Проф. др Радоје ОСТОЈИЋ
Мр Весна РУБЕЖИЋ

ТЕОРИЈА ХАОСА

1. УВОД

Теорија хаоса је једна од најузбудљивијих и најзагонетнијих научних области која се појавила и процвјетала у посљедњих тридесетак година. Она је истакла интердисциплинарну природу проблема на фронту науке. Многе од нових идеја о хаосу појавиле су се независно једна од друге и практично истовремено у различитим областима. Методе теорије хаоса ушле су у већину научних дисциплина. Хаос може довести до губитка честица у акцелераторима или до губитка бродова на узбурканом мору.

Напредак теорије хаоса омогућиле су како апстрактне математичке идеје, тако и добро смишљени експерименти, а надасве појава рачунара. Хаос је наука за доба компјутера.

Традиционално, у аналима хаоса има пуно геометрије и пуно слика. Уобичајени жаргон о хаосу нагиње геометријским представама. То су фазни простори, орбите седласте тачке, токови и пресликавања , извори и понори.

Од 1983. године, када је Chua конструисао своје чувено коло, па до данас, хаотична кола и запажени интересантни феномени хаотичне динамике заокупљују пажњу не само инжењера, већ и шире научне јавности. IEEE публикација (Procedings of the IEEE) посвећује специјални број хаотичним системима у августу 1987. године. Циљ овог броја је био да информише инжењере и ширу јавност о могућности јављања хаотичног понашања у колима и системима. У то вријеме, већина инжењера су скептично и нерадо прихватили такво чудно понашање у колима и системима која дизајнирају. Тај специјални број је утицао на промјене односа многих инжењера према хаосу и његовој природи. Од тада, многи радови о хаотичним системима су објављени у IEEE Transactions on Circuits and Systems и другим инжењерским публикацијама. Запажено је хаотично понашање у новим колима и системима. Међутим, већина истраживача своју пажњу фокусирају на то како избјећи хаотично понашање. Тада још нема ни говора о синхронизацији или контроли хаотичних система, нити о примјенама. У октобру 1993. године IEEE Transactions on Circuits and Systems други специјални број посвећује хаотичним колима и системима. У то вријеме већ постоје нове идеје и тежње истраживача: потенцијална употреба врло специфичних и необичних особина хаотичног понашања за рјешавање инжењерских проблема као што су комуникације, асоцијативне меморије и проблеми контроле. Трећи специјални број IEEE Transactions on Circuits and Systems у октобру 1997. године посвећују синхронизацији и контроли хаотичних система. Већ постоји велики број могућих нових апликација хаотичних система. Четврти специјални број IEEE Transactions on Circuits and Systems у децембру 2000. посвећује примјени хаоса у некохерентним комуникационим системима и убрзо затим пети број у децембру 2001. такође, примјени хаоса у модерним комуникацијама. Током протеклог времена многа сазнања о хаотичној динамици стекла су и саопштила истраживања широм свијета. У експериментима и симулацијама запажени су хаотични феномени. Међутим, теоријска основа још није задовољена. Теоријски резултати о присуству или одсуству хаоса су од највеће вриједности не само кад желимо избјећи хаос него и у новим областима дизајнирања хаоса у техничким средствима и инжењерским системима. Зато је сваки нови научно-теоријски метод који даје више информација добродошао.

Хаос, област науке још увијек у настајању и још увијек у полету, подржана употребом рачунара, нашла се природно у избору аутора за овај рад. Након увода наведени су основни појмови детерминистичког хаоса као и основни елементи пратећег апарата неопходног за изучавање хаоса. Затим је пажња посвећена Chua-ином колу које је најпростија парадигма за разматрање непериодичних феномена у нелинеарним колима. Четврти дио је посвећен математичком доказу хаотичног понашања-питању које је још неријешено. У петом дијелу говори се о могућој употреби хаотичних система. Будући проблеми и закључци дати су на самом крају рада, а за њима и списак употријебљене литературе.

2. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

Израз хаос означава неуређено или нерегуларно стање или кретање неког система. Детерминистички хаос означава неуређено (апериодично) кретање изазвано детерминистичким динамичким законима, односно неком унапријед заданом тачно дефинисаном процедуром [3]. Отуда и дубоки филозофски сазнајни смисао, поред очигледних технолошких импликација у познавању преласка у хаос: изгледа, наиме, парадоксално, али је тачно да општепознати детерминистички закони физике, као што су Newton-ови закони или Navier-Stokes-ове једначине, могу да изазову код неких система послије довољно дугог времена нерегуларно и непредвидљиво кретање. При томе није ријеч о 10^{23} молекула који захтијевају статистичке методе описивања, нити о системима са шумом, већ о крајње једноставним системима са једним или неколико степени слободе.

Динамички системи

Разматрамо устаљена кретања динамичких система задата помоћу обичних диференцијалних једначина:

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t)) \tag{1}$$

или помоћу итеративних пресликавања:

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{2}$$

гдје је x вектор из фазног простора $\Re^m$, $m \geq 1$. То су системи са континуираном или дискретном временском зависношћу. При томе примјећујемо да у једначини (1) нема експлицитне временске зависности – ријеч је о аутономним диференцијалним једначинама [1], [2], [3], [4]. Неаутономни системи могу се схватити као специјалан случај аутономних уколико се вријеме дефинише као нова промјенљива, а број једначина прошири са $\dot{t} = 1$. Међутим и неаутономни системи и пресликавања имају својих особености које захтијевају анализу, независно од опште теорије аутономних динамичких система. Функције $F(x)$ или $f(x_n)$ нелинеарне функције свог аргумента. Неуређено или хаотично кретање може настати само код нелинеарних динамичких система [1], [2], [3], [4].

Рјешење једначине (1) са почетним условом x_0, $x(t) = \phi_t(x_0)$, генерише трајекторију диференцијалне једначине (1).

Атрактори

Трајекторије које полазе из домена атракције послије довољно дугог времена падају на атрактор. То би била и најједноставнија оперативна дефиниција: атрактор је скуп тачака на којима се акумулирају трајекторије када $t \to \infty$, за свако из домена атракције. Прецизнија дефиниција захтијева још да атрактор садржи макар једну орбиту која је свуда густа [1], [2], [3], [4].

Сложеном хаотичном кретању одговарају посебни атрактори чудних особина. Стога се они и зову чудни атрактори. Чудни атрактор је најприје атрактор, тј. ограничени дио фазног простора запремине нула који привлачи себи све трајекторије из домена атракције. Он је затим компактан – не може се разбити на одвојене дијелове. Другим ријечима, колекције изолованих тачака које се виде на екранима рачунара приликом нумеричких симулација, не могу представљати комплетан чудни атрактор. Типична трајекторија мора током временске еволуције да посјети сваку тачку атрактора. Да би коректно описао физичку реалност, чудни атрактор мора бити структурно стабилан и генеричан. То значи да мале промјене контролних параметара треба да изазову мале промјене на атракторима, а затим да скуп параметара за које је атрактор опсервабилан није мјере нула [1], [2], [3], [4].

Но, основна карактеристика чудних атрактора је осјетљивост на почетне услове, која је посљедица анизотропне контракције фазног простора [1], [2], [3], [4]. Уколико бар у једном правцу умјесто контракције долази до истезања и затим преклапања, онда ће се блиске тачке наћи током времена произвољно далеко једне од других, што доводи до принципијелне неодредљивости њиховог положаја, до пораста ентропије у систему, позитивних коефицијената експанзије (тзв. Љапуновљевих експонената) и хаоса.

Квалитативни показатељи детерминистичког хаоса

Спектар снаге и аутокорелација

Спектар снаге представља квадрат модула Fourier-овог трансформа дуж трајекторије:

$$P(\omega)=|\overline{x}(\omega)|^2, \text{ гдје је } \overline{x}(\omega)=\int_0^\infty \exp(j\omega t)x(t)dt \tag{3}$$

Спектар је погодан за квалитативно разликовање периодичног кретања са више фреквенција (квазипериодичног) од хаотичног кретања. У спектру периодичног кретања виде се само линије које одговарају одређеним фреквенцијама, док у спектру хаоса преовладава широк раван континуум [3].

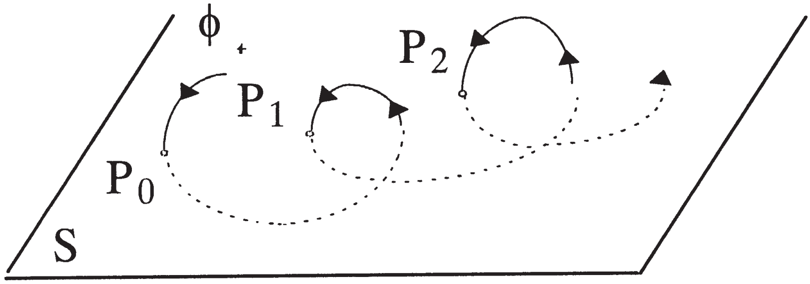
Као сљедеће погодно средство у испитивању хаоса користи се аутокорелациона функција:

$$C(\tau)=\int_0^\infty \overline{x}(t)\overline{x}(t+\tau)dt \tag{4}$$

гдје је $\overline{x}(t)=x(t)-\overline{x}(0)$ одступање од средње вриједности. Аутокорелациона функција мјери корелацију (сличност) сигнала са самим собом у различитим интервалима времена. Корелација је висока (константна или осцилирајућа) за регуларна кретања, док за хаотична кретања она брзо (експоненцијално) опада на нулу. [3].

Poincare-ови пресјеци

Последње средство које заслужује посебан осврт и које се радо користи у анализи динамичких система је Poincare-ов пресјек. Посматрајмо неку трајекторију у m-димензионалном фазном простору и пресјецимо је неком (m-1)-димензионалном хиперповрши (не мора бити раван; важно је да је трансверзална на ток). Скуп тачака у пресјеку, при чему се у обзир узимају само улазне тачке трајекторије са једне стране површи, зове се Poincare-ов пресјек (слика 1). Пресликавање које нас води од једне тачке пресјека до друге дуж трајекторије зове се Poincare-ово пресликавање. Оно замјењује временски континуирану еволуцију дискретним пресликавањем [1], [2], [3], [4].



Слика 1. Poincare-ов пресјек и Poincare-ово пресликавање

Код хаотичног кретања (и то је још једна његова квалитативна карактеристика) никакве фигуре се не могу разазнати у прасјеку. Хаотичне тачке мање-више равномјерно испуњавају цијелу раван пресјека. Ово су били квалитативни показатељи детерминистичког хаоса. Међутим, за његово квантитативно описивање потребни су нови појмови.

Квантитативни показатељи детерминистичког хаоса

Љапуновљеви експоненти

Љапуновљев или L-експонент мјери раздвајање двију блиских почетних тачака током итерација. Уколико је $\lambda > 0$, онда је раздвајање експоненцијално, постоји велика осјетљивост на почетне услове и у понашању система појавиће се хаос. То понашање зависи од сопствених вриједности матрице .

Обиљежимо те сопствене вриједности са $\{a_i(x_0,t) | i=1,...,m\}$. Тада се Љапуновљеви експоненти дефинишу са:

$$\lambda_i(x_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|a_i(x_0,t)| \tag{5}$$

и при томе се обично подразумијева да су поређани у силазном низу, $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_m$. Љапуновљевих експонената има онолико колико има димензија у фазном простору и они сачињавају Љапуновљев спектар динамичког система. Љапуновљеви експоненти погодни су за класификацију устаљених понашања и атрактора. За било који атрактор укупна контракција мора бити већа од укупне експанзије, $\sum \lambda_i < 0$. У случајевима чудних атрактора мора бар један експонент бити већи од нуле. Чудни атрактори се појављују тек у тродимензионалним фазним просторима. Случај са два позитивна експонента зове се хиперхаос [1], [2], [3], [4].

Колмогоровљева ентропија

Колмогоровљева или К-ентропија мјери колико је хаотичан односно неуређен неки систем [1], [2], [3], [4]. Она, дакле, мјери количину информације потребну за прецизно одређивање трајекторије у фазном простору. К-ентропија се може схватити и као брзина губљења неке почетне информације о положају система у фазном простору. Код једнодимензионалних хаотичних пресликавања К-ентропија једнака је Љапуновљевом експоненту. У више димензија, уколико је више од једног L-експонента позитивно важи Pesin-ова формула, по којој је К једнако суми позитивних експонената.

Фрактална димензија

У свакодневном животу појам димензије је доста интуитиван појам. Живимо у тродимензионалном свијету, знамо да раван има три димензије. Доста тога у физици дешава се у четвородимензионалном простор-времену итд. Строже математички можемо рећи да је то број независних компоненти вектора у неком линеарном векторском простору или код динамичких система број независних константи потребан за потпуно задавање почетних услова. Овакво схватање прејудицира цјелобројност димензије. Међутим, постоје геометријски објекти чија је димензија нецјелобројна. То су фрактали. Одговарајућу дефиницију димензије понудио је Hausdorff [1], [2], [3], [4]. Најједноставнији геометријски објекат који има нецјелобројну димензију је тзв. Cantor-ов скуп [1], [2], [3], [4]. Његова димензија је мања од 1 и износи приближно 0.631.

Испоставља се да су димензије чудних атрактора, слично К-ентропијама и Л-експонентима, једно од основних квантитативних обиљежја која разликују хаотична кретања од региларних или случајних. Различита хаотична кретања имају различите димензије. Димензија атрактора је први и основни податак који се може о њему дати: фиксна тачка има димензију нула, гранични циклус 1, а квазипериодични циклус – димензију 2. Димензије одређују и доњу границу минималног броја варијабли потребних за описивање неког динамичког система. Уколико атрактор локално личи на $\Re^m$, онда је најмањи број варијабли управо м.

Чудни атрактори, по правилу, имају компликовану фину структуру која локално не личи ни на један еуклидски простор. Њихова димензија, дакле, не може бити цјелобројна и они представљају природан примјер фрактала [1], [2], [3], [4]. У типичном експерименту или нумеричкој симулацији атрактор се никада не види као геометријски објекат, већ се обично прате експерименталне тачке мјерења и њихова дистрибуција на атрактору. Стога је за потпуније описивање атрактора потребно узети у обзир не само геометријску димензију већ и појмове односно димензије засноване на пробабилистичким концепцијама мјера дефинисаних на атракторима. Те димензије, као што је, на примјер, информациона димензија атрактора, узимају у обзир различиту учесталост посјете различитих дјелова атрактора. Уколико су експерименталне или нумеричке тачке равномјерно распоређене по атракторима онда разлике нема и релевантна је само геометријска (Hausdorff-ова) димензија [1], [2], [3], [4].

Карактеристике хаоса

Основне карактеристике хаоса су осјетљива зависност од почетних услова, случајност у временском домену и широкопојасни спектар снаге. За разлику од периодичних временских облика, временски таласни облици за хаотични атрактор су сасвим ирегуларни и не јавља се понављање у било ком периоду посматрања коначне дужине. Мада је произведено детерминистичким диференцијалним једначинама, рјешење изгледа „случајно”. Брза декорелација трајекторија које почињу у блиским иницијалним стањима зове се осјетљивост на почетне услове, опште је својство хаотичних система и узрок је дуговременској непредвидљивости хаотичних сигнала. С обзиром на то да су хаотични системи детерминистички, двије трајекторије које стартују из идентичних почетних стања проћиће тачно исти пут кроз простор стања. У пракси, немогуће је конструисати два система са идентичним параметрима; нека само стартују из идентичних почетних стања. Међутим, радови Pecora, Carrolla и других [12], [17] показују да је могућа синхронизација два хаотична система тако да њихове трајекторије остану блиске. Ова идеја се сада експлоатише у комуникационим системима. Информације модулисане на „случајном” хаотичном носиоцу могу бити демодулисане употребом синхронизованог пријемника [12], [17], [18].

Бифуркације и сценарији прелаза у хаос

Различити су начини на које динамички систем може да пређе у хаос. У механизму преласка основну улогу игра механизам бифуркација, односно начин на који приликом промјене контролног параметра једне фиксне тачке постају нестабилне, а друге стабилне [2], [3]. Зато је прије описа различитих начина преласка у хаос, тј. хаотичних сценарија, потребно описати како све динамички системи могу да пређу са једног типа атрактора на други. Такви прелази у динамици система називају се бифуркацијама. Израз бифуркација први је употријебио Poincare да би описао гранање стационарних рјешења код диференцијалних једначина типа (1).

Бифуркације представљају квалитативне, тополошке промјене на атракторима динамичких система које се дешавају током варијације контролног параметра μ [2], [3]. Вриједности контролног параметра при којима долази до бифуркација зову се бифуркационе вриједности параметра μ_B, а тачка је бифуркациона тачка. График свих равнотежних тачака у функцији контролног параметра зове се бифуркациони дијаграм. Постоји више врста бифуркација које се могу десити у системима типа (1) или (2).

Постоје четири основне врсте бифуркација динамичких система [2], [3]: тангентне, транскритичне, виљушкасте и Hopf-ове. Ове бифуркације доводе до одговарајућих сценарија прелаза у хаос.

2. ОД ЛИНЕАРНОГ КОНЦЕПТА ДО НЕЛИНЕАРНЕ ДИНАМИКЕ И ХАОСА

Упркос чињеници да се многи феномени у електричним колима могу анализирати једино коришћењем нелинеарних модела, теорија нелинеарне динамике је још увијек недовољно проучена. Заједнички приступ у многим инжењерским радовима јесте „линеаризација, а затим анализа". Овакав став довео је до тога да су многи инжењери остали затечени и изненађени када линеарни концепт није могао рачунски да потврди експериментално добијене резултате.

У току развоја науке, феномен нелинеарности био је примјећиван, али много чешће занемариван. Наиме, није постојао концепт који би могао да разјасни овај феномен. Класичан примјер оваквог става је анализа осцилаторног кола, коју је спровео холандски инжењер и физичар Van der Pol. Свој рад објавио је у часопису „Nature" 1927. године, указавши да се у колу „често јавља неки неочекивани шум". Појаву тог шума третирао је као „другоразредну", коју није потребно даље анализирати. Истраживања су много година касније разјаснила услове у којима се тај шум јавља 5]. Када је наука почела да се бави нелинеарним динамичким системима створен је један сасвим нов речник тј. језик атрактора, бифуркација и хаоса 5].

За разлику од линеарних за већину нелинеарних система није могуће дати експлицитна решења. Међутим, одређена „универзалност" у оквиру појединих група нелинеарних појава омогућава њихову квалитативну анализу. Многе комплексне системе могуће је представити моделима нижег реда на сасвим адекватан начин [5].

Chua-ино коло је најпростија парадигма за разматрање непериодичних феномена у нелинеарним колима [5] , [6], [7] .

Chua-ино коло

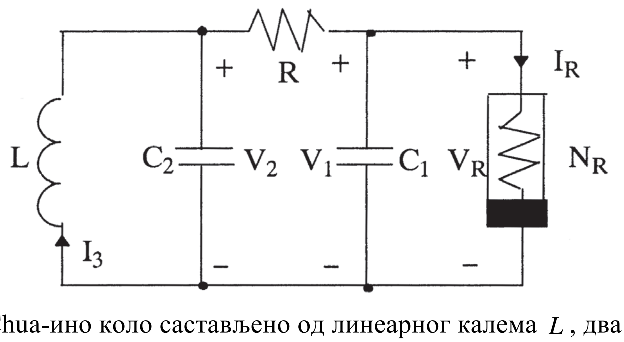
Да би испољавало хаос, аутономно електронско коло састављено од отпорника, кондензатора и калемова мора садржати [6], [8]:

– најмање један нелинеарни елемент
– најмање један локално активан отпорник
– најмање три елемента са акумулисањем енергије.

Chua-ино коло је најпростије електронско коло које задовољава ова три критеријума. Chua-ино кола је један од ријетких физичких система за који је постојање хаоса показано у експерименту, симулирано на рачунару и доказано математички. Chua-ино коло показује врло богато динамичко понашање у параметарској равни, укључујући све типове бифуркација и путеве у хаос Коло је лако конструисати, употребом стандардних електронских компоненти. [6], [8].

Генеза Chua-иноī кола

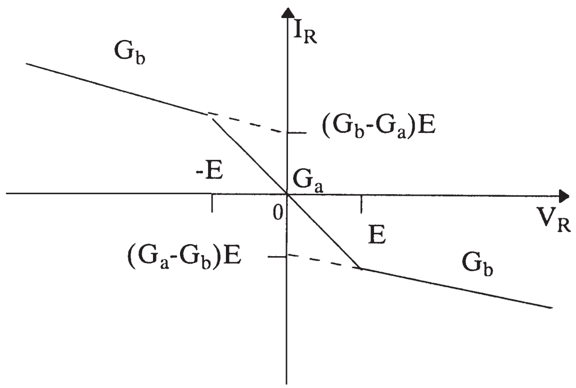
Током посјете Јапану 1983. године Chua је био свједок узалудног покушаја стварања хаоса у електричном аналогу Лоренцових једначина. Он је сматрао да би хаос могао бити произведен у дјеловима линеарном електронском колу ако оно посједује најмање двије нестабилне равнотежне тачке – једна да обезбјеђује растезање а друга превијање трајекторија. Са овим схватањем, он систематски идентификује ово у дјеловима линеарно коло трећег реда које садржи један напоном контролисани нелинеарни отпорник. Хаотичну природу Chua-иног кола први је запазио Matsumoto 1983. употребом компјутерске симулације. Наиме, Chua је конструисао коло и објаснио принциоп рада Matsumoto-у непосредно пред



Слика 2. Chua-ино коло састављено од линеарног калема L, два линеарна кондензатора C_1, C_2, једног линеарног отпорника R и напоном контролисаног нелинеарног отпорника N_R.

свој изненадни одлазак у болницу. Matsumoto који није учествовао у ранијим фазама истраживања, сада приступа симулацији кола на рачунару и запажа хаос. Он је дао овом хаотичном колу име Chua-ино коло и први пут га објавио у раду „A chaotic attractor from Chua's circuit", IEEE Trans. Circuits Syst. 1984. године. Специфицирана карактеристика напоном контролисаног нелинеарног отпорника N_R мора имати најмање двије нестабилне тачке. Chua ствара коло као на слици 2 [6].

Ускоро послије његовог концпирања, богато динамичко понашање Chua-иног кола потврђено је компјутерском симулацијом и експериментом [6]. Од тада, било је интензивних напора у разумијевању сваког аспекта динамике овог кола.



Слика 3. Карактеристика нелинеарног резистора N_R.

Ово коло може бити описано са три обичне диференцијалне једначине (једначине стања). Бирајући I_3, V_2 и V_1 за промјенљиве стања, пишемо једначине:

$$\frac{dI_3}{dt} = -\frac{1}{L} V_2$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{G}{C_2}\left(V_2 - V_1\right) \tag{6}$$

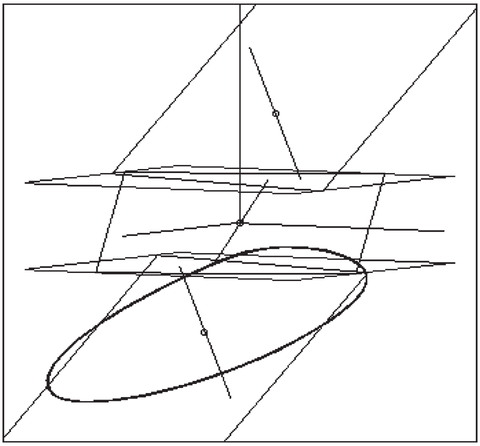
$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{G}{C_1}\left(V_2 - V_1\right) - \frac{1}{C_1} f\left(V_1\right)$$

гдје је

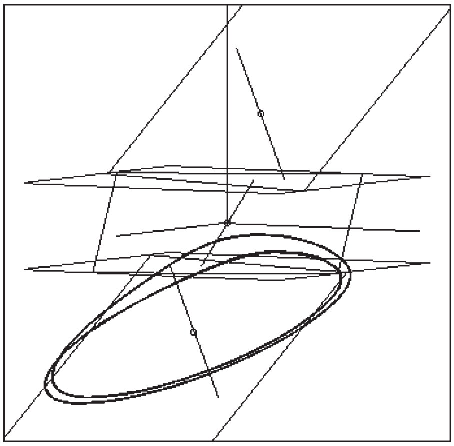
$$I_R = f(V_R) = \begin{cases} G_b V_R + (G_b - G_a E)\, ako & V_R < -E \\ G_a V_R & ako - E \le V_R \le E \\ G_b V_R + (G_a - G_b) E\, ako & V_R > E \end{cases} \qquad (7)$$

и $E > 0$, $G_a < 0$ и $G_b < 0$.

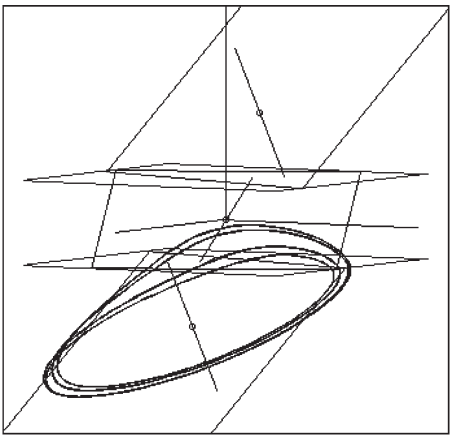
На слици 4 су приказани периодични и хаотични атрактори добијени из Chua-иног кола.



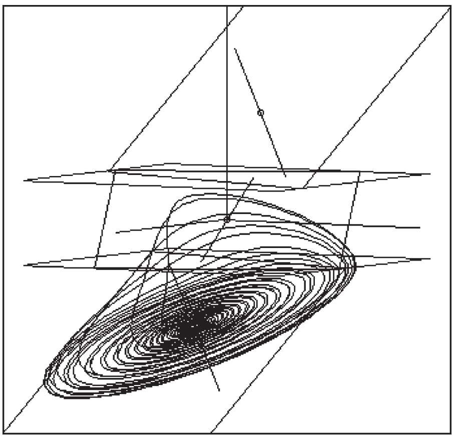
(a)



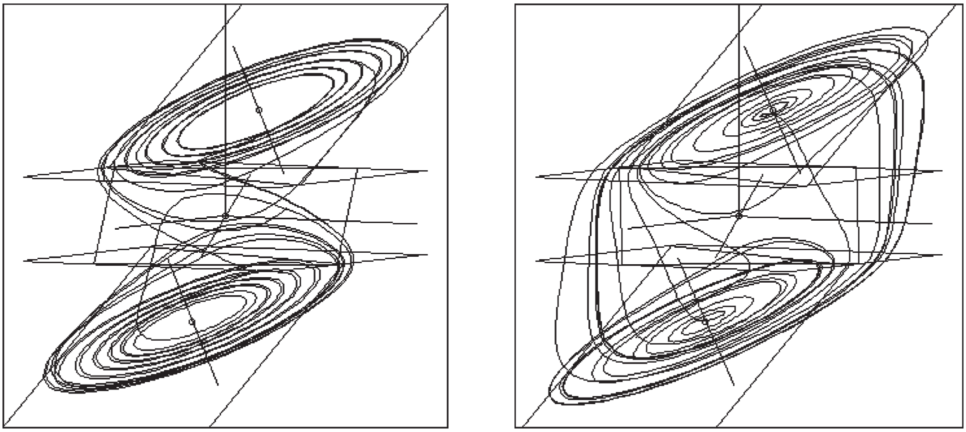
(b)



(c)



(d)



(e) (f)

Слика 4. ABC симулацијом добијене C_1 бифуркационе секвенце. $L = 18mH$, , $G = 555.556\mu S$, . (а) $C_1 = 10.75nF$ – Период 1 гранични циклус. (б) $C_1 = 10.5nF$ – Период 2 гранични циклус. (ц) $C_1 = 10.4nF$ – Период 4 гранични циклус. (д) $C_1 = 10.1nF$ – Спирални Chua-ин хаотични атрактор. (е) $C_1 = 10.0nF$ – Дупло-спирални Chua-ин хаотични атрактор. (ф) $C_1 = 8.0nF$ – Дупло-спирални Chua-ин хаотични атрактор. ABC је специјализовани софтвер за симулацију Chua-иног кола.

Значај Chua-иног осцилатора је у његовој универзалности, тј. у чињеници да он може генерисати исто квалитативно понашање као било који члан фамилије C континуалних, непарно-симетричних, у дјеловима линеарних векторских поља у $\Re^3$ [6], [7], [8]. Овај резултат је фундаментално важан зато што он унифицира многе радове о хаотичним колима и системима, те тако избјегавамо потребу анализе ових кола и система као посебних и неповезаних система. Заиста, сваки бифуркациони и хаотични феномен који испољава било који члан фамилије C такође је испољен и у овом универзалном колу. Генералност Chua-иног осцилатора може бити употријебљена да апроксимира друге хаотичне системе у литератури, који нису неопходно у сегментима линеарни [6], [7], [8].

4. МАТЕМАТИЧКИ ДОКАЗ

Хаотично понашање је запажено у експерименту и у симулацијама на рачунару. Поставља се питање шта је са математичким доказом хаотичног понашања. Потребан је метод који ће потврдити или оповргнути постојање хаоса у неком систему у ригорозном математичком смислу. Један од најефикаснијих до сада познатих метода је метод Шиљникова. Но, и он има велику мањкавост; захтијева доказ постојања хомоклиничне или хетероклиничне орбите [7]. Постојање ових орбита је математички врло тешко доказати. Једно од ријетких кола за које си научници то успјели је Chua-ино коло. Дакле, проблем математичког доказа постојања хаоса још увијек није ријешен и групе научника широм свијета раде на његовом рјешавању.

5. МОГУЋА ПРИМЈЕНА ХАОТИЧНИХ СИСТЕМА

Током посљедње декаде запажено је значајно повећање интересовања за хаотичне феномене у различитим физичким системима. Међутим, до врло скоро, домен хаоса је разматран на академском нивоу, без значајнијих примјена у реалном животу. Хаос је разматран више као нежељен феномен, често опасан за рад реалних физичких система и према томе, требало га је избјећи. Практично, научници који су проучавали хаос развијали су методе за дизајнирање система без хаоса.

Међутим, у реалним животним ситуацијама, сријећемо хаос у нормалном раду система. На примјер: динамика временских промјена (клима), на макро нивоу и рад људског мозга у хаотичном моду, на микро нивоу .

Разматрајући хаотичне системе поставља се питање да ли је могуће наћи механизме за спољашњи утицај на њихово понашање тј. контролу и да ли их је могуће искористити у одређене сврхе, на примјер, за процесирање сигнала. Такође, од значаја је питање повезивања система, који раде у хаотичном режиму и могућности грађења система од практичне важности.

Двије нарочито интересантне идеје које су се појавиле и истакле током последње декаде су синхронизација хаотичних система, или, краће, хаос синхронизација и контрола хаотичних система, тј. хаос контрола.

Хаотични системи су окарактерисани као „осјетљиви на почетне услове”. Мала грешка у специфицирању стања или параметара детерминистичког хаотичног система даје грешку која у будућности може бити велика. Хаотични систем је, према томе, непредвидљив у дужем времену.

Рјешења два хаотична система који стартују у готово, али не сасвим, идентичним условима постају некорелирана унутар коначног времена. Донекле је изненађујуће, према томе, мислити да два хаотична система могу бити синхронизована у смислу да је стање једног асимптотски достигнуто од другог. Овај нетривијални феномен је назван „хаос синхронизација” [12], [13], [14], [15], [16], [17].

Хаос контрола користи чињеницу да хаотична рјечења за устаљено стање „путују” између бесконачног броја нестабилних периодичних рјешења. Техника осјетљивости на пертурбацију стања или параметара може бити експлоатисана за стабилизацију периодичних орбита или вођење трајекторија дуж одређеног пута помоћу неког контролног сигнала и означена је као „хаос контрола” [24].

И хаос синхронизација и хаос контрола су привлачиле значајни истраживачки интерес током последњих пет година, не само због самог феномена који стимулиже научно интересовање, него његовог утицаја на примјене у којима богата динамика хаотичних рјешења нуди значајне предности над периодичним рјешењима за устаљено стање.

Пошто синхронизација игра значајну улогу у модерним комуникационим системима, један од најинтензивније разматраних домена примјене хаотичне синхронизације је у комуникацијама. Овдје, постоји интересантна могућност да хаотични сигнали могу бити употријебљени као носиоци информације из једне локације у другу на сигуран и робустан начин [12], [13], [14], [15], [16], [17].

Из перспективе контроле, динамички системи који раде у хаотичном режиму су потенцијално више промјенљиви од оних који раде у периодичном режиму. Евидентна је појава да неки природни системи користе промјенљивост хаоса да би обезбиједили адаптивност у свом понашању.

У овој клими узбуђења око могућности за процесирање сигнала употребом хаоса, многи радови, специјални бројеви часописа и серије конференција су посвећиване теми синхронизације и контроле хаоса. Ове теме истакнуте су у специјалном броју IEEE Trans. Circuits and Systems I и II из октобра и новембра 1993. године. С обзиром да су ова два пољасинхронизација и контрола хаоса брзо напредовале у последњих пет година IEEE им посвећује други специјални број у октобру 1997. године и трећи специјални број у децембру 2001. године.
За аутора овог рада посебно интересантно је питање синхронизације хаотичних кола и примјена хаотичних кола и система у комуникацијама.

Синхронизација хаотичних система и примјена у модерним комуникационим системима

Разматрајмо једну од главних особина често наглашавану у дефиницији хаотичног понашања, особину осјетљиве зависности од почетних услова. На основу те особине закључили би смо да синхронизација није могућа, јер није могуће у реалним системима репродуковати тачно исте почетне услове или потпуно једнаке параметре два система. Чак и инфинитезимална промјена било којег параметра ће резултовати у дивергенцији орбита које су стартовале из блиских почетних стања.

Посматрајмо два или више нелинеарних система ($N \geq 2$):

$$\dot{x}_i = f_i(x_i), \; x \in \Re^n, \; 1 \leq i \leq N \cdot \tag{8}$$

Ако желимо да их синхронизујемо, значи, најједноставније речено, желимо да нађемо услов под којим њихова рјешења међусобно конвергирају, тј.

$$\lim_{t\to\infty}\left(x_i - x_j\right) = 0\,,\ i \neq j\,. \qquad (9)$$

Постоји неколико концепата за добијање сихнронизованог рада хаотичних система [12], [13], [14], [15], [16], [17].

Преглед досадашњих рјешења

Синхронизација хаотичних система сугерише могућност комуникација употребом хаотичних сигнала. Много радова са овом темом објављено је у последњих 5-6 година. Важност открића Pecora и Carrola брзо је освијетљена у обради сигнала и колима и системима за комуникације. Ogorzalek и други [12] су показали како концепт синхронизације може бити употријебљен за маскирање информација додајући хаотични сигнал говорном сигналу који се преноси. Хаотични сигнал је обновљен у пријемнику употребом синхронизујућег ефекта. Говорни сигнал је просто добијен одузимањем. Овај прилаз користе и Cuomo и други у раду [13] на примјеру Lorenz-ових система. Треба нагласити да у овом прилазу ниво снаге информационог сигнала мора бити знатно нижи од снаге хаотичног сигнала да би била могућа синхронизација. Ово је основна мана овог прилаза преносу информација.

Неки истраживачи користе прилаз на бази инверзног система за комуникације употребом хаоса. У овом приступу информациони сигнал је помијешан са хаотичним употребом неке функционалне операције. Пријемник се састоји од синхронизованог хаотичниог осцилатора, а информациони сигнал се реконструише употребом инверзне операције оној која је обављена у пријемнику [18], [19].

У раду [15] Corron и Haks саопштавају још један начин комуникација употребом хаотичних сигнала. Они предлажу да предајник садржи хаотични осцилатор са једним параметром који је модулисан информационим сигналом. Пријемник садржи синхронизовани хаотични подсистем увећан нелинеарним филтром за реконструкцију информационог сигнала. Овај прилаз је демонстриран употребом нумеричке симулације на Lorenz-овом и Rossler-овом систему као и за Chua-ино коло.

У раду Leung-а и Lam-а [20] такође се користи хаотична модулација којом се бифуркациони параметар динамичког система чини зависним од сигнала који треба пренијети. У овом раду разматра се демодулација ове комуникационе шеме помоћу адаптивног филтра. Адаптивни филтар процјењује бифуркациони параметар (тј. сигнал који се преноси). Коришћени су: LMS (the leas mean square) algoritam, RLS (the recursive-leas square) техника и Kalman-ов филтар.

Fradkov и Markov у [21], разматрају процес синхронизације два нелинеарна вишедимензионална система са непознатим параметрима. Они предлажу генералну процедуру за дизајнирање адаптивног синхронизационог правила заснованог на SP (spead-gradient) методи. Резултати су илустровани на примјеру синхронизације пара Chua-иних кола и пара кола са тунел диодама.

Неколико сличних метода за пренос дигиталних сигнала може се наћи у литератури. Cuomo, Oppenheim, Strogah у раду [13] користе модулацију коефицијената хаотичног система у предајнику. У пријемнику, врши се одговарајућа детекција синхронизационе грешке употребом нископропусног филтра и теста прага. Ово је примијењено на Lorenz-ов систем. Доказ синхронизационог ефекта изведен је употребом 3-D Љапуновљеве функције.

Сличну технику користи за примјер Chua-иног кола са у дјеловима линеарном нелинеарношћу Ogorzalek у раду [12]. Он такође користи параметарску модулацију у предајнику за пренос бинарних сигнала. Наиме, он користи различити хаотични атрактор за сваки симбол у поруци. Пријемник се састоји од два пријемна подсистема; један за симбол „0”, други за симбол „1”. На пријему, дакле, треба одредити који од подсистема је синхронизоиван. Овај прилаз, због тога, захтијева компликовану детекциону логику у пријемнику.

Dedieu, Kennedy и Hasler у раду [16] користе исту технику за пренос дигиталног сигнала употребом хаотичног носиоца. Сваки симбол који се преноси кодиран је као један атрактор Chua-иног кола. Симболи су детектовани у пријемнику помоћу каскаде самосинхронизујућих Chua-иних подсистема.

Поред наведених, постоји још много радова о синхронизацији хаотичних система и евентуалној примјени у комуникацијама од којих би посебно навела радове [22], [23] у специјалном броју IEEE из октобра 1997. године посвећеном синхронизацији и контроли хаотичних система.

Преглед осталих могућих примјена

Поред синхронизације важну примјену нашла је и контрола хаотичних система. Ogorzalek у раду [24], описује различите концепте контроле који су развијени у хаотичним системима. Контролом се утиче на систем који ради у хаотичном режиму на такав начин да се постигне жељени тип динамичког понашања који је типично равнотежна тачка или периодична орбита. Ogorzalek користи систем варијације параметара, абсорбер хаотичних осцилација, контролу помоћу отворене петље, линеарну контролу помоћу повратне спреге и методе за стабилизацију нестабилних периодичних орбита односно Ott-Grebogi-Yorke-ov (OGY) прилаз.

Grebogi и Lai у раду [25] користе, такође, OGY метод за постизање периодичног кретања. Они показују да је OGY метод примјенљив у разматрању вишедимензионалне динамике.

Yang и Chua у раду [26] предлажу импулсну контролу као изузетно погодну за дизајнирање дигиталних контролних шема. У овом раду они износе неколико теорема о стабилности импулсне контроле система као и теорију импулсне синхронизације два хаотична система. За симулацију користе типични хаотични систем – Chua-ино коло.

Brandth и Chen у раду саопштавају метод повратне спреге са временским кашњењем за бифуркациону контролу нелинеарних модела хаотичне срчане активности. Rabinovich и други описују методе контроле тј. самоконтроле и саморегулације неурона у живим организмима. На разноврсност примјене хаотичних кола и сигнала указују и следећа два рада. Baird и други указују да канонична једначина Chua-иног кола може бити употријебљена за конструкцију неуралне мреже асоцијативне меморије са вишеструким хаотичним Chua-иним атракторима. Ова мрежа може бити успјешно примијењена у систему за препознавање руком писаних бројева. Rodet разматра верзију Chua-иног кола у којој су линеарни елементи замијењени линијом за кашњење. Показало се да је ово коло модел интересантне класе музичких инструмената, оних који су слични кларинету и да може наћи примјену у синтези звука. Ово коло јавља изненађујуће богатство бифуркација и хаоса. У различитим регионима параметарског простора, периодични и хаотични сигнали обезбјеђују нове музичке сигнале. Ово су само неки од мноштва радова који се баве проблемом контроле хаотичних сигнала и који се могу наћи у IEEE Trans. Circuits and Systems I и II.

6. БУДУЋИ ПРОБЛЕМИ

Хаотични проблеми су још далеко од тога да буду ријешени. Потребно је подробније размотрити примјере виших димензија: за векторска поља димензије веће од три а за дискретна пресликавања димензије веће од два. Различити примјери вишедимензионалних система са хаотичним понашањем могу се наћи у литератури. Међутим, атрактивна природа хаоса у овим примјерима још није добро проучена.

Постоји велико интересовање за проучавање вишедимензионалних упарених хаотичних система, нарочито низа хаотичних осцилатора. Ове врсте система су важне као модели биолошких и физичких система и, такође, са тачке процесирања, сигнала нудећи многе инжењерске апликације.

Акценат је стављен на истраживања у области примјене хаотичних система. Очекује се, према томе, унапређивање рјешења за примјену у комуникацијама и уопште у процесирању сигнала. Постоје и сваког дана се отварају нова поља апликација које се остварују захваљујући развоју разних аспеката контроле хаоса. Контрола хаоса може наћи примјену у неуралном процесирању сигнала, биологији, медицини, а можда, чак, и на глобалну климу и вријеме.

У свим областима науке истраживачи се сусрећу са хаотичним феноменима. На примјер, један од основних задатака еколога, или биолога, је да открију и објасне основне законе динамика врста у функцији различитих параметара. До скоро је већина еколога сматрала да би препуштене саме себи , врсте достизале одређене константне (равнотежне) нивое популације, а да су нерегуларне флуктуације, које се често опажају, резултат непредвидљивих, случајних утицаја различитих еколошких фактора. Такво вјеровање је заблуда из „прехаотичне ере”. Чињеница је да једначине динамике популације, на примјер једначине „ловца и дивљачи”, које је извео Volterra, показују знатно богатије понашање него што су то биолози раније претпостављали, и да је хаотично понашање саставни, чак, есенцијални дио тих модела. У многим научним областима људи још увијек игноришу хаотична кретања. Но, у скорој будућности, очекује се да ће доћи до прихватања и разумијевања хаотичних кретања као реалности у медицини, хемији, биологији итд.

Поред истраживања у примјени хаотичних система, истраживања се морају интензивирати у области научно-теоријског аспекта хаоса, односно, мора се радити на налажењу строгог научно-теоријског метода за потврду или оповргавање постојања хаотичних кретања у неком систему.

ДОДАТАК

Да би илустровали значај и актуелност феномена хаоса и хаотичних система рећићемо да су само у последње двије године у IEEE Trans. Circuits and Systems I и II преко шесдесет радова били посвећени овој теми као и два специјална броја [10], [11]. Радови су груписани у више тематских цјелина:

– Хаос и бифуркације
– Хаос и криптографија
– Нелинеарна кола за хаотичне комуникације
– Модулационе технике засноване на хаосу
– Кохерентне хаотичне комуникације
– Некохерентне хаотичне комуникације
– Оптичке комуникације засноване на хаосу
– Синхронизација хаоса – теорија
– Синхронизација хаоса – примјена
– Контрола хаоса – теорија
– Контрола хаоса – примјена
– Филтрирање хаотичних сигнала

У последње вријеме изашло је и неколико књига које из различитих углова освјетљавају феномен хаоса [27], [28], [29], [30].

ЛИТЕРАТУРА

[1] T. S. Parker, L. O. Chua, „Chaos: A Tutorial for Engineer," *Proceedings of the IEEE, (Special Issue on Chaotic Systems),* vol. 75, no. 8, pp. 982-1008, Dec. 1987.

[2] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, vol. 2, *Texts in Applied Mathematics*. New York: Springer-Verlag, p. 672, 1990.

[3] M. R. Belić, *Deterministički haos*, SFIN, god. III, broj 3, p. 187, 1990.

[4] J. M. T. Thompson, H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, New York: John Wiley and Sons, p. 369, 1986.

[5] M. P. Kenedy, „Three steps to chaos-Part I: Evolution," *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Aplications*. (*Special Issue on Chaos in Nonlinear Circuits)*, vol. 40, no. 10, pp. 640-656, Oct. 1993.

[6] M. P. Kenedy, "Three steps to chaos-Part II: A Chua's circuit primer," *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Aplications. (Special Issue on Chaos in Nonlinear Circuits*), vol. 40, no. 10, pp. 657-674, Oct. 1993.

[7] *Proceedings of the IEEE, (Special Issue on Chaotic Systems),* vol. 75, no. 8, Dec. 1987.

[8] *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Aplications*. (*Special Issue on Chaos in Nonlinear Circuits)*, vol. 40, no. 10, Oct. 1993.

[9] *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Aplications*. (*Special Issue on Chaos Synchronization and Control: Theory and Application)*, vol. 44, no. 10, Oct. 1997.

[10] *IEEE Trans. Circuits Syst. -I: Fundamental Theory and Aplications*. (*Special Issue on Noncoherent Chaotic Communications)*, vol. 47, no. 12, Dec. 2000.

[11] *IEEE Trans. Circuits Syst. -I: Fundamental Theory and Aplications*. (*Special Issue on Applications of Chaos Communication Systems)*, vol. 48, no. 12, Dec. 2001.

[12] M. J. Ogorzalek, "Taming Chaos-Part I: Synhronization," *IEEE Trans. Circuits Syst.–I: Fundamental Theory and Aplications*, vol. 40, no. 10, pp. 693-699, Oct. 1993.

[13] K. Cuomo, A. V. Oppenheim, S. H. Strogatz, „Synhronization of Lorenz-Based Chaotic Circuits with Applications to Communications", *IEEE Trans. Circuits Syst.-II Analog and Digital Signal Processing,* vol. 40, no. 10, pp. 626-632, Oct. 1993.

[14] T. Kapitaniak, L. O. Chua, Q. Zhong, "Experimental Hyperchaos in Coupled Chua's Circuits", *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Aplications*, vol. 41, no. 7, pp. 499-503, July. 1994.

[15] N. Corron, D. Hahs, "A New Approach to Communications Using Chaotic Signals", *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Aplications*, vol. 44, no. 5, pp. 373-382, May. 1997.

[16] H. Dedieu, M. P. Kenedy, M. Hasler, "Chaos Shift Keying: Modulation and Demodulation of a Chaotic Carrier Using Self-Synchronizing Chua's Circuits," *IEEE Trans. Circuits Syst.-II: Analog and Digital Signal Procesing*, vol. 40, no. 10, pp. 634-642, oct.1993.

[17] T. L. Carroll, L. M. Pecora, "Synchronizing Chaotic Circuits", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 38, no. 4, pp. 453-456, April. 1991.

[18] A. Oksasoglu, T. Akgul, "A Linear Inverse System Approacs in the Context of Chaotic Communications", *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Aplications*, vol. 44, no. 1, pp. 75-78, January. 1997.

[19] D. Frey, "Chaotic Digital Encoding: An Approach to Secure Communication", *IEEE Trans. Circuits Syst.-II: Analog and Digital Signal Procesing*, vol. 40, no. 10, pp. 660-666, oct.1993.

[20] H. Leung, J. Lam, "Desing of Demodulation for the Chaotic Modulation Communication System", *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Aplications*, vol. 44, no. 3, pp. 262-267, March. 1997.
[21] A. L. Fradkov, A. Yu. Markov, "Adaptive Synchronization of Chaotic Systems Based on Speed Gradient Method and Passification", *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Aplications(Special Issue on Chaos Synchronization and Control)*, vol. 44, no. 10, pp. 905-912, October. 1997.
[22] A. Volkovskii, "Synhronization of Chaotic Systems Using Phase Control", *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Aplications(Special Issue on Chaos Synchronization and Control)*, vol. 44, no. 10, pp. 913-917, October. 1997.
[23] G. Kolumban, M. P. Kennedy, L. O. Chua,"The Role of Synchronization in Digital Communications Using Chaos- Part I", *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Aplications(Special Issue on Chaos Synchronization and Control)*, vol. 44, no. 10, pp. 927-936, October. 1997.
[24] M. J. Ogorzalek, "Taming Chaos-Part II: Control," *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Aplications*, vol. 40, no. 10, pp. 700-706, Oct. 1993
[25] G. Grebogi, Y. C. Lai, "Controlling Chaos in High Dimensions", *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Aplications(Special Issue on Chaos Synchronization and Control)*, vol. 44, no. 10, pp. 971-975, October. 1997.
[26] T. Yang, L. O. Chua, "Impulsive Stabilization for Control and Synchronization of Chaotic Systems: Theory and Application to Secure Communication", *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Aplications(Special Issue on Chaos Synchronization and Control)*, vol. 44, no. 10, pp. 976-989, October 1997.
[27] S. Banerjee, G. C. Verghese, *Nonlinear Phenomena in Power Electronics,* Wiley – IEEE Press, 2001.
[28] M. P. Kennedy, R. Rovatti, G. Setti, *Chaotic Electronics in Telecommunications,* CRC Press, 2001.
[29] P. Cvitanović, *Clasical and Quantum Chaos,* webbook.
[30] G. Chen, X. Dong, *From Chaos to Order,* World Scientific Series on Nonlinear Science, 1998.

Vesna RUBEZIC, Radoje OSTOJIC

THEORY OF CHAOS

Summary

Chaos – state of disorder – through which deterministical systems, under certain conditions have to go through or remain in it, is one of new, important and interesting subjects of science. In this survey paper we give the basic notions of chaos theory, and describe the chaotical behavior of Chua's oscillator which is a paradigm for investigating chaos. Also, we give a survey of possible applications and point out further problems in theory and practice.