

Milojica Jaćimović, I. Krnić***

O EGZISTENCIJI RJEŠENJA ZADATAKA KVADRATNOG PROGRAMIRANJA SA NORMALNO RJEŠIVIM OPERATOROM

I z v o d

U radu razmatramo zadatak minimizacije kvadratnog funkcionala na skupu definisanom linearnim i kvadratnim ograničenjima. Dobijeni su neophodni uslovi egzistencije rješenja ovog zadatka. U slučaju kada je kvadratni funkcional koji se minimizira, definisan pomoću normalno rješivog operatora, izvedeni su i dovoljni uslovi egzistencije rješenja.

Ključne riječi: kvadratno programiranje, normalno rješivi operator

*Prof. dr Milojica Jaćimović, Department of Mathematics, University of Montenegro, 81000 Podgorica, Montenegro, Yugoslavia

**Prof. dr Izedin Krnić, Department of Mathematics, University of Montenegro, 81000 Podgorica, Montenegro, Yugoslavia

ON EXISTANCE OF SOLUTION OF QUADRATIC PROGRAMMING PROBLEM WITH NORMAL SOLVABLE OPERATOR

A b s t r a c t

In this paper we consider the problem of minimization of quadratic function on the set defined by linear and quadratic constants. We obtain necessary conditions of the existence of the solution of this problem. In case when the quadratic function of minimization is defined by normal solvable operator, we also desire the sufficient conditions of the existence of solution.

Key words: quadratic programming, normal solvable operator

Mathematics Subject Classification (2000): 90C20, 49J27

1. Neka su H i F Hilbertovi prostori, $A : H \rightarrow F$ linearni ograničeni operator i $f \in F$ fiksirani element. U ovom radu razmatra se problem egzistencije rješenja ekstremalnog zadatka

$$J(u) = \|Au - f\|_F^2 \rightarrow \inf, u \in U \subseteq H, \quad (1)$$

gdje je U presjek elipsoida i poluprostora

$$U = U_1 \cap U_2, U_1 = \{u \in H \mid \|Bu\|_G \leq r\}, U_2 = \{u \in H \mid Cu = \langle c, u \rangle \leq \beta\}. \quad (2)$$

Ovdje je G Hilbertov prostor, $B : H \rightarrow G$ linearni ograničeni operator, $Cu = \langle c, u \rangle$, $c \in H$, $r > 0$ i β zadati realni brojevi. Problem egzistencije rješenja zadatka (1), za neke skupove ograničenja $U \subseteq H$, razmatran je u [1] i [2]. U radu [1] razmatrani su neophodni i dovoljni uslovi, za slučaj kada je skup U poluprostor i dovoljni uslovi za elipsoid. U radu [2], za ovaj problem dati su neophodni uslovi za slučaj kada je skup U poliedar. U teoremama 1 i 2. ovog rada, razmatraju se neophodni uslovi egzistencije rješenja zadatka (1) - (2). Na osnovu tih teorema konstruisan je primjer sa normalno rješivim operatorom A , u kome zadatak (1) - (2) nema rješenje za svako $f \in F$. U teoremama 3 i 4. razmatraju se dovoljni uslovi egzistencije rješenja u slučaju kada je

normalno rješiv A operator. Napomenimo da operator $A : H \rightarrow F$ nazivamo normalno rješivim, ako je

$$R(A) = \overline{R(A)}. \quad (3)$$

Uslov (3) je ekvivalentan uslovu $R(A^*) = \overline{R(A^*)}$ ([3] str. 153).

2. Uvedimo sljedeće oznake: $\mathcal{L}(M)$ -linearni omotač skupa $M \subseteq H$, I -identični operator, $R(A)$ -oblast vrijednosti operatora A , $A(U) = \{Au | u \in U\}$, $\text{Ker} A$ -jezgro operatora A , $A^* : F \rightarrow H$ konjugovani operator operatora A , $\overline{M}$ -zatvaranje skupa $M \subseteq H$, $L^\perp$ -ortogonalni komplement potprostora L , P -operator ortogonalnog projektovanja prostora H na zatvoreni potprostor $\overline{R(A^*)}$, Q -operator ortogonalnog projektovanja prostora H na $\overline{R(B^*)}$, P_r -operator projektovanja prostora F na zatvoren i konveksan skup $A(U)$, A_B -restrikcija operatora A na potprostor $\text{Ker} B$, A_1 -restrikcija operatora A na potprostor $\text{Ker} B \cap \text{Ker} C$, $J_* = \{J(u) | u \in U\}$, $U_* = \{u \in U | J(u) = J_*\}$ i $\Gamma = \{u \in H | \|Bu\| = r\}$ -granica elipsoida.

Ako je $D : H \rightarrow F$ linearni ograničeni operator, tada se prostori H i F mogu predstaviti u obliku ortogonalnih suma

$$H = \overline{R(D^*)} \oplus \text{Ker} D, F = \overline{R(D)} \oplus \text{Ker} D^*. \quad (4)$$

U Hilbertovom prostoru H , za zatvorene potprostore L i M važi

$$(L \cap M)^\perp = \overline{L^\perp + M^\perp} \text{ odnosno } H = \overline{L^\perp + M^\perp} \oplus L \cap M. \quad (5)$$

Lema 1. Operatori A, B i C generišu sljedeća ortogonalna razlaganja

$$H = \overline{R(B^*)} \oplus \mathcal{L}((I - Q)c) \oplus \text{Ker} B \cap \text{Ker} C \quad (6)$$

$$H = \overline{R(B^*)} \oplus \mathcal{L}((I - Q)c) \oplus \overline{R(A_1^*)} \oplus \text{Ker} A \cap \text{Ker} B \cap \text{Ker} C \quad (7)$$

$$H = \overline{R(A^*)} \cap (\overline{R(B^*B)} + \mathcal{L}(c)) \oplus \overline{\text{Ker} A + \text{Ker} B \cap \text{Ker} C} \quad (8)$$

$$\text{Ker} B = \mathcal{L}((I - Q)c) \oplus \text{Ker} B \cap \text{Ker} C. \quad (9)$$

Dokaz: Iz (4) i (5) dobijamo

$$\begin{aligned} H &= (\overline{KerB})^\perp + (\overline{KerC})^\perp \oplus KerB \cap KerC = \\ &= (\overline{R(B^*)} + \mathcal{L}(c)) \oplus KerB \cap KerC = \\ &= (\overline{R(B^*)} \oplus \mathcal{L}((I - Q)c)) \oplus KerB \cap KerC \end{aligned}$$

čime je dokazana jednakost (6). S druge strane imamo $H = \overline{R(B^*)} \oplus KerB$, tako da iz (6) slijedi (9). Primjenom relacije (4) na operator $A_1 : KerB \cap KerC \rightarrow F$ dobijamo $KerB \cap KerC = \overline{R(A_1^*)} \oplus KerA \cap KerB \cap KerC$.

Na osnovu ove jednakosti i (6) dobija se (7). Slično se dokazuje jednakost (8). ■

Lema 2. ([3], str. 153). Ograničeni operator $A : H \rightarrow F$ je normalno rješiv, ako i samo ako je

$$m_A = \inf \{ \|Au\| \mid u \perp KerA, \|u\| = 1 \} > 0$$

i pri tome je

$$(\forall x \in R(A^*)) m_A \|x\| \leq \|Ax\|. \quad (10)$$

Lema 3. ([1]) Neka je $V \subseteq H$ zatvoren skup i $A : H \rightarrow F$ normalno rješivi operator. Ako je $KerA + V$ zatvoren skup tada je i $A(V)$ zatvoren skup.

Lema 4. Sljedeća tvrdjenja su ekvivalentna

- i) $A(KerB) = \overline{A(KerB)}$
- ii) $A(KerB \cap KerC) = \overline{A(KerB \cap KerC)}$.

Dokaz: Ako je ispunjen uslov ii), tada na osnovu (9) slijedi i). Sada pretpostavimo da važi i). U tom slučaju operator A_B je normalno rješiv i pri tome iz (9) imamo da je

$$KerA_B + KerB \cap KerC = KerB \cap KerC,$$

ako je

$$KerA_B \subseteq KerB \cap KerC,$$

ili

$$KerA_B + KerB \cap KerC = KerB$$

ako je

$$(KerB \cap KerC) \setminus KerA_B \neq \emptyset.$$

U oba slučaja, na osnovu Leme 3. slijedi ii). ■

3. U sljedeće dvije teoreme razmatramo neophodne uslove egzistencije rješenja zadatka (1) - (2). Na osnovu tih teorema konstruiše se primjer zadatka (1) - (2), sa normalno rješivim operatorima A i B , za koje taj zadatak nema rješenje za svako $f \in F$.

Očigledno da za fiksirano $f \in F$ i proizvoljan zatvoren i konveksan skup U , zadatak (1) ima rješenje ako i samo ako je $P_r(f) \in A(U)$. Ako se uzme u obzir da je $P_r(F)\overline{A(U)}$, slijedi da zadatak (1) ima rješenje za svako $f \in F$, ako i samo ako je $A(U)$ zatvoren skup.

Teorema 1. Ako zadatak (1) - (2) ima rješenje za svako $f \in F$, tada je ispunjen bar jedan od sljedećih uslova:

- i) $\overline{R(A^*)} \cap B^*B(\Gamma \cap U) = \emptyset$
- ii) $\overline{KerA + KerB \cap KerC} = \overline{KerA + KerB} \cap \overline{KerC}$
- iii) $\overline{KerA + KerB} = \overline{KerA} + \overline{KerB}$.

Dokaz: Na osnovu (6), skup U možemo predstaviti u obliku

$$U = V \oplus KerB \cap KerC \quad (11)$$

gdje je

$$V = \{x + \alpha(I - Q)c \mid x \in \overline{R(B^*)}, \alpha \in R, \|Bx\| \leq r, \langle x + \alpha(I - Q)c, c \rangle \leq \beta\}.$$

Kako zadatak (1) - (2) ima rješenje za svako $f \in F$, slijedi da je $A(U)$ zatvoren skup. Operator A je neprekidan pa je i skup $A^{-1}(A(U))$ zatvoren:

$$\overline{A^{-1}(A(U))} = A^{-1}(A(U)) = V + KerA + KerB \cap KerC. \quad (12)$$

Ako je $\overline{R(A^*)} \cap B^*B(\Gamma \cap U) = \emptyset$, tada je ispunjen uslov i) i teorema je dokazana. Sada pretpostavimo da je $\overline{R(A^*)} \cap B^*B(\Gamma \cap U) \neq \emptyset$. U tom slučaju, na osnovu (11) postoje elementi

$$x_0 \in \overline{R(B^*)}, \alpha_0 \in R, v_0 \in KerB \cap KerC,$$

takvi da je

$$u_0 = x_0 + \alpha_0(I - Q)c + v_0 \in U, Bu_0 = Bx_0,$$

$$\|Bx_0\| = r, B^*Bu_0 = B^*Bx_0 \in \overline{R(A^*)} \cap B^*B(\Gamma \cap U). \quad (13)$$

Uzmimo proizvoljnu tačku

$$z \in \overline{KerA + KerB \cap KerC}.$$

Tada je $x_0 + \alpha_0(I - Q)c + z$, tačka nagomilavanja zatvorenog skupa $A_{-1}(A(U))$. Na osnovu (12) slijedi da postoje elementi

$$p_z \in \overline{R(B^*)}, \alpha_z \in R \text{ i } q_z \in KerA + KerB \cap KerC$$

takvi da je

$$x_0 + \alpha_0(I - Q)c + z = p_z + \alpha_z(I - Q)c + q_z. \quad (14)$$

Ako jednakost (14) pomnožimo skalarno sa B^*Bx_0 , imajući u vidu (13) i činjenicu da je na osnovu razlaganja (8):

$$B^*Bx_0 \in \overline{R(A^*)} \cap R(B^*B) \perp \overline{KerA + KerB \cap KerC}$$

dobijamo

$$r^2 = \|Bx_0\|^2 = \langle Bx_0, Bp_z \rangle.$$

Oдавде je

$$\|B(x_0 - p_z)\|^2 = \|Bx_0\|^2 - 2\langle Bx_0, Bp_z \rangle + \|Bp_z\|^2 \leq r^2 - 2r^2 + r^2 = 0$$

što znači da je $Bx_0 = Bp_z$. Operator B je injektivan na $\overline{R(B^*)}$, pa je $x_0 = p_z$. Sada se jednakost (14) može zapisati u obliku

$$z = (\alpha_z - \alpha_0)(I - Q)c + q_z. \quad (15)$$

Kako je z proizvoljno odabrani element, imamo da je

$$\overline{KerA + KerB \cap KerC} \subseteq \mathcal{L}((I - Q)c) + KerA + KerB \cap KerC. \quad (16)$$

U vezi sa relacijom (15), analizirajmo dva moguća slučaja:

$$(\forall z \in \overline{KerA + KerB \cap KerC}) \alpha_z = \alpha_0 \vee (I - Q)c = 0 \quad (17)$$

$$(\exists z \in \overline{KerA + KerB \cap KerC}) \alpha_z \neq \alpha_0 \wedge (I - Q)c \neq 0. \quad (18)$$

Ako je zadovoljen uslov (17), tada iz (15) dobijamo

$$z = q_z \in KerA + KerB \cap KerC$$

pa je

$$KerA + KerB \cap KerC = \overline{KerA + KerB \cap KerC}.$$

Prema tome u slučaju (17) zadovoljen je uslov ii).

Sada pretpostavimo da je zadovoljen uslov (18). Za takvo z , na osnovu (15) dobijamo

$$(I - Q)c = \frac{1}{\alpha_z - \alpha_0}(z - q_z) \in \overline{KerA + KerB \cap KerC}.$$

Oдавде slijedi da je

$$\mathcal{L}((I - Q)c) + KerA + KerB \cap KerC \subseteq \overline{KerA + KerB \cap KerC}.$$

Tada na osnovu (16) dobijamo

$$KerA + (\mathcal{L}((I - Q)c) + KerB \cap KerC) = \overline{KerA + KerB \cap KerC}.$$

Iz ove relacije i jednakosti (9) nalazimo da je

$$KerA + KerB = \overline{KerA + KerB \cap KerC}$$

tj. $KerA + KerB$ je zatvoreni potprostor. Prema tome u slučaju (18) ispunjen je uslov iii). ■

U prethodnoj teoremi figuriše uslov $\overline{R(A^*)} \cap B^*B(\Gamma \cap U) = \emptyset$. Taj uslov se može izbjeći, ako se pretpostavi da je $(I - Q)c \neq 0$.

Teorema 2. Neka je $(I - Q)c \neq 0$. Ako zadatak (1) - (2) ima rješenje za svako $f \in F$ tada je ispunjen bar jedan od sljedećih uslova

- i) $KerA + KerB \cap KerC = \overline{KerA + KerB \cap KerC}$
- ii) $\overline{KerA + KerB} = \overline{KerA} + \overline{KerB}$
- iii) $\overline{R(A^*)} \cap (R(B^*B) + \mathcal{L}(c)) = \{0\}$
- iv) $c \in \overline{R(A^*)}$.

Dokaz: Prvo razmotrimo slučaj

$$\overline{R(A^*)} \cap R(B^*B) \neq \{0\}. \quad (19)$$

Odavde, primjenom relacije (4) na operator B , zaključujemo da postoji tačka $x_0 \in \overline{R(B^*)}$, takva da je

$$B^* B x_0 \in \overline{R(A^*)} \cap R(B^* B), \| B x_0 \| = r. \quad (20)$$

S obzirom da je $(I - Q)c \neq 0$, može se odrediti broj $\alpha_0 = \frac{\beta - \langle c, x_0 \rangle}{\| (I - Q)c \|^2}$ i element $x_0 + \alpha_0(I - Q)c$, tako da je

$$\| B(x_0 + \alpha_0(I - Q)c) \| = \| B x_0 \| = r, \langle x_0 + \alpha_0(I - Q)c, c \rangle = \beta.$$

Odavde i iz (20) slijedi da element $u_0 = x_0 + \alpha_0(I - Q)c$ zadovoljava uslov $B^* B u_0 = B^* B x_0 \in \overline{R(A^*)} \cap B^* B(\Gamma \cap U)$, pa je $\overline{R(A^*)} \cap B^* B(\Gamma \cap U) \neq \emptyset$. Tada na osnovu prethodne teoreme slijedi da je zadovoljen bar jedan od uslova i) ili ii).

Sada pretpostavimo da je

$$\overline{R(A^*)} \cap R(B^* B) = \{0\}. \quad (21)$$

Označimo sa

$$K = R(A^*) \cap (R(B^* B) + \mathcal{L}(c)) \quad (22)$$

i dokažimo da iz (21) slijedi da je $\dim K \geq 1$. Ako je $\dim K = 0$, tada je ispunjen uslov iii) i teorema je dokazana.

Pretpostavimo da je $\dim K \geq 1$. Tada postoji element $x_0 \in \overline{R(B^*)}$ u broj γ_0 tako da je $B^* B x_0 + \gamma_0 c \in K$. Imajući u vidu (21) i (22) zaključujemo da je $\gamma_0 \neq 0$. Uzmimo proizvoljni element $B^* B v + \beta_0 c \in K$. Tada je

$$\beta_0 B^* B x_0 - \gamma_0 B^* B v = \beta_0 (B^* B x_0 + \gamma_0 c) - \gamma_0 (B^* B v + \beta_0 c) \in K.$$

Odavde i iz (21) slijedi da je $\beta_0 B^* B x_0 = \gamma_0 B^* B v$. Osim toga je

$$\begin{aligned} B^* B v + \beta_0 c &= \frac{1}{\gamma_0} (\gamma_0 B^* B v + \gamma_0 \beta_0 c) = \frac{1}{\gamma_0} (\beta_0 B^* B x_0 + \gamma_0 \beta_0 c) = \\ &= \frac{\beta_0}{\gamma_0} (B^* B x_0 + \gamma_0 c), \end{aligned}$$

čime je dokazano da je $\dim K = 1$ i $K = \mathcal{L}(B^* B x_0 + \gamma_0 c)$. Ako je x_0 , tada je $k = \mathcal{L}(c)$ tako da $c \in \overline{R(A^*)}$. Prema tome u slučaju $x_0 = 0$,

O egzistenciji rješenja kvadratnog programiranja sa normalno rješivim op. 29

zadovoljen je uslov iv). Sada pretpostavimo da je $x_0 \neq 0$. Kako $x_0 \in \overline{R(B^*)}$ to je $Bx_0 \neq 0$. Skup K je potprostor prostora H , pa se može pretpostaviti da element x_0 i broj γ_0 zadovoljavaju uslove

$$\|Bx_0\| = r, \gamma_0 > 0. \quad (23)$$

S obzirom da je $(I - Q)c \neq 0$, može se odrediti element

$$x_0 + \alpha_0(I - Q)c$$

gdje je

$$\alpha_0 = \frac{\beta - \langle c, x_0 \rangle}{\|(I - Q)c\|^2}$$

koji zadovoljava uslove

$$\|B(x_0 + \alpha_0(I - Q)c)\| = \|Bx_0\| = r, \langle x_0 + \alpha_0(I - Q)c, c \rangle = \beta \quad (24)$$

tako da $x_0 + \alpha_0(I - Q)c \in V$. Uzmimo proizvoljnu tačku.

$$z \in \overline{KerA + KerB \cap KerC}. \quad (25)$$

Tada na osnovu (12) slijedi da je $x_0 + \alpha_0(I - Q)c + z$ tačka nagomilavanja zatvorenog skupa $A_{-1}(A(U))$. Prema tome postoje elementi

$$p_z + \gamma_z(I - Q)c \in V, q_z \in KerA + KerB \cap KerC \quad (26)$$

tako da je

$$x_0 + \alpha_0(I - Q)c + z = p_z + \gamma_z(I - Q)c + q_z. \quad (27)$$

Ako jednakost (26), pomnožimo skalarno sa $B^*Bx_0 + \gamma_0c$, vodeći računa o (23) - (25) i činjenici da je na osnovu razlaganja (8):

$$B^*Bx_0 + \gamma_0c \in K \perp \overline{KerA + KerB \cap KerC}$$

dobijamo

$$\begin{aligned} r^2 + \gamma_0\beta &= \|Bx_0\|^2 + \gamma_0\langle c, x_0 + \alpha_0(I - Q)c \rangle = \\ &= \langle Bx_0, Bp_z \rangle + \gamma_0\langle c, p_z + \gamma_z(I - Q)c + q_z \rangle \end{aligned}$$

odnosno

$$r^2 - \langle Bx_0, Bp_z \rangle = \gamma_0[\langle p_z + \gamma_z(I - Q)c + q_z, c \rangle - \beta] \leq 0.$$

Prema tome je $\langle Bx_0, Bp_z \rangle \geq r^2$. Odavde je $\|B(x_0 - p_z)\|^2 \leq r^2 - 2r^2 + r^2 = 0$, tj. $x_0 = p_z$. Sada se jednakost (26) može zapisati u obliku (15). Postupajući kao pri dokazu prethodne teoreme, dolazi se do zaključka, da je zadovoljen bar jedan od uslova i) ili ii). ■

4. Sljedeći primjer pokazuje da za normalno rješive operatore A i B i za proizvoljno $c \in H$, sa svojstvom $(I - Q)c \neq 0$, zadatak (1) - (2) ne mora imati rješenje za svako $f \in F$.

Primjer. Neka je

$$L = \{x \in l_2 | x = (0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, \dots)\}$$

$$M = \left\{x \in l_2 \mid x = \left(0, y_2, 0, y_4, \frac{y_4}{4}, y_5, \frac{y_5}{5}, y_6, \frac{y_6}{6}, \dots\right)\right\}.$$

Uočimo Hilbertov prostor

$$X \subseteq l_2, X = \{x \in l_2 | x = (0, x_2, 0, x_4, x_5, x_6, \dots)\}$$

i primijetimo da je

$$L + M \subseteq X, L + M \neq X. \quad (28)$$

Lako se provjerava da $jex^* = 0$, jedini linearni ograničeni funkcional definisan na X , sa svojstvom

$$(\forall x \in L + M) x^*(x) = 0$$

odakle imamo da je $\overline{L + M} = X$. Odavde i iz (27) dobijamo

$$L + M \neq \overline{L + M}. \quad (29)$$

Neka je $A : l_2 \mapsto l_2$ operator ortogonalnog projektovanja na $M^\perp$ i $B : l_2 \mapsto l_2$ operator ortogonalnog projektovanja na $L^\perp$. Operatori A i B su normalno rješivi pri tome je

$$\text{Ker} A = M, \text{Ker} B = L, R(A) = R(A^*) = M^\perp, R(B^*) = R(B) = L^\perp.$$

Relaciju (28) možemo zapisati u obliku

$$\text{Ker} A + \text{Ker} B \neq \overline{\text{Ker} A + \text{Ker} B}. \quad (30)$$

Oдавде imamo da je:

$$A(Ker B) \neq \overline{A(Ker B)}.$$

Tada iz leme 4, slijedi da za proizvoljno $c \in l_2$, ваži

$$A(Ker B \cap Ker C) \neq \overline{A(Ker B \cap Ker C)},$$

odnosno

$$Ker A + Ker B \cap Ker C \neq \overline{Ker A + Ker B \cap Ker C}.$$

Očigledno da $v = (1, 0, 0, \dots) \in M^\perp \cap L^\perp = R(A^*) \cap R(B^*B)$, tako da je ispunjen uslov (19). U prvom dijelu prethodne teoreme dokazali smo da iz (19) i $(I - Q)c \neq 0$ slijedi da je

$$R(A^*) \cap B^*B(\Gamma \cap U) \neq \emptyset. \quad (31)$$

Sada, na osnovu Teoreme 1 i relacije (29) - (30) zaključujemo za zadatak (1) - (2) nema rješenje za svako $f \in F$.

5. Za niz (u_n) kažemo da je minimizirajući niz zadatka (1), ako ваži

$$u_n \in U, u = 1, 2, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = J_*.$$

Primijetimo da je funkcional J odozdo slabo poluneprekidan jer je konveksan i neprekidan. Sada je lako dokazati, da ako za neko $f \in F$, postoji bar jedan ograničeni minimizirajući niz, onda za takvo $f \in F$, zadatak (1) ima rješenje. Naime, tada postoji podniz (u_{n_k}) i tačka $u_* \in H$ tako da

$$u_{n_k} \xrightarrow{w} u_*, k \mapsto \infty.$$

Kako je skup U slabo zatvoren, slijedi da $u_* \in U$. Zato je

$$J(u_*) \leq \liminf_{k \mapsto \infty} J(u_{n_k}) = J_*.$$

To znači da je $J(u_*) = J_*$ tj. $u_* \in U_*$.

U sljedeće dvije teoreme, navodimo neke uslove koji garantuju egzistenciju rješenja zadatka (1) - (2), za normalno rješivi operator A . Naglasimo da su ti uslovi slični dovoljnim uslovima navedenim u teoremi 2.

Teorema 3. Ako su A i B normalno rješivi operatori i ako je ispunjen bar jedan od sljedećih uslova

- i) $\overline{Ker A + Ker B \cap Ker C} = Ker A + Ker B \cap Ker C$
- ii) $\overline{Ker A + Ker B} = Ker A + Ker B$

tada zadatak (1) - (2) ima rješenje za svako $f \in F$.

Dokaz: Prvo uočimo da svaki od uslova i) ili ii), na osnovu Lema 3 i 4 povlači normalnu rješivost operatora A . Kako je i operator B normalno rješiv, jednakost (7), možemo zapisati u obliku

$$H = R(B^*) \oplus \mathcal{L}((I - Q)c) \oplus R(A_1^*) \oplus Ker A \cap Ker B \cap Ker C. \quad (32)$$

Dokazaćemo da za svako $f \in F$, postoji ograničeni minimizirajući niz. Imajući u vidu (30), elemente proizvoljnog minimizirajućeg niza (u_n) možemo predstaviti u obliku

$$u_n = x_n + \gamma_n((I - Q)c) + a_n^* + a_n$$

gdje je

$$x_n \in R(B^*), \gamma_n \in R, a_n^* \in R(A_1^*), a_n \in Ker A \cap Ker B \cap Ker C.$$

Kako

$$a_n \in Ker A \cap Ker B \cap Ker C,$$

to je i

$$w_n = x_n + \gamma_n(I - Q)c + a_n^*$$

minimizirajući niz zadatka (1) - (2). Iz $\|Bx_n\| = \|Bw_n\| \leq r$, primjenom relacije (10), na operator B , zaključujemo da je niz (x_n) ograničen. Tada iz

$$J(w_n) = \|Aw_n - f\|^2 \rightarrow J_*, n \mapsto \infty$$

i ograničenosti niza (x_n), slijedi ograničenosti niza $(A(\gamma_n(I - Q)c + a_n^*))$. Prema tome postoji konstanta $k > 0$, takva da je

$$\|A(\gamma_n(I - Q)c + a_n^*)\| \leq k, n = 1, 2, \dots; \quad (33)$$

a) Pretpostavimo da je niz (γ_n) ograničen ili da je $(I - Q)c = 0$. Tada iz (32) slijedi ograničenost niza (a_n^*). Kako $a_n^* \in R(A_1^*)$, primjenom relacije (10) na operator A_1 , dobijamo da je niz (a_n^*) ograničen. Prema

tome u slučaju a) niz $w_n = x_n + \gamma_n(I - Q)c + a_n^*$ je ograničeni minimizirajući niz.

b) Sada pretpostavimo da je niz (γ_n) negраниčen i $(I - Q)c \neq 0$. Dokažimo da u tom slučaju, postoje tačke $p_0, z_0 \in H$ tako da je

$$(I - Q)c = p_0 + z_0, \langle z_0, c \rangle \neq 0, p_0 \in R(A_1^*), z_0 \in \text{Ker} A \cap \text{Ker} B. \quad (34)$$

Primjenom relacija (4) na prostore $\text{Ker} B \cap \text{Ker} C$ i F i operator $A_1 : \text{Ker} B \cap \text{Ker} C \rightarrow F$ dobijamo ortogonalna razlaganja

$$\text{Ker} B \cap \text{Ker} C = R(A_1^*) \oplus \text{Ker} A \cap \text{Ker} B \cap \text{Ker} C$$

$$F = R(A_1) \oplus \text{Ker} A_1^*.$$

Tada za element $A(I - Q)c \in F$, postoje elementi

$$p_0 \in R(A_1^*) \text{ i } q_0 \in \text{Ker} A_1^*$$

takvi da je

$$A(I - Q)c = Ap_0 + q_0. \quad (35)$$

Kako $A(\gamma_n p_0 + a_n^*) \in R(A_1^*) \perp q_0$, na osnovu (34) imamo da je

$$\begin{aligned} \|A(\gamma_n(I - Q)c + a_n^*)\|^2 &= \|A(\gamma_n p_0 + a_n^*) + \gamma_n q_0\|^2 = \\ &= \|A(\gamma_n p_0 + a_n^*)\|^2 + \gamma_n^2 \|q_0\|^2. \end{aligned}$$

Imajući u vidu da je (γ_n) neograničen niz, iz relacije (32) slijedi da je $q_0 = 0$. Sada se jednakost (34) može zapisati u obliku $A((I - Q)c - p_0) = 0$, što povlači da postoji element $z_0 \in \text{Ker} A$, takav da je

$$(I - Q)c = p_0 + z_0. \quad (36)$$

S obzirom da $p_0 \in R(A_1^*) \subseteq \text{Ker} B \cap \text{Ker} C$ i $(I - Q)c \in \text{Ker} B$, iz (35) dobijamo

$$0 = B(I - Q)c = B(p_0 + z_0) = Bz_0$$

što znači da $z_0 \in \text{Ker} A \cap \text{Ker} B$. Ako jednakost (35) skalarno pomnožimo sa c , nalazimo da je

$$\langle c, z_0 \rangle = \|(I - Q)c\|^2 \neq 0$$

čime je relacija (33) dokazana. Sada na osnovu (35) dobijamo

$$A(\gamma_n(I - Q)c + a_n^*) = A(\gamma_np_0 + a_n^*).$$

Kako $\gamma_np_0 + a_n^* \in R(A_1^*)$, to primjenom relacije (10), na operator A_1 , vodeći računa o (32), dobijamo ograničenost niza $(\gamma_np_0 + a_n^*)$. Uočimo ograničen niz

$$v_n = x_n + \gamma_np_0 + a_n^* + \gamma_n^*z_0$$

gdje je

$$\gamma_n^* = \frac{\beta - \langle x_n + \gamma_np_0 + a_n^*, c \rangle}{\langle c, z_0 \rangle}.$$

Očigledno je

$$Av_n = Aw_n, \quad Bv_n = Bw_n, \quad \langle c, v_n \rangle = \beta,$$

tako da je (v_n) ograničeni minimizirajući niz. ■

Teorema 4. Neka je A normalno rješivi operator. Ako je zadovoljen bar jedan od sljedećih uslova

- i) $\text{Int}U \neq \emptyset \wedge R(A^*) \cap (R(B^*B) + \mathcal{L}(c)) = \{0\}$
- ii) $R(A^*) \cap R(B^*B) = \{0\} \wedge c \in R(A^*)$

tada zadatak (1) - (2) ima rješenje za svako $f \in F$.

Dokaz: Neka je ispunjen uslov i). Tada na osnovu razlaganja (8) imamo da je

$$H = \overline{\text{Ker}A + \text{Ker}B \cap \text{Ker}C}.$$

Kako je $\text{Int}U \neq \emptyset$ odavde i iz jednakosti (11) dobijamo

$$H = U + \text{Ker}A + \text{Ker}B \cap \text{Ker}C = U + \text{Ker}A.$$

S obzirom da je operator A normalno rješiv, na osnovu Leme 3, slijedi da je $A(U)$ zatvoren skup.

Sada pretpostavimo da je ispunjen uslov ii):

$$R(A^*) \cap R(B^*B) = \{0\} \tag{37}$$

$$c \in R(A^*) \perp \text{Ker}A. \tag{38}$$

Neka je y_* tačka nagomilavanja skupa $A(U) \subseteq R(A)$. Tada postoji tačka $x_* = Px_* + (I - P)x_* \in H$ takva da je $y_* = Ax_* = APx_*$. Osim toga, postoji niz (u_n) , $u_n = Pu_n + (I - P)u_n$, tako da

$$Au_n = APu_n \rightarrow y_* = APx_*, n \mapsto \infty.$$

Odavde, primjenom relacije (10), dobijamo

$$m_A \| Pu_n - Pu_* \| \leq \| Au_n - Ax_* \| \rightarrow 0, n \mapsto \infty.$$

Prema tome

$$Pu_n \mapsto Pu_*, n \mapsto \infty.$$

Uočimo niz

$$v_n = Px_* + (I - P)u_n, n = 1, 2, \dots$$

i primijetimo da

$$u_n - v_n = Pu_n - Pu_* \rightarrow 0, n \mapsto \infty. \quad (39)$$

Osim toga, na osnovu (37) imamo

$$\langle c, v_n \rangle = \langle c, Px_* \rangle = \lim_{n \mapsto \infty} \langle c, Pu_n \rangle = \lim_{n \mapsto \infty} \langle c, u_n \rangle \leq \beta. \quad (40)$$

Ako postoji $n \in N$, tako da je $\| Bv_n \| \leq r$, tada za takvo n imamo da $v_n \in U$, $y_* = APx_* = Av_n \in A(U)$ i teorema je u tom slučaju dokazana.

U suprotnom je

$$r < \| Bv_n \| = \| B(v_n - u_n) + u_n \| \leq \| Bu_n \| + \| B(v_n - u_n) \| \leq r + \| B(v_n - u_n) \|.$$

Tada na osnovu (38) imamo da je

$$\lim_{n \mapsto \infty} \| Bv_n \| = r. \quad (41)$$

Niz (B^*Bv_n) , kao ograničen niz, ima podniz koji slabo konvergira ka nekoj tački $z_0 \in \overline{R(B^*)}$. Možemo smatrati da

$$B^*Bv_n \xrightarrow{w} z_0 \in \overline{R(B^*)}, n \mapsto \infty. \quad (42)$$

a) Prvo razmotrimo slučaj $z_0 = 0$ tj.:

$$B^* B v_n \xrightarrow{w} 0, n \mapsto \infty. \quad (43)$$

Ako jednakost

$$B^* B v_n = P B^* B v_n + (I - P) B^* B v_n$$

skalarno pomnožimo sa v_n dobijamo

$$\| B v_n \|^2 = \langle B^* B v_n, P x_* \rangle + \langle B v_n, B(I - P) v_n \rangle.$$

Na osnovu (40) i (42) odavde slijedi da je

$$\lim_{n \mapsto \infty} \langle B v_n, B(I - P) v_n \rangle = r^2. \quad (44)$$

Razmotrimo kvadratnu jednačinu po α :

$$\| B(v_n + \alpha(I - P)v_n) \|^2 = r^2. \quad (45)$$

Tada iz (40) i (43) slijedi da za diskriminantu D_n ove jednačine važi:

$$\frac{1}{4} D_n^2 = \langle B v_n, B(I - P) v_n \rangle^2 - \| B(I - P) v_n \|^2 (\| B v_n \|^2 - R^2) \mapsto r^4, n \mapsto \infty.$$

Prema tome, za dovoljno veliko n jednačina (44) ima rješenje α_n . Sada (37) i (39) povlači:

$$\langle c, v_n + \alpha_n(I - P)v_n \rangle = \langle c, v_n \rangle \leq \beta$$

tj. $v_n + \alpha_n(I - P)v_n \in U$. Osim toga je $y_* = A v_n = A(v_n + \alpha_n(I - P)v_n) \in A(U)$, pa je teorema u ovom slučaju dokazana.

b) Ovdje pretpostavljamo da u (41) važi

$$B^* B v_n \xrightarrow{w} z_0 \neq 0, n \mapsto \infty. \quad (46)$$

Iz (36) imamo da $z_0 \notin R(A^*)$, tako da postoji element $x_0 \in H$, sa svojstvom

$$\langle z_0, (I - P)x_0 \rangle \neq 0. \quad (47)$$

Posmatrajmo kvadratnu jednačinu

$$\| B(v_n + \alpha(I - P)x_0) \|^2 = r^2.$$

Za disuriminantu ove jednačine, na osnovu (45) i (46) važi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}D_n^2 &= \langle B^*Bv_n, (I-P)x_0 \rangle^2 - \|B(I-P)x_0\|^2 (\|Bv_n\|^2 - r^2) \rightarrow \\ &\rightarrow \langle z_0, (I-P)x_0 \rangle^2 > 0, n \mapsto \infty. \end{aligned}$$

Prema tome, za dovoljno veliko n , navedena kvadratna jednačina ima rješenje α_n . Tada za elemente

$$w_n = v_n + \alpha_n(I-P)x_0$$

sa dovoljno velikim indeksom n važi $\|Bw_n\| = r, \langle c, w_n \rangle = \beta$ tj. $w_n \in U$. Osim toga je $y_* = Aw_n \in A(U)$, čime je teorema dokazana. ■

Literatura

- [1] И. Крнич, М.М.Потапов, Об условиях корректности задач минимизации квадратичного функционала на эллипсоиде и полупространстве, *Mathematica Montisnigri* 4 (1995), 27-41.
- [2] М.Јаћимовић, И. Крнич, М.М.Потапов, On well-posedness of quadratic minimization problem on ellipsoid and polyhedron, *PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE, Nouvelle serie* 62 (76), 105-112.
- [3] Вайнико Г.М., Веретников А. Ю., Итерационные процедуры в некорректных задачах, Наука, Москва, 1986.

