ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 17, 2007.

ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 17, 2007

THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS
GLASNIK OF THE SECTION OF NATURAL SCIENCES, 17, 2007.

UDK 531.01:517.928

Ranislav M. Bulatović, Mila Kažić

O DISIPATIVNIM SISTEMIMA SA PROŽIMAJUĆIM PRIGUŠENJEM

Izvod

Razmatraju se linearni autonomni mehanički sistemi sa konačnim brojem stepena slobode, izloženi dejstvu potencijalnih i disipativnih sila. Izvedena su dva kriterijuma koji sadrže potrebne i dovoljne uslove prožimajućeg prigušenja (asimptotske stabilnosti) djelimično prigušenih sistema. Osim toga, pokazano je da prigušenje razmatranog sistema ne može biti prožimajuće ako spektar sistema redukovanog na nulti podprostor matrice prigušenja sadrži višestruke frekvencije. Dato je nekoliko primjera koji ilustruju primjenu dobijenih rezultata.

ON THE DISSIPATIVE SYSTEMS WITH PERVASIVE DAMPING

Abstract

The linear autonomous mechanical systems with potential and dissipative forces are treated. Two criteria containing necessary and sufficient conditions of pervasive damping (asymptotic stability) of such partialy damped systems are derived. It is also shown that the damping of the system in study can not be pervasive if the spectrum of the system which is reduced to the null subspace of the damping matrix has multiple eigenfrequencies. Several examples are used to illustrate the conditions.

1. UVOD

Jedan od osnovnih modela linearne teorije oscilacija je viskozno prigušeni elastični sistem sa konačnim brojem stepena slobode. Njegovo kretanje je opisano vektorsko-matričnom diferencijalnom jednačinom

$$A\ddot{q} + \widetilde{B}\dot{q} + \widetilde{C}q = 0\,, q \in \Re^n \tag{1}$$

gdje su A, $\widetilde{B}$ i $\widetilde{C}$ realne simetrične n x n matrice. Inercijska A i matrica krutosti $\widetilde{C}$ su pozitivno definitne (> 0), dok je matrica prigušenja $\widetilde{B}$, u opštem slučaju, pozitivno semidefinitna (≥ 0).

Opšte je poznato da je sistem (1) sa potpunim prigušenjem ($\widetilde{B} > 0$) asimptotski stabilan ($\lim\limits_{t\to\infty} q(t) = 0$ za svako rješenje $q(t)$ jednačine (1)), a u slučaju djelimičnog prigušenja ($\widetilde{B} \geq 0$) on je ili asimptotski stabilan (tada se govori o prožimajućem prigušenju) ili dopušta bar jedno harmonijsko kretanje (rezidualno kretanje).

Algebarski, prožimajiće prigušenje se karakteriše zahtjevom da svi korijeni karakterističnog polinoma sistema (1) imaju negativne realne djelove, a prisustvo čisto imaginarnih korijena ukazuje na egzistenciju rezidualnih kretanja. O prisustvu prožimajućeg prigušenja može se suditi i na osnovu ostalih kriterijuma asimptotske stabilnosti opštih linearnih sistema, recimo Raut-Hurvicovog, ali su razvijani, iz praktičnih razloga, i kriterijumi specijalizovani za sisteme oblika (1). Nedavno je u radu [1], motivisanim dugom diskusijom o intuitivnom prepoznavanju egzistencije rezidualnih kretanja u konkretnim sistemima (v., spisak referenci u [1]), pokazano da u slučaju kada su kružne frekvencije odgovarajućeg konzervativnog sistema ($\widetilde{B} = 0$) proste (međusobno različite) a matrica prigušenja oblika $\varepsilon\widetilde{B}$, $0 < \varepsilon << 1$, prigušenje je prožimajuće ako ni jedan sopstveni vektor konzervativnog sistema ne leži u nultom prostoru matrice $\widetilde{B}$. Ovaj rezultat, kao što je naglašeno u [2], je specijalan slučaj starijeg rezultata [3], koji je formulisan bez ograničavajuće pretpostavke o malom prigušenju. U radu [4] je pokazano da je djelimično prigušeni sistem (1) asimptotski stabilan ako i samo ako je rang nxn^2 matrice $\left(\widetilde{B} \;\vdots\; A^{-1}\widetilde{C}\widetilde{B} \;\vdots\; . \;\vdots\; . \;\vdots\; . \;\vdots\; (A^{-1}\widetilde{C})^{n-1}\widetilde{B}\right)$ jednak broju stepeni slobode sistema. Takođe, na osnovu ranga prethodne matrice određen je broj neprigušenih oscilatornih modova djelimično prigušenog sistema (1) i pokazano da se takav sistem pomoću odgovarajuće linearne transformacije može transformisati na dva raspregnuta podsistema od kojih je jedan neprigušen a u drugom je prigušenje prožimajuće [5].

U ovom radu izvedana su dva alternativna kriterijuma gore navedenim, koji sadrže potrebne i dovoljne uslove prožimajućeg prigušenja sistema (1). Prvi (teorema 1) se odnosi na sisteme zapisane u standardnim modalnim koordinatama (normalnim koordinatama para matrica A i $\widetilde{C}$), a drugi (teorema 2) u normalnim koordinatama para A i $\widetilde{B}$. Osim toga, dokazana je teorema 3 prema kojoj je različitost kružnih frekvencija konzervativnog sistema dobijenog redukovanjem polaznog sistema na nulti podprostor matrice prigušenja neophodan uslov prožimajućeg prigušenja.

2. ALTERNATIVNI KRITERIJUMI PROŽIMAJUĆEG PRIGUŠENJA

Uobičajeno je da se pomoću linearne zamjene koordinata $x = A^{1/2}q$, $A^{1/2}$- pozitivno definitni kvadratni korijen matrice A, sistem (1) transformiše na prostiji oblik

$$\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0 \tag{2}$$

od kojeg će se polaziti u daljim razmatranjima, a gdje je $B = A^{-1/2}\widetilde{B}A^{-1/2}$ i $C = A^{-1/2}\widetilde{C}A^{-1/2}$. Pretpostavljajući rješenje jednačine (2) u obliku $x = X\exp(\lambda t)$, prelazi se na sopstveni zadatak

$$(\lambda^2 I + \lambda B + C)X = 0\,, \tag{3}$$

gdje je I jedinična matrica reda n, a kompleksni broj λ i n-dimenzioni kompleksni vektor X koji zadovoljavaju (3) su sopstvena vrijednost i sopstveni vektor sistema (2), respektivno. Realnim i čisto imaginarnim sopstvenim vrijednostima odgovaraju realni sopstveni vektori. Postoji 2n sopstvenih vrijednosti koje su korijeni karakteristične jednačine

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda^2 I + \lambda B + C) = 0 \tag{4}$$

Kada su sve sopstvene vrijednosti λ_j proste ili kvaziproste (sopstvenoj vrijednosti višestrukosti k odgovara k nezavisnih sopstvenih vektora), opšte rješenje jednačine (2) je oblika

$$x(t) = \sum_{j=1}^{2n} c_j X_j \exp(\lambda_j t)\,, \tag{5}$$

gdje se integracione konstante c_j određuju iz početnih uslova. Ako je λ_j degenerisana sopstvena vrijednost onda u opštem rješenju figuriše sekularni član – polinom po t uz $\exp(\lambda_j t)$.

S druge strane, pošto je $B = B^T \geq 0$ i $C = C^T > 0$, svi korijeni karakteristične jednačine imaju *nepozitivne* realne djelove ($\operatorname{Re}\lambda \leq 0$) (v.,npr., [6]), a iz stabilnosti sistema (2), koja je direktna posledica teoreme o promjeni energije, zaključuje se da je svaki višestruki čisto imaginarni korijen jednačine (4) kvaziprost. Prema tome, svako rješenje $x(t)$ jednačine (2) biće prigušeno ako i samo ako karakteristična jednačina (4) nema čisto imaginarne korijene.

Ključnu ulogu u izvođenju kriterijuma prožimajućeg prigušenja (KPP) sistema (2) ima sledeće tvrđenje.

Lema 1 [5]. Neka je $(i\omega, X)$, $\omega \in \Re$, $X \in \Re^n$, $i = \sqrt{-1}$, sopstveni par zadatka (3). Tada su (ω^2, X) i $(0, X)$ sopstveni parovi matrica C i B, respektivno.

2. 1. KPP u modalnim koordinatama

Pošto je matrica krutosti C simetrična, postoji ortogonalna matrica Q koja transformacijom sličnosti matricu C transformiše na dijagonalnu matricu Ω ($Q^T C Q = \Omega$) čiji su dijagonalni elementi kvadrati kružnih frekvencija odgovarajućeg neprigušenog sistema, odnosno korijeni frekventne jednačine

$$\det(-\lambda I + C) = 0 \tag{6}$$

Matrica $A^{1/2}Q$ zove se modalna matrica sistema (1), a koordinate $y = (y_1, ..., y_n) \in \Re^n$, koje se uvode linearnom transformacijom $x = Qy$ (odnosno $q = A^{1/2}Qy$) su modalne koordinate sistema. U ovim koordinatama jednačina (1) je oblika

$$\ddot{y} + R\dot{y} + \Omega y = 0, \tag{7}$$

gdje je

$$R = Q^T D Q \tag{8}$$

modalna matrica prigušenja.

U daljim razmatranjima dopušta se mogućnost višestrukih kružnih frekvencija tipična za simetrične oscilatorne sisteme. Tada se matrica Ω može napisati u blok-dijagonalnom obliku

$$\Omega = diag(\omega_1^2 I_{n_1}, \ldots, \omega_r^2 I_{n_r}), \tag{9}$$

gdje je $\omega_1^2 \neq \omega_2^2 \neq \ldots \neq \omega_r^2$, a I_{n_j} je jedinična matrica reda $n_j \geq 1$, $n_1 + \ldots + n_r = n$. Modalna matrica prigušenja (8) raščlanjena na blokove saglasno podjeli (9) je oblika

$$R = \left(\begin{array}{c:c:c:c} R_{11} & R_{12} & . & R_{1r} \\ \hdashline R_{21} & R_{22} & . & R_{2r} \\ \hdashline . & . & . & . \\ \hdashline R_{r1} & R_{r2} & . & R_{rr} \end{array}\right) \tag{10}$$

Teorema 1. Prigušenje sistema (7),(9),(10) je prožimajuće ako i samo ako je

$$rankR_{jj} = n_j, \; j = 1, \ldots, r \tag{11}$$

Posledica 1. Ako su sve kružne frekvencije proste, prigušenje je prožimajuće samo tada kada su svi dijagonalni elementi modalne matrice prigušenja različiti od nule.

Sledeći nedavni rezultat [2] je takodje direktna posledica teoreme 1.

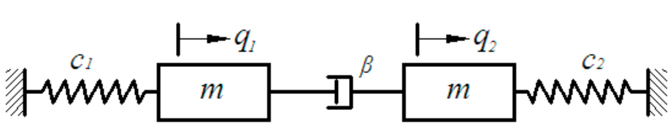
Posledica 2. Ako je $\max\limits_j (n_j) > rankR$, onda prigušenje nije prožimajuće.

Zaista, s obzirom da je $rankR \geq rankR_{jj}$ za $\forall j \in \{1, \ldots, r\}$, to uslovi (11) ne mogu biti zadovoljeni kada je $\max\limits_j (n_j) > rankR$.

Dokaz teoreme 1. Prvo, pretpostavimo suprotno tvrđenju teoreme 1, da su zadovoljeni uslovi (11) a da je $\lambda = i\omega$, $\omega \in \Re$, korijen karakteristične jednačine (4), a $X \in \Re^n$ njemu odgovarajući sopstveni vektor. Tada je, na osnovu leme 1, $\Omega X = \omega^2 X$, tj. $\omega^2 \in \{\omega_1^2, ..., \omega_r^2\}$. Uzmimo, radi određenosti, da je $\omega^2 = \omega_1^2$. Tada, iz $\Omega X = \omega^2 X$, imajući u vidu da je $\omega_j^2 \neq \omega_1^2$ za j = 2,…,r, nalazimo da je $X = (X_1^T \mid 0)^T$, $X_1 \in \Re^{n_1}$, pa je $X^T R X \equiv X_1^T R_{11} X_1$. Odavde, pošto je prema lemi 1 $X^T R X = 0$ i $R \geq 0$, slijedi $R_{11} X_1 = 0$, odnosno $X_1 = 0$ jer je $rank R_{11} = n_1$. Postoji, dakle, kontradikcija i pod uslovima (11) svi korijeni karakteristične jednačine imaju negativne realne djelove.

Pretpostavimo sada da nije zadovoljen neki od uslova (11), recimo, neka je $rank R_{11} < n_1$. Možemo smatrati da je $R_{11} = diag(r_{11}, ..., r_{n_1 n_1})$; u protivnom to se može postići pomoću ortogonalne transformacije koja ne mijenja strukturu matrice Ω. Pošto je $rank R_{11} < n_1$, to je bar jedan od dijagonalnih elemenata, recimo r_{11}, dijagonalne matrice R_{11} jednak nuli. Međutim tada, kako je matrica R pozitivno semidefinitna, moraju i svi elementi prve vrste i prve kolone te matrice biti jednaki nuli, odnosno sistem (7) se razdvaja na dva podsistema od kojih prvi izvodi neprigušeno harmonijsko kretanje sa kružnom frekvencijom ω_1. □

Primjer 1. Razmotrimo sistem sa dva stepena slobode prikazan na sl. 1, koji se sastoji od dva translatorno pokretna tijela jednakih masa *m*, vezanih za elastične opruge krutosti c_1 i c_2, i viskoznog prigušivača sa



Sl.1.

koeficijentom prigušenja β.

Za razmatrani sistem su:

$$R = \frac{\beta}{m}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; \Omega = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

Očigledno je $R \geq 0$, $rankR = 1$, i, dakle, sistem je djelimično prigušen. Kad je $c_1 \neq c_2$, na osnovu posledice 1 teoreme 1, prigušenje je prožimajuće i, prema tome, svako kretanje je prigušeno. U slučaju $c_1 = c_2$, na osnovu posledice 2 teoreme 1, prigušenje nije prožimajuće, odnosno moguća su kretanja na kojima ne dolazi do rasipanja energije. Očigledno, to su takva kretanja pri kojima obije mase harmonijski osciluju sa kružnom frekvencijom $\sqrt{c_1 / m}$, jednakim amplitudama i fazama, tako da tijela relativno miruju jedno u odnosu na drugo i, dakle, prigušnica ne izaziva rasipanje energije.

2. 2. KPP u normalnim koordinatama para $(A, \widetilde{B})$

Analogno modalnim koordinatama uvedenim na račun svojstva simetričnosti matrice C, mogu se uvesti i normalne koordinate u odnosu na simetričnu matricu prigušenja B (odnosno par matrica A i $\widetilde{B}$ polaznog sistema (1)). Neka je $k = rankB$, 1 ≤ k < n. Postoji ortogonalna matrica S ($S^T S = I$) koja transformacijom sličnosti matricu B transformiše na dijagonalnu matricu D ($S^T BS = D$), koju je pogodno zapisati u obliku podijeljenom na blokove

$$D = \left(\begin{array}{c:c} D_{11} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right) \tag{12}$$

gdje je $D_{11} = diag(d_1, ..., d_k)$, $d_j > 0$ za $\forall j \in \{1, ..., k\}$, $k = rankB$. Linearnom zamjenom koordinata

$$x = S\begin{pmatrix} v \\ \cdot\cdot \\ u \end{pmatrix}, \; v \in \Re^k, \; u \in \Re^{n-k} \tag{13}$$

jednačina (2) se transformiše na oblik

$$\begin{pmatrix} \ddot{v} \\ \cdots \\ \ddot{u} \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c:c} D_{11} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \cdots \\ \dot{u} \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c:c} P_{11} & P_{12} \\ \hdashline P_{12}^T & P_{22} \end{array}\right) \begin{pmatrix} v \\ \cdots \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

gdje je

$$P = S^T CS = \left(\begin{array}{c:c} P_{11} & P_{12} \\ \hdashline P_{12}^T & P_{22} \end{array}\right) \tag{15}$$

transformisana matrica krutosti podijeljena na blokove saglasno podjeli matrice D.

Uvedimo sljedeću k(n-k)x(n-k) matricu

$$F = \left(\begin{array}{c:c:c:c} P_{21} & P_{22}P_{21} & \ldots & P_{22}^{n-k-1}P_{21} \end{array}\right)^T \tag{16}$$

Teorema 2. Prigušenje sistema (14) je prožimajuće ako i samo ako je

$$rankF = n - k \tag{17}$$

Ako je $rankP_{12} = n - k$, tada je $rankF = n - k$ i iz teoreme 2 slijedi

Posledica 3. Ako je $rankP_{12} = n - k$ tada je prigušenje sistema (14) prožimajuće.

Dokaz teoreme 2. Pretpostavimo, suprotno tvrđenj teoreme 2, da je $rankF = n - k$

a da prigušenje nije prožimajuće, tj. da je ($i\omega, X = \begin{pmatrix} V \\ \cdots \\ U \end{pmatrix}$), $\omega \neq 0$, $V \in \Re^k$, $U \in \Re^{n-k}$, sopstveni par zadatka (3). Tada je, na osnovu leme 1, $DX = 0$ i $PX = \omega^2 X$, odakle slijedi $V = 0$, a zatim $P_{12}U = 0$ i $P_{22}U = \omega^2 U$. Poslednje dvije relacije dovode do

$$P_{12}P_{22}^j U = 0 \text{, j = 0,1,...,n-k-1} \tag{18}$$

ili, zapisano u ekvivalentnom obliku, $FU = 0$, odakle, s obzirom da je $U \in \Re^{n-k}$ i $rankF = n - k$, slijedi da je $U = 0$, što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom.

Pretpostavimo sada da je $rankF < n - k$. Tada postoji nenulti (n-k) dimenzioni vektor U takav da su zadovoljene jednačine (18). S druge strane je

$$U = \sum_{i=1}^{m} U_i \, , \; U_i \in \{\overline{U} \in \Re^{n-k} : P_{22}\overline{U} = \lambda_i \overline{U}\} \, , \tag{19}$$

gdje su λ_i, i = 1,…,m≤ n-k, različite sopstvene vrijednosti pozitivno definitne submatrice P_{22}. Unošenjem (19) u (18) dobijamo

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^j P_{12} U_i = 0 \, , \; j = 0,1,\ldots,n\text{-}k\text{-}1 \tag{20}$$

odnosno,

$$P_{12} T \Lambda = 0 \, , \tag{21}$$

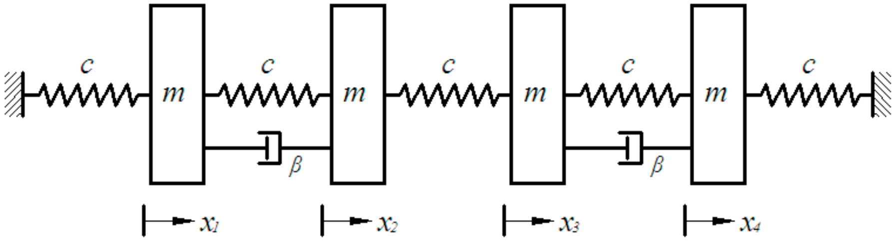
gdje su kolone (n-k)xm matrice T vektori U_i, a vrste mx(n-k) matrice Λ su vektori $(1, \lambda_i, \ldots, \lambda_i^{n-k-1})$. Iz (21) slijedi $P_{12}T = 0$, odnosno

$$P_{12} U_i = 0 \, , \; i = 1,2,\ldots,m \tag{22}$$

jer je, zbog $\lambda_i \neq \lambda_j$, $rank\Lambda = m$. Konačno, pošto je $U \neq 0$, mora postojati bar jedan sopstveni vektor U_i matrice P_{22} za koji je $P_{12}U_i = 0$, a tada je $X = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & U_i^T \end{pmatrix}^T$ sopstveni vektor zadatka (3) kojem odgovara imaginarna sopstvena vrijednost $i\sqrt{\lambda_i}$.□

Teoremu 2 primijenimo na sledeći sistem, koji je s tačke gledišta egzistencije rezidualnih kretanja razmatran u [7].

Primjer 2. Na slici 2 prikazan je sistem sa četiri stepena slobode koji osciluje u horizontalnom pravcu, a čine ga četiri tijela, svako jedinične mase, opruge jediničnih krutosti i dva prigušivača istog koeficijenta prigušenja β. Provjerimo da li je prigušenje u ovom sistemu prožimajuće.



Sl.2.

Matrice B i C ovog sistema su

$$B=\beta\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix} \tag{23}$$

Ortogonalna matrica

$$S=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{24}$$

transformacijom sličnosti matrice B i C transformiše na oblike

$$D=S^{T}BS=2\beta\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \tag{25}$$

i

$$P = S^T CS = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc:cc} 6 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \tag{26}$$

Iz (25) slijedi $k = rankD = 2$, a iz (26), u skladu sa ranijim označavanjem,

$$P_{12} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

odakle je $rankP_{12} = 2$ $(= n - k)$. Prema tome, na osnovu posledice 3, zaključuje se da je prigušenje ovog sistema prožimajuće, tj. sva njegova kretanja su prigušenog karaktera.

Ograničimo, uvođenjem linearnih veza, kretanje razmatranog sistema na nulti podprostor matrice disipativnih sila. Tako dobijeni redukovani sistem sa (n-k) stepena slobode je očigledno neprigušen, a njegove kružne frekvencije su korijeni sopstvenih vrijednosti (n-k) dimenzione podmatrice P_{22} u (14). Važi sledeće tvrđenje koje daje neophodan uslov prožimajućeg prigušenja polaznog sistema.

Teorema 3. Ako je prigušenje sistema (14) prožimajuće, onda su sve sopstvene vrijednosti matrice P_{22} međusobno različite.

Dokaz. Ako se neprigušeni oscilatorni sistem sa n stepeni slobode podvrgne dejstvu linearne homogene veze, onda će prema Rejlijevoj teoremi o uticaju veza na kružne frekvencije (v., npr., [8]), za tako dobijeni sistem sa (n - 1) stepen slobode važiti sledeće:

1) Ako su kružne frekvencije polaznog sistema međusobno različite, tave će biti i frekvencije redukovanog sistema; pri tome neke od njih, zavisno od oblika veze, mogu ostati nepromijenjene.

2) Višestruka kružna frekvencija redukovanog sistema je takođe kružna frekvencija polaznog sistema iste, ili za jedan veće, višestrukosti.

Za dokaz teoreme 3, dovoljno je, na osnovu prethodih zaključaka, pokazati da višestruka kružna frekvencija polaznog sistema figuriše kao prosta frekvencija, ili je nema, u spektru sistema redukovanog na nulti podprostor matrice prožimajućeg prigušenja.

Pretpostavimo, ne umanjujući opštost, da je jedna kružna frekvencija odgovarajućeg neprigušenog sistema, recimo ω_1, višestrukosti $s \geq 2$, a sve ostale neka su proste. Tada se u modalnim koordinatama $y^T = (\xi^T, \eta^T)$, $\xi \in \Re^s$, $\eta \in \Re^{n-s}$, matrice krutosti i prigušenja zapisuju u obliku

$$\Omega = \left(\begin{array}{c:c} \omega_1^2 I_s & 0 \\ \hdashline 0 & \hat{\Omega} \end{array}\right), \; R = \left(\begin{array}{c:c} R_{11} & R_{12} \\ \hdashline R_{21} & R_{22} \end{array}\right), \tag{28}$$

gdje je $\hat{\Omega} = diag(\omega_{s+1}^2, ..., \omega_n^2)$, $\omega_i \neq \omega_j \quad \forall i \neq j \in \{1, s+1, ..., n\}$, a sobzirom da je prigušenje prožimajuće na osnovu teoreme 1 je $rankR_{11} = s \leq k = rankR$. Redukciju razmatranog sistema na nulti podprostor matrice prigušenja

$$\{y \in \Re^n : Ry = 0\} \tag{29}$$

možemo izvršiti tako što ćemo prvo redukovati sistem na podprostor

$$\{y \in \Re^n : R_{11}\xi + R_{12}\eta = 0\} \supseteq \{y \in \Re^n : Ry = 0\} \tag{30}$$

a zatim tako dobijeni (n – s) dimenzioni sistem redukovati na nulti podprostor njegove matrice prigušenja. Lako se pokazuje, primjenom Lagranžovog postupka, da su u redukovanom (n – s) dimenzionom sistemu matrice inercije, prigušenja i krutosti sledećeg oblika

$$\hat{A} = I_{n-s} + \hat{\Phi}, \; \hat{B} = R_{22} - \hat{\Phi}, \; \hat{C} = \hat{\Omega} + \omega_1^2 \hat{\Phi} \tag{31}$$

gdje je $\hat{\Phi} = R_{12}^T R_{11}^{-1} R_{12}$. Kvadrati kružnih frekvencija odgovarajućeg neprigušenog sistema su korijeni polinoma

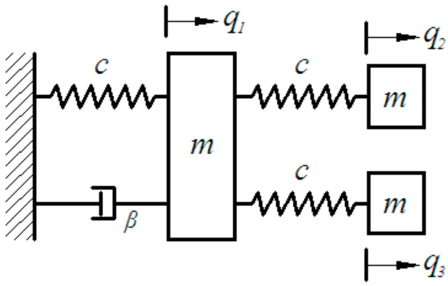
$$\Delta(\lambda) = \det(-\lambda\hat{A} + \hat{C}) = \det(\hat{\Omega} - \lambda I_{n-s} + (\omega_1^2 - \lambda)\hat{\Phi}) \tag{32}$$

Kako je

$$\Delta(\omega_1^2) = \det(\hat{\Omega} - \omega_1^2 I_{n-s}) = \prod_{j=1}^{n-s} (\omega_{s+j}^2 - \omega_1^2) \neq 0 \tag{33}$$

to ω_1 ne figuriše u spektru neprigušenog sistema redukovanog na podprostor (30), a samim tim neće se pojaviti ni kao višestruka frekvencija sistema redukovanog na podprostor (29). □

Primjer 3. Razmotrimo sistem sa tri stepena slobode prikazan na sl. 3, koji čine tri translatorno pokretna tijela jednakih masa m, vezana elastičnim oprugama jednakih krutosti c i prigušivač sa koeficijentom prigušenja β.



Sl.3.

Matrice D i P ovog sistema su

$$D = \frac{\beta}{m}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{c}{m}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

Očigledno je $k = rank D = 1$, a sopstvene vrijednoosti podmatrice $P_{22} = \frac{c}{m} diag(1,1)$ su jednake i, prema teoremi 3, prigušenje nije prožimajuće. Provjerimo ovaj zaključak primjenom teoreme 2. Matrica (16) je

$$F = -\begin{pmatrix} c & c \\ c^2 & c^2 \end{pmatrix} \tag{35}$$

pa je $rankF = 1$ i nije ispunjen uslov (17), jer je $n - k = 2$.

LITERATURA

[1] Shahruz S. M., Kessler P., Residual motion in damped linear systems, Journal of Sound and Vibration, 276, (2004), 1093-1100.
[2] Kliem W., Mailybaev A. A., Pommer C., Conditions revisited for asymptotic stability of pervasive damped linear systems, Journal of Sound and Vibration, 298, (2006), 471-474.
[3] Moran T, A simple alternative to the Routh-Hurwitz criterion for symmetric systems, ASME Journal of Applied Mechanics, 37, (1970), 1168-1170.
[4] Wallker J. A., Schmitendorf W. E., A simple test for asymptotic stability in partially dissipative symmetric systems, ASME Journal of Applied Mechanics, 40, (1973), 1120-1121.
[5] Bulatovic R. M., A note on the damped vibrating systems, Theoretical and Applied Mechanics (prihvaćeno za objavljivanje).
[6] Bellman R., Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill, New York, 1970.
[7] Wilms E. V., The finite residual motion of a damped four-degree-of-freedom vibrating system, Journal of Sound and Vibration, 244, (2001), 173-176.
[8] Кузьмин П. А., Малые колебания и устойчивость движения, Наука, Москва, 1973.