ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 10, 1994.
ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 10, 1994.
THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS
GLASNIK OF THE SECTION OF NATURAL SCIENCES, 10, 1994.

UDK 531.36

*Ranislav Bulatović**

NESTABILNOST RAVNOTEŽE U ANALITIČKOM POTENCIJALNOM POLJU

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ В АНАЛИТИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

Izvod

U ovom radu se daju dovoljni uslovi nestabilnosti ravnoteže holonomnih mehaničkih sistema u slučajevima kada je prva netrivijalna forma potencijalne energije nenegativna. Pokazuje se da se dobijeni rezultati mogu proširiti na Čapliginove neholonomne sisteme.

Аннотация

В данной статье получены достаточные условия неустойчивости равновесия голономных механических систем в случаях, когда первая нетривиальная форма потенциальной энергии неотрицательна. Показано, что эти результаты распространяются на неголономные системы Чаплыгина.

1. Razmatra se mehanički sistem sa n stepeni slobode, opisan Lagrangeovom funkcijom

$$L(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) - \Pi(x), \quad x \in R^n$$

gdje je $2T = \langle K(x)\dot{x}, \dot{x} \rangle$ dvostruka kinetička energija sistema (K — simetrična pozitivno definitna matrica, $\langle\ ,\ \rangle$ — skalarni proizvod u R^n), a $\Pi(x)$ — potencijalna energija sistema. Pretpostavlja se da su funkcija Π i koeficijenti matrice K analitičke funk-

* Prof. dr Ranislav Bulatović, Mašinski fakultet, Podgorica

cije koordinata x. Kretanje sistema se opisuje Lagrangevim jednačinama

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \tag{1.1}$$

Ravnotežni položaji sistema poklapaju se sa kritičnim tačkama potencijalne energije.

Krajem prošlog vijeka formulisana je hipoteza (Ljapunov (1897)): ako u *ravnotežnom položaju potencijalna energija nema lokalni minimum, ravnoteža je nestabilna.*

Uprkos nastojanjima mnogih autora, ova hipoteza nije u potpunosti potvrđena (v. prikaze: **Hagedron** (1971), **Karapetjan** et al. (1983), Peiffer (1989)). Napomenimo da za neanalitičke sisteme, kako pokazuje poznati primjer (Painlevé (1904)), hipoteza nestabilnosti ne važi. U ovom radu daju se dva kriterijuma nestabilnosti koji dopunjuju poznate rezultate.

2. Ne umanjuujći opštost, može se smatrati da je $x = 0$ ravnotežni položaj i da je $\Pi(0) = 0$. MacLaurinov red potencijalne energije je

$$\Pi(x) = \Pi_k(x) + \Pi_j(x) + \ldots, \ j > k \geq 2 \tag{2.1}$$

gdje su $\Pi_i(x)$ — homogene forme stepena i. Obično je $k = 2$. Kada prva netrivijalna forma $\Pi_k(x)$ može uzimati negativne vrijednosti, ravnotežni položaj je nestabilan (Kozlov (1982), Kozlov et al. (1982)). Primijetimo da se ovaj rezultat poklapa s analitičkim slučajem kasnije dobijenog rezultata (Sosnickij (1985)), a za $k = 2$ predstavlja klasnčni rezultat (Ljapunov (1897)). Ako je $\Pi_k(x)$ pozitivno definitna forma, tada funkcija $\Pi(x)$ u tački $x = 0$ ima strogi minimum i prema Lagrange-Dirichlet-ovoj teoremi, ravnotežni položaj je stabilan. Dakle, ostaje otvoreno pitanje: Šta je u slučaju kada je prva netrivijalna forma potencijalne energije pozitivno semidefinitna. Djelimičan odgovor daje sljedeća teorema.

Teorema 1. Neka je

$$\Pi(x) = \sum_{k}^{l-1} \Pi_i(x) + \Pi_l(x) + \ldots, \ \sum_{k}^{l-1} \Pi_i(x) \geq 0.$$

Ako su ispunjeni uslovi:

(a) $\sum_{k}^{l-1} (l - i)\, \Pi_i(x) \geq 0;$

(b) postoji jedinični vektor $e \in R^n$ tako da je $\Pi_l(e) < 0$ i

$$\sum_{k}^{l-1} \Pi_i(ue) = 0 \text{ za svako } u \in R;$$

ravnotežni položaj $x = 0$ je nestabilan.

Kako je za $\Pi_i(x) \geq 0$ ($i = k, \ldots, l-1$) automatski ispunjen uslov (a), to teorema 1, za $k > 2$, uopštava nedavni rezultat (P e i f f e r (1989)).

Praktično najinteresantniji slučaj je kada je $k = 2$, tj. $\Pi_2(x) \geq \geq 0$. Tada, kao što je poznato iz linearne algebre, skup tačaka $\pi = \{x \in R^n : \Pi_2(x) = 0\}$ je m — dimenzionalna ravan koja prolazi kroz koordinatni početak. Govoreći jezikom teorije oscilacija, m sopstvenih frekvencija sistema je jednako nuli. Kada je $m = 1$, hipoteza nestabilnosti je dokazana bez dodatnih uslova (K o i t e r (1965). Za $m > 2$, nestabilnost je dokazana uz izvjesne dodatne uslove koje jednostavno možemo formulisati ako sa $\hat{F}$ označimo suženje neke funkcije F na π. Prvo je za $m = 2$ i $\hat{\Pi}_3 \not\equiv 0$, dokazana nestabilnost (L a l o y (1979)), a zatim za proizvoljno m uz uslov da u tački $x = 0$ forma $\hat{\Pi}_j : \pi \to R$ nema lokalni minimum (K o z l o v (1986)).

Teorema 2. Neka je potencijalna energija oblika (2.1) i $\Pi_2(x) \geq 0$. Ako je $\hat{\Pi}_j \equiv \ldots \equiv \hat{\Pi}_{r-1} \equiv 0$, $r \geq j + 1$, a u tački $x = 0$, funkcija $\hat{\Pi}_r : \pi \to R$ nema lokalni minimum, ravnotežni položaj $x = 0$ je nestabilan.

Kada je $\Pi_i(x) \not\equiv 0$, teorema 2 se,očigledno, svodi na poznati rezultat (K o z l o v (1986)). Za razliku od pomenutog rezultata, ova teorema, specijalno, rješava pitanje nestabilnosti u sljedećim karakterističnim slučajevima:

— u tački $x = 0$ funkcija $\hat{\Pi} : \pi \to R$ ima maksimum,

— prva netrivijalna forma razvoja funkcije $\hat{\Pi}$ je neparnog stepena.

Formulisane teoreme dokazujemo direktnim metodom Ljapunova, pokazujući da se pomoćna funkcija bliska po svojoj strukturi ranije korišćenoj funkciji (S o s n i c k i j (1985)), može izabrati tako da na nultom nivou ukupne energije zadovoljava uslove opšte teoreme Četaeva o nestabilnosti kretanja.

3. 1° Razmotrimo skup funkcija $f(x) = c|x|^{1+l/2} F(x)$,

$$F(x) = [\, 1-2c^{-2} \int_0^{|x|} (\Phi(v)/v^{1+l})dv \,]^{1/2}, \tag{3.1}$$

gdje je $0 < c$-const. . . ., $l \in N$ i $\Phi : R \to R$ neprekidna nenegativna funkcija koja za neko $a \in]0,1[$ zadovoljava uslov: $\Phi(v)/|v|^{1+a} \to 0$ kada $v \to 0$. Uočimo u faznom prostoru $R^n(x) \times R^n(\dot{x})$ skup

$$M = \{ (x, \dot{x}): |x| + |\dot{x}| < \varepsilon, < x,K(x)\dot{x} > - f(x) > 0 \} \quad (3.2)$$

gdje je ε dovoljno mali pozitivan broj. Na skupu M je zadovoljena nejednačina

$$(1 + \frac{1}{2}) < K\dot{x},K\dot{x} > - < \frac{\partial f}{\partial x}, K\dot{x} > > \Phi(|x|). \quad (3.3)$$

Zaista, ako sa $g(x,\dot{x})$ označimo lijevu stranu gornje nejednačine, biće

$$g = |K\dot{x}| \, [(1 + \frac{1}{2}) |K\dot{x}| - u f'|_x|], \quad u = <K\dot{x},x>/|x| \, |K\dot{x}|,$$

odakle, s obzirom na (3,2), važi

$$g|_M > \min_u \, [c^2 (1 + \frac{1}{2})|x|^1 (1 - u) \, F^2(x) + u \, \Phi(|x|)] =$$
$$= \Phi(|x|).$$

2° Ne umanjujući opštost razmatranja, možemo smatrati da je $K(0) = I$ — jedinična matrica. U protivnom to se može postići pomoću linearne transformacije koordinata. Tada, kao što je poznato (S o s n i c k i j (1985)), važi

$$(1 - \Delta_1(\dot{x})) \, |\dot{x}|^2 \leq <K(x)\dot{x},\dot{x}> \leqq (1 + \Delta_2(x)) \, |\dot{x}|^2 \quad (3.4)$$

gdje su: $0 \leq \Delta_i(x) = o(1)$.

Razmotrimo u faznom prostoru invarijantni skup, određen nultom vrijednošću mehaničke energije, tj.

$$H = \frac{1}{2} < K(x)\dot{x},\dot{x} > + \Pi(x) = 0. \quad (3.5)$$

S obzirom na pretpostavku $\Pi_k + \ldots + \Pi_{l-1} \geq 0$ i činjenicu da je $\Pi_l(x) \geq \lambda_l |x|^l$, $\lambda_l = \min_{|x|=1} \Pi_l(x)$, pri čemu je na osnovu uslova (b) teoreme 1 $\lambda_l < 0$, iz (3.5), imajući u vidu lijevu polovinu nejednačine (3.4), slijedi

$$|\dot{x}|_{H=0} \leq \sqrt{-2\lambda_l} \, |x|^{l/2} (1 + o(1)), \quad (3.6)$$

3° Na skupu

$$E = \{ (x,\dot{x}): |x| + |\dot{x}| < \varepsilon, < K(x)\dot{x},\dot{x} > + 2\Pi(x) = 0 \}$$

uvedimo pomoćnu funkciju $V(x,\dot{x}) = < x,K(x)\dot{x} > - f(x)$, pri čemu se $f(x)$ bira tako što se u (3.1) stavi $\Phi(v) = |v|^{1+b}$, $b \in]0, 1[$, a konstanta c se podvrgne uslovu $c < \sqrt{-2\Pi_l(e)}$, gdje je e vektor iz uslova (b) teoreme 1. Stavljajući $x = ue$ i $\dot{x} = U K^{-I}(x = ue)e$ u (3.5), slijedi nejednačina

$$|U| \geq \sqrt{-2\Pi_l(e)}\,|u|^{l/2}(1 + o(1)),$$

pa je

$$V(x = |u|e, \dot{x} = |U|K^{-I}(ue)e) \geq (\sqrt{-2\Pi_l(e)} - c)|u|^{1+l/2}(1 + o(1))$$

Dakle, s obzirom na izbor konstante c, za svako $\eta \in]0, \varepsilon[$ postoje tačke $(x, \dot{x}) \in E$, takve da je $|x| + |\dot{x}| < \eta$ i $V(x, \dot{x}) > 0$.

Izvod iz pomoćne funkcije po vremenu, u smislu diferencijalnih jednačina (1.1) je

$$\dot{V} = 2T - < x, \frac{\partial\Pi}{\partial x} > - < \dot{x}, \frac{\partial f}{\partial x} > + < \dot{x}, R(x,\dot{x}) >, \quad (3.7)$$

gdje je $R(x,\dot{x})$ neka vektorska funkcija drugog stepena po $\dot{x}$. Ako se iskoristi Eulerova teorema o homogenim funkcijama, na osnovu jednačine (3.5) prethodni izraz se može napisati u obliku

$$\dot{V} = (1 + \frac{1}{2}) < K\dot{x}, \dot{x} > - < K\dot{x}, \frac{\partial f}{\partial x} > + \sum_{k}^{l-1}$$

$$(l-i)\,\Pi_i(x) + \sum_{i>l}(l-i)\,\Pi_i(x) - < A\dot{x}, \frac{\partial f}{\partial x} > + P(x,\dot{x}),$$

gdje je $P(x,\dot{x})$ neka kvadratna forma u odnosu na generalisane brzine, koja se anulira za $\dot{x} = 0$. Na osnovu pretpostavke (a) teorme 1, ocjena (3.3) i (3.6), s obzirom na izbor funkcije, f, zaključujemo da za svako $(x,\dot{x}) \in E \cap V(x,\dot{x}) > 0$ važi

$$\dot{V} > |x|^{l+b}\,(1 + o(1)).$$

Prema tome, ispunjeni su uslovi opšte teoreme nestabilnosti (R o u c h e et al. (1977)) i, dakle, ravnoteža $x = 0$ razmatranog sistema je nestabilna.

4. Teorema 2 se izvodi iz teoreme 1. Prvo, linearnom transformacijom prelazimo na normalne koordinate. U normalnim koordinatama $\bar{x}$, s obzirom da razmatramo slučaj $\Pi_2 \geq 0$, je

$$\bar{\Pi}(\bar{x}) = \frac{1}{2} < \bar{D}\bar{x}, \bar{x} > + \bar{\Pi}_j(\bar{x}) + \dots \quad (4.1)$$

$$\bar{K}(\bar{x}) = I + \bar{A},\ \bar{A}(0) = 0,$$

gdje je $\bar{D} = \mathrm{diag}(\omega^2_1, \dots, \omega^2_{n-m}, 0, \dots, 0)$. Ako uvedemo oznake

$\bar{y} = (x_1, \ldots, x_{n-m})$ i $\bar{z} = (x_{n-m+1}, \ldots, x_n)$, na osnovu leme o cijepanju funkcije (Gilmore (1981), postoji nelinearna koordinatna transformacija

$$y = \bar{y} + b(\bar{y},\bar{z}),\ z = \bar{z}$$

koja funkciju $\Pi(x)$ transformiše u

$$\Pi^* = \frac{1}{2} < Dy, y > + W(z),\ W(z) = W_k(z) + \ldots,\ k >, 2, \quad (4.3)$$

gdje je $D = \text{diag}\ (\omega_1^2, \ldots, \omega^2_{n-m})$. Lako se pokazuje da je

$$b(\bar{x}) = b_{j-1}(\bar{x}) + \ldots$$

gdje su $b_i(\bar{x})$ vektorske forme stepena i. Očigledno je

$$\hat{\Pi} \equiv \Pi^*\ (y = b(\bar{y} = 0,z),z),$$

odakle, s obzirom na pretpostavke teoreme 2, slijedi

$$\hat{\Pi}_r(z) + \ldots = \frac{1}{2} < Dc(z),c(z) > + W_s(z) + \ldots, \quad (4.4)$$

gdje je

$$c(z) = b(\bar{y}=0,z) = c_p(z) + \ldots,\ p \geq j - 1.$$

Ako je $2p < r$, onda je $s = 2p$ i prema (4.4)

$$W_s = -\frac{1}{2} < Dc_p(z),c_p(z) > ,$$

a ako je $2p = r$, biće

$$W_s = -\frac{1}{2} < Dc_p(z),c_p(z) > + \hat{\Pi}_r(z).$$

Kada je $r < 2p$, onda je $s = r$ i $W_s = \hat{\Pi}_r(z)$. Pošto prema pretpostavci teoreme 2 forma $\hat{\Pi}_r$ nema lokalni minimum, a sem toga matrica D je pozitivno dfinitna, to u sva tri moguća slučaja prva netrivijalna forma W_s funkcije W može da uzima negativne vrijednosti. Time smo pokazali da su zadovoljeni uslovi teoreme 1 ($k = 2$, $1 = s$), pa je ravnoteža $x = 0$ razmatranog sistema nestabilna.

5. Prethodni rezultati nestabilnosti ravnoteže lako se proširuju na Čapliginove neholonomne sisteme. Zaista, diferencijalne jednačine oblika

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \Gamma\ (x,\dot{x}),\ L = T(x,\dot{x}) - \Pi(x), \quad (5.1)$$

opisuju kretanje takvih sistema nezavisno od jednačina neholomnih veza (Nejmark & Fufajev (1967).) Ovdje su: $2T = < A(x)\dot{x},\dot{x} >$ pozitivno definitna kvadratna forma brzina $\dot{x}$, dobijena iz kinetičke energije sistema eliminacijom zavisnih brzina pomoću jednačina neholonomnih teza; $\Gamma(x,\dot{x})$ — vektorska funkcija čije su komponente kvadratne forme nezavisnih brzina $\dot{x}$ (neholonomni članovi). Pošto je $< \Gamma(x,\dot{x}),\dot{x} > = 0$, to jednačine (5.1) dopuštaju integral energije $H = T(x,\dot{x}) + \Pi(x)$, pa se može primijeniti ranije izloženi postupak. Ako primijetimo da na dokaz teorema 1 i 2 ne utiču članovi iz Lagrangeovih jednačina koji su kvadratne forme generalisanih brzina, s obzirom na strukturu neholonomnih članova u jednačinama (5.1), slijedi da teoreme 1 i 2 važe i za Čapliginove neholonomne sisteme.

Na kraju, pretpostavimo da na razmatrani sistem sem potencijalnih sila dejstvuju i giroskopske sile $G = B(x)\dot{x}$, $B(x)$ — antisimetrična matrica. Neka je

$$B(x) = B_q(x) + \ldots,\ q \geq 0$$

MacLaurinov red matrice B. Pošto je snaga giroskopskih sila jednaka nuli, to one ne mijenjaju mehaničku energiju, pa se opet može iskoristili postupak dokaza teorema 1 i 2. Pri tome, izraz (3.7) treba dopuniti članovima koji potiču od giroskopskih sila. Lako se provjerava da ako giroskopske sile zadovoljavaju uslov:

$$q > [(l-2)/2],$$

ocjena (3.6) ostaje da važi. Prema tome, teoreme 1 i 2, uz dopunski uslov $q > [(l-2)/2]$, daju kriterijume nestabilnosti ravnoteže giroskopskog Čapliginovog sistema.

LITERATURA

1. Gilmore R. (1981), *Catastrophe theory for scientists and engineers.* A Wiley-Inaerscience Publication, New York.
2. Hagedorn P. (1971), *Die Umkehrung der Stabilitätssätze von Lagrange--Dirichlet und Rout.* Arch. Ration. Mech. and Analys, 42. № 4, p.281—315.
3. Карапетян А. В., Румянцев В. В. (1983), *Устойчивость консервативных и диссипативных систем.* ВИНИТИ, Москва.
4. Koiter W. T. (1965), *On the instability of equilibrium in the absence of a minimum of potential energy.* Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. B69, p. 107—113.
5. Козлов, В. В. (1982), *Асимптотические решения уравнений класической механики,* ПММ, т. 46, вып. 4, с. 573—577.
6. Козлов В. В., Паламодов В. П. (1982), *Об асимптотических решениях уравнений классической механики,* Докл. АН СССР, т. 263, № 2, с. 285—289.
7. Козлов В. В. (1986), *Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа—Дирихле.* ПММ, т. 50, вып. 6, с. 928—937.

8. Laloy M. (1979), *On the inversion of the Lagrange-Dirichlet theorem in the case of an analytic potential.* Int. J. Non-Linear Mechanics. Vol., 14, pp. 59—65.
9 Lypunov A. M. (1897), *Sur l'instabilité de l'equilibre dans certains cas ou la fonction des forces n'est pas un maximum.* Jour. de Math., ser. V, 3-Fasc. I, 81—94.
10. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. (1967), *Динамика неголономных систем*, Наука, Москва.
11. Painlevé P. (1904), *Sur la stabilité de l'equilibre,* C. R. Acad. Sci. Paris, 138, p. 1555—1557.
12. Peiffer K. (1989), *On the inversion of Lagrange-Dirichlet's theorem,* Rapport 162, Sémin. Math. N. S., Univ. Cath. Louvain, p. 1—16.
13. Rouche N., Habets P., Laloy M. (1977), *Stability theory by Lyapunov's direct Method,* Springer, New York.
14. Сосницкий С. П. (1985), *О некоторых случаях неустойчивости равновесия натуральных систем, Укр. мат. ж.*, Т. 37, № 1, с. 124—127.

Ранислав Булатович

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ В АНАЛИТИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

Резюме

Исследуется неустойчивость равновесия голономных механических систем в силовом поле с потенциалом вида

$$\Pi(x) = \sum_{k}^{l-1} \Pi_i(x) + \Pi_l(x) + \ldots, \; k \geq 2, \; x \in R^n$$

где $\sum_{n}^{l-1} \Pi_i(x) \geq 0$. Прямым методом Ляпунова доказываются следующи утверждения.

Теорема 1. Если выполнены предположения

(а) $\sum_{k}^{l-1} (l-i)\, \Pi_i(x) \geq 0.$

б) существует единичний вектор $e \in R$, такой, что $\Pi_l(e) < 0$ и $\sum_{k}^{l-1} \Pi_i(ue) = 0$ для каждого $u \in R$;

то равновесие $x = 0$ неустойчиво.

Теорема 2. Если $\Pi_2(x) \geq 0$ и первая нетривиальная форма разложения функции $\Pi(x)$ на плоскости $\pi = \{x: \Pi_2(x) = 0\}$ принимает отприцательные значения, то равновесие $x = 0$ неустойчиво.

Из этих теорем вытекают некоторые известные результаты (Laloy (1979), Козлов (1986), Peiffer (1989). Показано, что теоремы 1 и 2 распространяются на неголономные системы Чаплыгина.

Napomena: Rad je urađen u okviru projekta OSI—263 Saveznog ministarstva za razvoj, nauku i životnu sredinu.