}$. Konačni oblici teorema o promjeni količine kretanja i momenta količine kretanja daju

$$m\Delta\vec{v}_C = \vec{I} \tag{2.1}$$

$$J\Delta\vec{\omega} = [\vec{a}, \vec{I}] \tag{2.2}$$

gdje su $\Delta\vec{v}_C = \vec{v}_C^{+} - \vec{v}_C^{-}$ i $\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}^{+} - \vec{\omega}^{-}$ promjene brzine centra masa i ugaone brzine tijela za vrijeme udara, respektivno, a simbol [.,.] označava vektorski proizvod. Na osnovu Ojlerove formule

$$\vec{v}_K = \vec{v}_C + [\vec{\omega}, \vec{a}] \tag{2.3}$$

uzimajući u obzir (1) i (2), određuje se promjena brzine tačke K

$$\vec{v}_K^{+} - \vec{v}_K^{-} = \Delta\vec{v}_K = \frac{1}{m}\vec{I} - [\vec{a}, J^{-1}[\vec{a}, \vec{I}\,]] \tag{2.4}$$

koju je pogodno napisati u matričnom obliku

$$\Delta\vec{v}_K = (\frac{1}{m}E + B^{(0)})\vec{I}\ , \tag{2.5}$$

pri čemu su vektori predstavljeni matricama kolonama. Ovdje je E jedinična matrica, a elementi matrice $B^{(0)}$ su određeni sljedećim formulama

$$b_{ij}^{(0)} = (J^{-1}[\vec{a}, \vec{e}_i], [\vec{a}, \vec{e}_j])\quad i, j = 1,2,3 \tag{2.6}$$

gdje su $\vec{e}_i$ jedinični vektori koordinatnih osa, a (.,.) skalarni proizvod vektora.

Pokažimo da je $B^{(0)}$ simetrična pozitivno semidefinitna matrica ranga 2, čijoj nultoj sopstvenoj vrijednosti odgovara sopstveni vektor $\vec{a}$.

Zaista, uzmimo ne umanjujući opštost da su koordinatne ose glavne ose inercije tijela, tj. $J = diag(J_1, J_2, J_3)$, $J_i > 0$. Ako sa a_i obilježimo projekcije vektora $\vec{a}$ na tako izabrane ose, direktno se izračunava da je

$$B^{(0)} = \begin{pmatrix} J_2^{-1}a_3^2 + J_3^{-1}a_2^2 & -J_3^{-1}a_1a_2 & -J_2^{-1}a_1a_3 \\ -J_3^{-1}a_1a_2 & J_1^{-1}a_3^2 + J_3^{-1}a_1^2 & -J_1^{-1}a_2a_3 \\ -J_2^{-1}a_1a_3 & -J_1^{-1}a_2a_3 & J_1^{-1}a_2^2 + J_2^{-1}a_1^2 \end{pmatrix}$$

Svi elementi na glavnoj dijagonali matrice $B^{(0)}$ su nenegativni i uz to je $\Delta_2(B^{(0)}) =\ (J_1^{-1}J_2^{-1}a_3^2 + J_2^{-1}J_3^{-1}a_1^2 + J_1^{-1}J_3^{-1}a_2^2)a_3^2 \geq 0$ i $\Delta_3(B^{(0)}) = \det B^{(0)} = 0$, pa su ispunjeni uslovi pozitivne semidefinitnosti matrice. Imajući u vidu da je bar jedna komponenta vektora $\vec{a}$ razlučita od nule, lako se provjerava da je $rank(B^{(0)}) = 2$ a takođe i da je $B^{(0)}\vec{a} = 0$.

2. 2. Neslobodno tijelo

Ako tijelo ima jednu nepokretnu tačku, recimo A, onda se, analogno prethodnim razmatranjima, dobija da je

$$\Delta\vec{v}_K = B^{(1)}\vec{I} \tag{2.7}$$

gdje je matrica $B^{(1)}$ istih oblika i osobina kao i matrica $B^{(0)}$ iz formule (5), s tim što je J tenzor inercije tijela u odnosu na tačku A i $\vec{a} = \overrightarrow{AK}$.

U slučaju tijela sa dvije nepokretne tačke, tj. sa nepokretnom osom čiji je jedinični vektor, recimo, $\vec{e}$, nalazimo da je

$$\Delta\vec{v}_K = B^{(2)}\vec{I} \tag{2.8}$$

gdje su elementi matrice $B^{(2)}$ određeni izrazima

$$b_{ij}^{(2)} = J_e^{-1}([\vec{a},\vec{e}],\vec{e}_i)([\vec{a},\vec{e}],\vec{e}_j) \tag{2.9}$$

u kojima je J_e moment inercije tijela za nepokretnu osu, a $\vec{a}$ vektor položaja tačke K u odnosu na neku tačku sa ose e. Lako se provjerava da je $B^{(2)} \geq 0$, $rank B^{(2)} = 1$, a nulti podprostor matrice $B^{(2)}$ je ravan određena tačkom K i nepokretnom osom e.

3. SUDAR DVAJU TIJELA

3. 1. Kinematička i dinamička hipoteze

Kada se u nekom trenutku tijela T_1 i T_2 dodirnu tačkama K_1 i K_2 ($K_i \in T_i$) tako da relativna brzina $\vec{v}_{K_1}^- - \vec{v}_{K_2}^-$ ne leži u zajedničkoj tangentnoj ravni, nastaje sudar tijela. Tada na svako tijelo T_i, od strane drugog tijela, u tački sudara djeluju udarne sile, čiji se impulsi $\vec{I}_i$ pokoravaju principu dejstva i protivdejstva ($\vec{I}_1 = -\vec{I}_2$), a koji uzrokuju diskontinualnu promjenu brzina tačaka tijela ne mijenjajući njhov položaj. Prema Njutnovoj hipotezi (v. npr. [6]) odnos inteziteta normalnih komponenata relativne brzine dodirujućih tačaka tijela na kraju i početku sudara određen je koeficijentom uspostavljanja k $(0 \leq k \leq 1)$, koji izražava fizička svojstva sudarajućih tijela. Označimo li sa $\vec{n}$ jedinični vektor normale na tangentnu ravan usmjeren ka unutrašnjosti tijela T_1, uzimajući u obzir da se smjer normalne komponente relativne brzine mijenja, Njutnova hipoteza se može zapisati u obliku

$$(\vec{v}_{K_1}^{+} - \vec{v}_{K_2}^{+}, \vec{n}) + k(\vec{v}_{K_1}^{-} - \vec{v}_{K_2}^{-}, \vec{n}) = 0, \tag{3.1}$$

Za razliku od Njutnove hipoteze, koja je kinematičkog karaktera, njoj alternativna Poasonova hipoteza je dinamičkog karaktera. U skladu sa ovom hipotezom (v., npr., [6], [7]) proces udara se dijeli na dvije faze: kompresiju i restituciju; na kraju perioda kompresije je normalna komponenta relativne brzine dodirnih tačaka jednaka nuli

$$(\vec{v}_{K_1}^{*} - \vec{v}_{K_2}^{*}, \vec{n}) = 0 \tag{3.2}$$

a koeficijent udara određen je odnosom veličina normalnih komponenata udarnog impulsa u drugoj i prvoj fazi udara, tj.

$$(\vec{I}^{(r)} - k\vec{I}^{(c)}, \vec{n}) = 0 \tag{3.3}$$

gdje su sa $\vec{I}^{(c)}$ i $\vec{I}^{(r)}$ označeni udarni impulsi u periodima kompresije i restitucije, respektivno, ($\vec{I} = \vec{I}^{(c)} + \vec{I}^{(r)}$).

3. 2. Karakteristična matrica tačke sudara i uslov saglasnosti

Promjena brzine napadne tačke K_i udarnog impulsa $\vec{I}_i$, na osnovu razmatranja u odjeljku 2, može se zapisati, kako za slobodno tako i neslobodno tijelo T_i, u jedinstvenom obliku

$$\Delta\vec{v}_{K_i} = A_i\vec{I}_i, \tag{3.4}$$

gdje je

$$A_i = \begin{cases} m_i^{-1}E + B_i^{(0)} - slobodno \quad tijelo, \\ B_i^{(1)} - tijelo \quad sa \quad jednom \quad nepokretnom \quad tačkom, \\ B_i^{(2)} - tijelo \quad sa \quad dvije \quad nepokretne \quad tačke, \end{cases} \tag{3.5}$$

a struktura i osobine pojedinih matrica $B_i^{(l)}, l \in \{0,1,2\}$, kao i značenja veličina koje figurišu u njihovim koeficjentima, dati su u odjeljku 2.

Primjenjujući prethodni obrazac na sudarajuća tijela T_i dobijamo priraštaje brzina dodirujućih tačaka u svakoj od faza sudara

$$\vec{v}_{K_i}^{*} - \vec{v}_{K_i}^{-} = A_i \vec{I}_i^{(c)}$$

$$\vec{v}_{K_i}^{+} - \vec{v}_{K_i}^{*} = A_i \vec{I}_i^{(r)}, \ \mathrm{i} = 1,2. \tag{3.6}$$

pomoću kojih, uzimajući u obzir da je $\vec{I}_1^{(c)} = -\vec{I}_2^{(c)} = \vec{I}^{(c)}$ i $\vec{I}_1^{(r)} = -\vec{I}_2^{(r)} = \vec{I}^{(r)}$, nalazimo

$$(\vec{v}_{K_1}^{+} - \vec{v}_{K_2}^{+}, \vec{n}) + k(\vec{v}_{K_1}^{-} - \vec{v}_{K_2}^{-}, \vec{n}) = (1+k)(\vec{v}_{K_1}^{*} - \vec{v}_{K_2}^{*}, \vec{n}) + ((A_1 + A_2)\vec{n}, \vec{I}^{(r)} - k\vec{I}^{(c)}) \tag{3.7}$$

Uvedimo matricu

$$B^{(l,m)} = B_1^{(l)} + B_2^{(m)}, \ l, m \in \{0,1,2\} \tag{3.8}$$

koju ćemo zvati *karakteristična matrica tačke sudara* tijela. Ona je, kao zbir dvije simetrične pozitivno semidefinitne matrice, simetrična pozitivno semidefinitna ili definitna matrica.

Napomena 1. Ako su vektori položaja $\vec{a}_i$ tačke sudara kolinearni, onda oni padaju u pravcu jednog sopstvenog vektora karakteristične matrice tačke sudara.

Pretpostavljajući da važi Poasonova hipoteza, tj. (3.2) i (3.3), relacija (3.7) se svodi na sljedeći oblik

$$(\vec{v}_{K_1}^{+} - \vec{v}_{K_2}^{+}, \vec{n}) + k(\vec{v}_{K_1}^{-} - \vec{v}_{K_2}^{-}, \vec{n}) = (B^{(l,m)}\vec{n}, \vec{I}^{(r)} - k\vec{I}^{(c)}) \tag{3.9}$$

Prema tome, Njutnova hipoteza biće saglasna sa Poasonovom u svim onim slučajevima sudara tijela za koje iz uslova (3.3) proističe da je

$$(B^{(l,m)}\vec{n}, \vec{I}^{(r)} - k\vec{I}^{(c)}) = 0\,. \tag{3.10}$$

Napomena 2. Uslov (3.8), odnosno (3.10), važi i u sljedećim graničnim slučajevima:

a) kada se tijelo (jedno ili oba) zamjenjuje materijalnom tačkom ($\vec{a} = 0$ i, dakle, $B^{(0)} = 0$);

b) kada je jedno tijelo nepokretna prepreka, tj. masivno tijelo koje zanemarljivo mijenja kinematičko stanje pod dejstvom udarnog impulsa ($J^{-1} \to 0, B^{(0)} = 0$).

Uslov saglasnosti (3.10) biće, očigledno, zadovoljen ako su površi tijela u tački sudara glatke, jer tada impulsi $\vec{I}^{(c)}$ i $\vec{I}^{(r)}$ imaju pravac normale, pa iz uslova (3.3) slijedi da je $\vec{I}^{(r)} - k\vec{I}^{(c)} = 0$. Prema tome, važi sljedeća

Teorema 1. Pri sudaru slobodnih ili vezanih *glatkih* krutih tijela Njutnova hipoteza je saglasna sa Poasonovom.

Ekvivalentnost hipoteza sudara u slučaju slobodnih tijela dokazna je u mnogim knjigama iz klasične mehanike (v.,npr, [6], [7]), a u slučaju neslobodnih tijela teorema 1 predstavlja jedan od dva osnovna rezultata rada [5].

Pod pretpostavkom (3.3), ako je tangencijalna komponenta udarnog impulsa različita od nule („udarno trenje”), vektor $\vec{I}^{(r)} - k\vec{I}^{(c)}$, kada je različit od nule, leži u tangentnoj ravni dodirujućih površi tijela i ima različite pravce za različite pravce doudarne tangencijalne komponente relativne brzine dodirujućih tačaka. Za bilo koji vektor $\vec{I}^{(r)} - k\vec{I}^{(c)}$ uslov (3.10) biće ispunjen samo ako je $B^{(l,m)}\vec{n} = \lambda\vec{n}, \lambda \in \Re$.

Dakle, važi sljedeća

Teorema 2. Pri sudaru slobodnih ili vezanih *hrapavih* krutih tijela, za svaki mogući raspored doudarnih brzina tačaka sudarajućih tijela, Njutnova hipoteza je saglasna sa Poasonovom ako i samo ako normala u dodirnoj tački tijela pada u pravcu sopstvenog vektora karakteristične matrice tačke sudara.

Iz teoreme 2, imajući u vidu napomenu 1, direktno slijedi

Posljedica 1. Ako normala na tangentnu ravan dodirujućih površi dva hrapava tijela prolazi kroz centar inercije svakog slobodnog tijela i/ili nepokretnu tačku svakog neslobodnog tijela koje učestvuje u sudaru, onda važi Njutnova hipoteza.

Kada su oba tijela slobodna iz posljedice 1 slijedi drugi osnovni rezultat rada [5]. Na osnovu strukture karakteristične matrice tačke sudara lako se zaključuje da je uslov prethodnog tvrđenja ispunjen u sljedećim praktično važnim slučajevima:

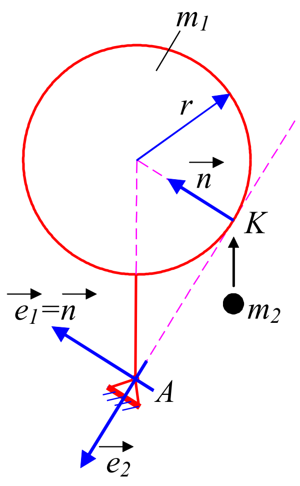
1) udar materijalne tačake sa drugom materijalnom tačkom ili nepokretnom preprekom;

2) Sudar materijalne tačke sa slobodnim (neslobodnim) tijelom pri čemu normala u tački sudara prolazi kroz centar inercije (nepokretnu tačku) tijela;

3) Sudar slobodnog (neslobodnog) tijela sa nepokretnom preprekom pri čemu normala u tački sudara prolazi kroz centar inercije (nepokretnu tačku) tijela;

3. 3. Primjer

Tačka mase m_2 sudara se u tački K sa homogenom hrapavom kuglom, mase m_1 i poluprečnika r, koja je čvrsto spojena za jedan kraj krutog štapa, zanemarljive mase i dužine $2r$, postavljenim u radijalnom pravcu u odnosu na centar kugle, a čiji je drugi kraj vezan za nepokretni sferni zglob A (sl. 1).



Sl.1

Za koordinatni sistem, uzet kao na sl. 1, vektor položaja $\vec{a}$ tačke sudara i inverzni tenzor inercije J^{1} kugle u odnosu na nepokretnu tačku A su:

$$\vec{a} = -\sqrt{3}r\vec{e}_2\,,\; J^{1} = \frac{5}{44m_1r^2}\begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} & 0 \\ -5\sqrt{3} & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sada se, na osnovu formula (2.6), dobija da je karakteristična matrica tačke sudara

$$B^{(1,0)} = B^{(1)} = \frac{15}{44m_1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Normala ne prolazi kroz nepokretnu tačku, tj. nije ispunjen uslov posljedice 1, ali je očigledno jedinični vektor normale $\vec{n} = \vec{e}_1$ sopstveni vektor matrice $B^{(1,0)}$ i, prema teoremi 1, važi Njutnova hpoteza.

LITERATURA

[1] J. Wittenburg, Dynamics of Sytem of Rigid Bodies, Teubner: Stuttgart, 1977.
[2] T. R. Kane, A dynamics puzzle. Stanford Mechanics Alumni Club Newsletter, 1984.
[3] T. R. Kane, D. A. Levinson, Dynamics: Theory and Applications, McGraw-Hill, New York, 1985.
[4] J. B. Keller, Impact with friction, ASME J. Appl. Mech., Vol. 53, 1986, p.1-4.
[5] G.M. Kapaulitsas, On the collision of rigid bodies. Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP), Vol. 46, 1995, p. 709-723.
[6] А.П. Маркеев, Теоретическая механика, Москва, 1999.
[7] G. W. Kilmister, J. E. Reece, Rational Mechanics, Longmans, London 1966.