

Vladimir Jaćimović, Milica Kankaraš***

UTICAJ STOHAISTIČKOG ŠUMA NA BIFURKACIJE RAVNOTEŽNIH STANJA U SISTEMIMA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Apstrakt

U radu razmatramo modele različitih procesa koji uključuju stohastičke efekte. Ovakvi modeli se matematički formalno opisuju stohastičkim diferencijalnim jednačinama (SDJ). Rješenje takve jednačine je slučajni proces. Formalizacija zadatka SDJ zahtijeva uvođenje pojma stohastičkog integrala, odnosno Ito, ili Stratonovič integrala. Posebno se bavimo stacionarnim stanjima u stohastičkim diferencijalnim jednačinama i uticajem šuma na bifurkacije stacionarnih stanja. Između ostalog, uvešćemo poznatu jednačinu Fokera-Planka (forward Kolmogorov equation) koja omogućava traženje stacionarne raspodjele dinamičkog sistema. U radu su specijalno razmatrani modeli koji opisuju rast populacije u toku vremena, koji se mogu naći u [10]. Nakon toga, razmatrali smo modele FitzHugh-Nagumo i El-Nino u kojima se javlja fenomen bifurkacije. Prvi model se odnosi na biološki fenomen eksitacije (pobuđivanja) neurona, dok drugi opisuje klimatsku varijabilnost. Posebna pažnja je posvećena uticaju šuma na nastanak i nestanak bifurkacije u blizini kritične vrijednosti parametra.

* Odsjek Matematika, Univerzitet Crne Gore, Podgorica, Crna Gora

INFLUENCE OF STOCHASTIC NOISE ON BIFURCATIONS OF STATIONARY STATES IN SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract

In this study we deal with different models of processes which include stochastic noise. These models are formally described by stochastic differential equations. Solution of that equation is stochastic process. For solving that equation, we have to introduce concept of stochastic integral, Ito, or Stratonovich type. Specially, we consider stationary distributions in stochastic differential equations, and influence of noise on bifurcations. Also, we introduce well known Fokker-Planck equation (forward Kolmogorov equation) whose solutions are stationary distributions of dynamical system. We study mainly models which describe growth of population, that can be found in work [10]. Further, we analyze models with phenomenon of bifurcation, FitzHugh-Nagumo and El-Nino model. The first is model of excitation of neurons in the cell, whilst the second describes climate changes. Special attention is dedicated to the emergence of bifurcation phenomena close to bifurcation parameter.

1. Stohastičke diferencijalne jednačine

U ovom radu ćemo se baviti dinamičkim sistemima u kojima prisustvuje elemenat slučajnosti. Tačnije, razmatraćemo dinamičke sisteme koji se opisuju običnim diferencijalnim jednačinama (ODJ), a zatim u ove sisteme uključiti i stohastičku komponentu. Na ovaj način ćemo dobiti tzv. stohastičku diferencijalnu jednačinu (SDJ). Primijetimo da je razmatranje ovakvih stohastičkih dinamičkih sistema prirodan zadatak, najčešće uslovljen time što je većina realnih procesa koji se opisuju ODJ podvrgnuta uticaju šuma. Pod šumom

podrazumijevamo uticaj nepredvidivih, slučajnih faktora na stanje dinamičkog sistema. Na primjer, dinamički sistem rasta neke populacije može biti uslovljen nepredvidivim faktorima, kao što su vremenske nepogode, uticaji iz okruženja i slično. Ovi faktori mogu značajno uticati na ponašanje sistema i njegovo stanje u određenom trenutku. Ipak, stroga matematička formalizacija stohastičkih dinamičkih sistema zahtijeva pažljiv pristup, jer se prilikom matematičkog zapisa ovog zadatka pojavljuju određene nedoumice. Zbog ovoga je stroga matematička teorija SDJ razvijena tek u drugoj polovini XX vijeka. Kako bismo jasno definisali šta smatramo rješenjem SDJ neophodno je najprije precizno definisati pojam stohastičkog integrala. Najprije zapišimo SDJ u sljedećem obliku:

$$dX(t) = a(X(t), t) dt + b(X(t), t) dW(t), \quad t > 0, \quad X(0) = X_0, \quad (1.1)$$

gdje su a i b zadate funkcije, X_0 – slučajna veličina koja predstavlja početni uslov, W – Vinerov proces, dW – slučajan priraštaj Vinerovog procesa. Ukoliko formalno integriramo ovu jednačinu, dobijamo:

$$X(t) - X(0) = \int_0^t a(X(s), s) ds + \int_0^t b(X(s), s) dW(s)$$

Postavlja se pitanje smisla integrala na desnoj strani jednačine. Ovaj integral se naziva stohastičkim integralom. Postoji više mogućih načina na koji možemo interpretirati ovaj integral. Pokazuje se da su različiti načini neekvivalentni, tj. da dovode do različitih rješenja SDJ (1.1). U slučaju klasičnog integrala Rimana (Lebega) se dokazuje da rezultat integriranja ne zavisi od izbora tačaka na intervalima integriranja (lema Darbu). S druge strane, u slučaju stohastičkog integrala način izbora tačaka na intervalima integriranja utiče na konačan rezultat. U literaturi su najčešće korišćeni stohastički integrali Ito i Stratonoviča. Važno je napomenuti da rezultat stohastičkog integrala zavisi od izbora tačaka. Itoov integral se dobija izborom lijevih krajeva na intervalima integriranja, dok se biranjem sredina intervala dobija integral Stratonoviča. Više detalja i konkretni primjeri se, na primjer, mogu

naći u ([5]). Mi ćemo u ovom radu rješenje SDJ razumjeti u smislu Ito. Kako smo na ovaj način precizirali smisao stohastičkog integrala, imamo da je rješenje SDJ slučajan proces.

Počnimo od determinističko dinamičkog sistema koji se opisuje jednostavnom diferencijalnom jednačinom:

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad x(0) = x_0, \quad t > 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad r > 0$$

gdje je x_0 –inicijalna populacija i r –koeficijent rasta (drift). Rješenje jednačine je:

$$x(t) = x_0 e^{rt},$$

što predstavlja eksponencijalni rast. Ukoliko jednačinu zapišemo u obliku:

$$dx = rxd t,$$

možemo razmatrati stohastički dinamički sistem dodavanjem šuma datoj jednačini:

$$dX(t) = rX(t) dt + \sigma dW_t. \quad (1.2)$$

Na ovaj način dobijamo linearnu stohastičku diferencijalnu jednačinu. U jednačini (1.2), σ predstavlja koeficijent difuzije, tj. intenzitet šuma. U jednačini (1.2) šum ne zavisi od brojnosti populacije x , međutim, možemo pretpostaviti da je koeficijent rasta r podvrgnut uticaju šuma. U tom slučaju dobijamo SDJ:

$$dX(t) = (r + \sigma)X(t)dt = rX(t)dt + \sigma X(t)dt$$

Način na koji šum utiče na dinamički sistem zavisi od pristupa modeliranju i od konkretnog sistema koji razmatramo.

2. Rješavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina

U cilju nalaženja rješenja jednostavnih SDJ, koristimo Itov integral i pokušavamo da nađemo transformaciju $Y = F(t, X)$, koja transformiše jednačinu za $X(t)$ ka jednostavnijoj SDE u $Y(t)$.

Primjer. Posmatrajmo jednačinu:

$$dX(t) = -X(t) dt + \sigma dW(t).$$

Ovdje je $a = -X, b = \sigma$. Neka je $Y = F(t, X) = Xe^t$. Po Itovom identitetu (vidi [5]):

$$dY(t) = (Xe^t - Xe^t + 0) dt + \sigma e^t dW(t) = \sigma e^t dW(t).$$

Integracijom u granicama od 0 do T dobijamo:

$$Y(t) - Y(0) = \sigma \int_0^t e^s dW(s),$$

tj.

$$X(t) - X(0) = \sigma e^{-t} \int_0^t e^s dW(s),$$

tj.

$$X(t) = X(0) + \sigma e^{-t} \int_0^t e^s dW(s).$$

U opštem slučaju SDJ se ne može riješiti analitički (kao ni ODJ), pa se koriste numerički metodi (simulacije). Za simuliranje SDJ se koristi numerički metod Ojlera-Marujama ([7]), čija je ideja bliska klasičnom metodu Ojlera za numeričku integraciju ODJ. Koristi se činjenica da su priraštaji datog procesa nezavisni i da je priraštaj Vinerovog procesa normalno raspodijeljena slučajna promjenljiva, tj. $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$, odnosno $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t - s} N(0, 1)$.

3. Jednačina Foker-Planka

Neka $X(t)$ zadovoljava Itovu SDJ (1.1). Tada pri određenim uslovima slučajna veličina $X(t)$ ima gustinu $f(x, t)$ za svaki momenat t . Ispostavlja se da ova funkcija gustine zadovoljava parcijalnu jednačinu (3.1), koja se naziva jednačinom Fokera-Planka:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} (f(x, t) a(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (f(x, t) b^2(x, t)), \quad (3.1)$$

Osim toga, $f(x, 0) = f_0(x)$, gdje je f_0 gustina slučajne promjenljive X_0 .

Izjednačavanjem desne strane jednačine (3.1) sa nulom, dobijamo stacionarnu (invarijantnu) raspodjelu slučajnog procesa $X(t)$.

Primjer 1. Posmatrajmo SDJ:

$$dX(t) = rdt + \sigma dW(t).$$

Jednačina predstavlja tzv. geometrijsko Braunovo kretanje. Ovaj model se takođe naziva model Black-Scholes, i opisuje promjenu cijena nekih sredstava, najčešće akcija, na berzi.

Foker-Plankova jednačina za SDJ je:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -r \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (3.2)$$

Ukoliko *drift* r izjednačimo sa nulom dobijamo jednačinu:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

Ukoliko uvedemo početni uslov $u(x, 0) = \delta_0(x)$, tj. inicijalna gustina je skoncentrisana u tački 0, rješenje je:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}.$$

Ukoliko je $r \neq 0$ uzmimo smjene: $\tau = t, z = x - rt$. Diferenciranjem dobijamo jednačine:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \tau} - r \frac{\partial f}{\partial z}.$$

4. Primjer: Stohastička logistička jednačina

Logistička jednačina opisuje rast populacije u toku vremena. Jedan od najjednostavnijih modela koji opisuje rast populacije je model rasta predstavljen jednačinom $y' = \alpha y$. Rješenje ove diferencijalne jednačine je $y(t) = ce^{\alpha t}$, što predstavlja eksponencijalni rast. Međutim, jasno je da uslovi ne mogu uvijek biti idealni i da se ovakav rast populacije ne može očekivati beskonačno. Mnogo vjerodostojniji model koji opisuje razmnožavanje populacije, koji uzima u obzir ograničenost resursa [10] dat je jednačinom:

$$dx(t) = x(t)(\alpha - \beta x(t)) dt, \quad (4.1)$$

gdje su α i β pozitivne konstante. Jednačina (4.1) ima rješenje oblika:

$$x(t) = \frac{\alpha x_0}{\beta x_0 + (\alpha - \beta x_0)e^{-\alpha t}}.$$

Stacionarna rješenja (rješenja koja ne zavise od vremena) diferencijalne jednačine (4.1) su: $x(t) \equiv 0$ i $x(t) \equiv \frac{\alpha}{\beta}$. Stacionarno rješenje $x(t) \equiv 0$ je nestabilno jer je $(\alpha - 2\beta x(t))|_{x \equiv 0} = \alpha > 0$.

Zbog $(\alpha - 2\beta x(t))|_{x \equiv \frac{\alpha}{\beta}} = -\alpha < 0$, rješenje $x(t) \equiv \frac{\alpha}{\beta}$ je stabilno. Prvo stanje ravnoteže odgovara slučaju kada nema populacije. Drugo rješenje predstavlja situaciju kada je veličina populacije pozitivna konstantna. Pretpostavimo da parametri α i β nijesu precizno poznati, dodajmo šum parametrima i pretvorimo deterministički sistem u stohastički.

5. Stacionarna rješenja stohastičke logističke jednačine

Sada ćemo posmatrati logističku jednačinu (4.1) kojoj je dodat odgovarajući šum. U stohastičkom slučaju nećemo dobiti sva deterministička stacionarna rješenja, ali možemo naći invarijantne raspodjele koje će predstavljati stohastički analog determinističkim stacionarnim rješenjima. Invarijantna raspodjela je raspodjela koja ne zavisi od

vremena (opisuje ponašanje sistema nakon dužeg vremena). Dodajmo šum parametrima α i β . U tom cilju, uvedimo pomoćne procese $\gamma_t^{(1)}$ i $\gamma_t^{(2)}$. Sada razmatrajmo sistem:

$$\begin{aligned} dx_t &= x_t d\gamma_t^{(1)} - x_t^2 d\gamma_t^{(2)} \\ d\gamma_t^{(1)} &= \alpha dt + \sigma_1 dw_t^{(1)} \\ d\gamma_t^{(2)} &= \beta dt + \sigma_2 dw_t^{(2)} \end{aligned}$$

gdje su $w_t^{(1)}, w_t^{(2)}$ nezavisni Vinerovi procesi, a $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Dakle, dobijamo stohastičku diferencijalnu jednačinu:

$$dx_t = x_t(\alpha - \beta x_t) dt + \sigma_1 x_t dw_t^{(1)} - \sigma_2 x_t^2 dw_t^{(2)} \quad (5.1)$$

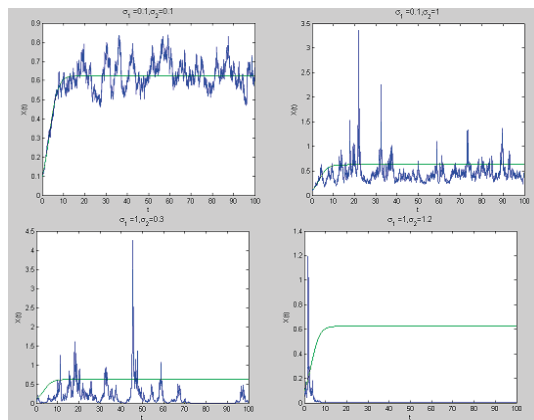
Definicija. Posmatrajmo jednodimenzionalnu stohastičku diferencijalnu jednačinu:

$$dx_t = f(t, x_t) dt + \sum_{i=1}^m g_i(t, x_t) w_t^{(i)}, \quad t \geq t_0, \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.2)$$

gdje je $W_t = (w_t^{(1)}, w_t^{(2)}, \dots, w_t^{(m)})$ standardni m -dimenzionalni Vinerov proces, a f i g_i zadovoljavaju uslove za egzistenciju i jedinstvenost rješenja stohastičke diferencijalne jednačine. Stohastički proces $x_t \equiv \bar{x}$ je stacionarno rješenje jednačine (5.2) sa početnim uslovom $x(t_0) = \bar{x}$ ako je:

$$f(t, \bar{x}) = 0, \quad g_i(t, \bar{x}) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Na osnovu prethodne definicije, stacionarna rješenja jednačine (5.1) se dobijaju kada izjednačimo drift i difuziju sa nulom. Dobijamo stacionarno rješenje $x_t \equiv 0$, a to je jedno od determinističkih stacionarnih rješenja jednačine (5.1). Dakle, ne dobijamo drugo determinističko rješenje $x_t = \frac{\alpha}{\beta}$. Trajektorije rješenja procesa (5.1), date su na slici (1). Sa slike možemo vidjeti da za dovoljno male disperzije σ_1 i σ_2 , trajektorije x_t , koje zadovoljavaju jednačinu (5.1), fluktuiraju oko determinističkih trajektorija. Postavlja se pitanje da li postoji stacionarna raspodjela koja igra ulogu determinističkog rješenja $x_t = \frac{\alpha}{\beta}$.



Slika 1: Determinističke i stohastičke trajektorije jednačine (5.1) za različite vrijednosti σ_1 i σ_2 , gdje su $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$, $x_0 = 0.1$.

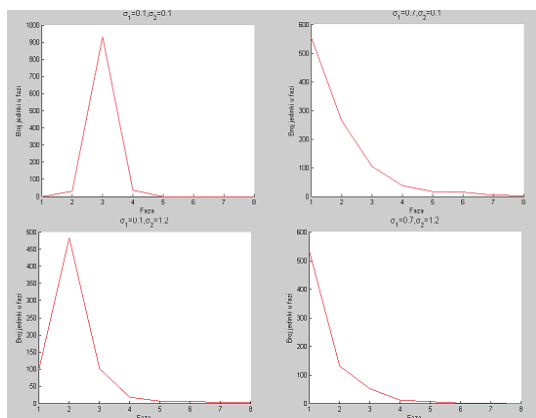
U cilju pronalaženja stacionarnih rješenja, formirajmo Foker-Plankovu jednačinu za jednačinu (5.1):

$$\frac{d}{dx} (x(\alpha - \beta x)p(x)) - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} [(\sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 x^4)p(x)] = 0, \quad (5.3)$$

gdje je $p(x)$ funkcija gustine koja je neprekidno-diferencijabilna. Važi rezultat (vidi [10]):

Teorema 1. *Jednačina (5.3) ima netrivialno rješenje akko $\sigma_1^2 < 2\alpha$.*

Na Slici (2) su prikazani rezultati dobijeni numeričkim metodama. Naime, kod numeričkog simuliranja funkcije gustine, posmatramo veliki broj realizacija slučajnog procesa (u našem slučaju 1000). Svaka realizacija procesa, zbog šuma koji utiče na kretanje, ima različitu trajektoriju, međutim, ansambl od 1000 trajektorija pokazuje jasne statističke zakonitosti.



Slika 2: Gustina $p(x)$ jednačine (5.3) za različite vrijednosti σ_1 i σ_2 , gdje su $\alpha = 0.5$ i $\beta = 0.8$.

6. Teorema o bifurkaciji Hopfa

Posmatrajmo autonomni sistem

$$\frac{du}{dt} = f(\mu, u) \quad (6.1)$$

gdje je $f \in C^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$.

Pretpostavimo da je $u(t) \equiv 0$ trivijalno rješenje sistema (6.1) za svaku vrijednost parametra μ , t.j.

$$f(\mu, 0) \equiv 0, \forall \mu. \quad (6.2)$$

Označimo:

$$A_\mu := f_x(\mu, 0), \quad A_0 = A_{\mu_0}.$$

Neka matrica A_μ ima par kompleksnih svojstvenih vrijednosti koje zavise od parametra μ : $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$

Pretpostavimo da za $\mu = \mu_0$ važe uslovi:

1. A_0 je nesingularna i ima par čisto imaginarnih sopstvenih vrijednosti $\pm iw_0$, $w_0 > 0$
2. A_0 nema druge sopstvene vrijednosti oblika $\pm ikw_0$, $k \in \mathbf{N}, k \neq 1$.

3. Neka važi da je $\alpha'(\mu_0) \neq 0$.

Važi Hopfova teorema dokazana u [9]:

Teorema 2. *Ako važe uslovi (1 – 3) tada se počevši od μ_0 pojavljuje niz periodičnih rješenja S_μ čiji je period blizak $\frac{2\pi}{w_0}$.*

Preciznije, postoji okolina J , gdje je $s = 0$, funkcije $w(s), \mu(s) \in C^1(J)$, i familija u_s ne-konstantnih, periodičnih rešenja $S_{\mu(s)}$ tako da:

1. $w(s) \rightarrow w_0, \mu(s) \rightarrow \mu_0$ kada $s \rightarrow s_0$,

2. u_s ima period $T_s = \frac{2\pi}{w(s)}$,

3. Amplituda orbite u_s teži ka 0 kada $s \rightarrow 0$.

7. Primjer: Model ENSO El Nino

Posmatrajmo dinamički sistem opisan u [11] koji opisuje ENSO (El Nino/Southern Oscillation) model varijabilnosti klime. ENSO je kvazi-periodični fenomen, koji se javlja na Pacifiku prosječno svake četiri godine. ENSO može izazvati ekstremne vremenske neprilike, kao što su poplave, suše itd. Jedan od jednostavnijih modela koji opisuju ekvatorsko-okeanski ENSO fenomen je planarni ZC model (Zebiak-Cane):

$$\begin{cases} \dot{x} = (\mu - \mu_c)x_t - y_t - x_t(x_t^2 + y_t^2) \\ \dot{y} = (\mu - \mu_c)y_t + x_t - y_t(x_t^2 + y_t^2) \end{cases} \quad (7.1)$$

ovdje su $x(t)$ i $y(t)$ atmosferski pritisak i temperatura vode respektivno. Parametar μ predstavlja snagu međusobne zavisnosti atmosfere i okeana, odnosno količinu pritiska na SSO (varijabilnost temperature površine mora), koji je bitan kontrolni parametar. Sad ćemo razmatrati u kom slučaju dolazi do destabilizacije klime. U matematičkim terminima, ispitujemo za koju vrijednost parametra dolazi do pojave promjene stabilnosti dinamičkog sistema, odnosno pojave Hopfove bifurkacije. Stanje ravnoteže ovog dinamičkog sistema je

očigledno $(0, 0)$. Linearizacijom sistema (7.1) dobijamo matricu:

$$J = \begin{pmatrix} \mu - \mu_c & -w \\ w & \mu - \mu_c \end{pmatrix}$$

$$\det(J - \lambda E) = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{(\mu - \mu_c) \pm \sqrt{-4w^2}}{2}.$$

Da bi teorema Hopfa bila zadovoljena, sopstvene vrijednosti treba da budu čisto imaginarne. To se dešava u slučaju kada je:

$$\mu = \mu_c.$$

Takođe važi da je:

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda)}{\partial \mu} = 1 \neq 0,$$

pa zaključujemo da su svi uslovi Hopfove teoreme zadovoljeni (vidi [9]). Takođe, u zavisnosti od realnog dijela sopstvenih vrijednosti, zaključujemo da je stanje ravnoteže za $\mu > \mu_c$ nestabilno, a u suprotnom je stanje stabilno. Za vrijednost parametra $\mu > \mu_c$ okean i atmosfera pokazuju periodično ponašanje, odnosno u matematičkim terminima, dolazi do pojave graničnog cikla. Za vrijednosti parametra manje od μ_c stanje klime na Pacifiku je stabilno. Međutim, dodavanjem šuma, za $\mu < \mu_c$ na godišnjem nivou se događaju oscilacije. Posmatrajmo dinamički sistem diferencijalnih jednačina (7.1) sa šumom. Razmatraćemo sistem kada je šum na različite načine dodat sistemu. U jednačinama σ predstavlja amplitudu šuma, dok je W_t Vinerov proces. Ispostavlja se da za vrijednosti $\mu < \mu_c$, bijeli šum u vjetru može da izazove promjene u ENSO modelu, koje se ogledaju u značajnim promjenama amplitude, dok za vrijednosti $\mu > \mu_c$ periodične oscilacije nijesu mnogo pogođene. Međutim, u oba slučaja klimatska varijabilnost ne zavisi u velikoj mjeri od karakteristike šuma.

Razmotrimo različite slučajeve dodavanja šuma sistemu. U prvom slučaju, neka šum dodat X_t , odnosno Y_t , zavisi od veličine X_t (Y_t), tj. srazmjernan je njihovoj veličini. Takođe, šumovi koji se javljaju u

procesima X_t i Y_t su nezavisni Vinerovi procesi (dW_t^1, dW_t^2). Neka je stohastički dinamički sistem zadat jednačinama:

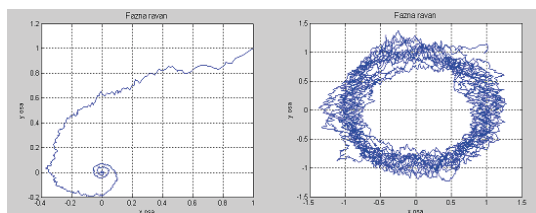
$$\begin{cases} dX_t = (0.1X_t - Y_t - X_t(X_t^2 + Y_t^2)) dt + \sigma X_t dW_t^1 \\ dY_t = (0.1Y_t + X_t - Y_t(X_t^2 + Y_t^2)) dt + \sigma Y_t dW_t^2 \end{cases} \quad (7.2)$$

U vektorskom obliku:

$$d \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1X_t - Y_t - X_t(X_t^2 + Y_t^2) \\ 0.1Y_t + X_t - Y_t(X_t^2 + Y_t^2) \end{pmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma X_t & 0 \\ 0 & \sigma Y_t \end{bmatrix} d \begin{pmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \end{pmatrix}$$

Jednačina Foker-Planka ima oblik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((0.1x - y - x(x^2 + y^2)) \cdot p) + \frac{\partial}{\partial y} ((0.1y + x - y(x^2 + y^2)) \cdot p) - \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2 X_t^2 p) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma^2 Y_t^2 p) \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$



Slika 3: Izgled fazne ravni za $\mu - \mu_c = -0.25, \sigma = 0.2$, odnosno za $\mu - \mu_c = 1, \sigma = 0.3$

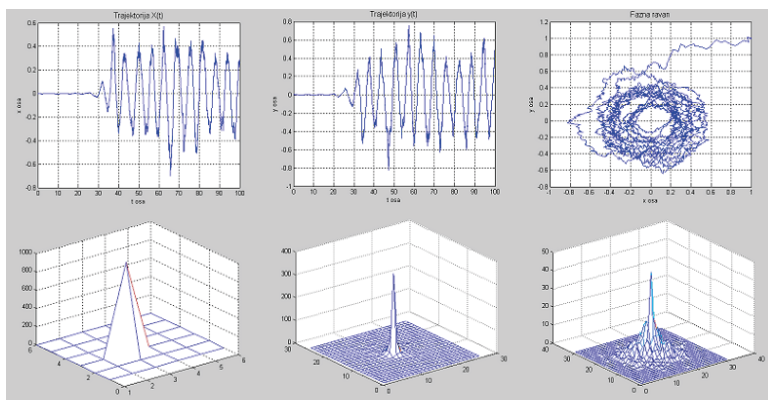
Sa Slike (3) možemo primijetiti da ako je $\mu - \mu_c = 1$, i ako je $\sigma = 0.3$, trajektorija je približno granični cikl, i ne mijenja kvalitativno ponašanje. Međutim, ako je $\mu - \mu_c = -0.25$, za vrijednost $\sigma = 0.2$, dakle za manji šum trajektorija ima neregularne oscilacije, i poslije nekog vremena će potpuno da izgubi prvobitni oblik.

Na Slici (4) je prikazana fazna ravan, trajektorije $X(t)$ i $Y(t)$, kao i izgled histograma u 3D (površ), koji određuje gustinu raspodjele.

Sa slike (4) se može primijetiti da se fazni portret nije kvalitativno promijenio, da se trajektorije kreću periodično oko nule, dok su čestice većinom koncentrisane na jednom mjestu. Da bismo nacrtali funkciju gustine, odredimo raspon vrijednosti za $X(t)$, $Y(t)$, podijelimo "pravougaonik" određen tim vrijednostima na n djelova, a zatim u svakom dijelu koji predstavlja fazu prebrojimo $X(t)$, odnosno $Y(t)$, i crtamo broj dobijenih vrijednosti na trećoj osi. Ovo je način da simuliramo gustinu raspodjele numerički, bez korišćenja formule za gustinu (koju je u opštem slučaju teško naći).

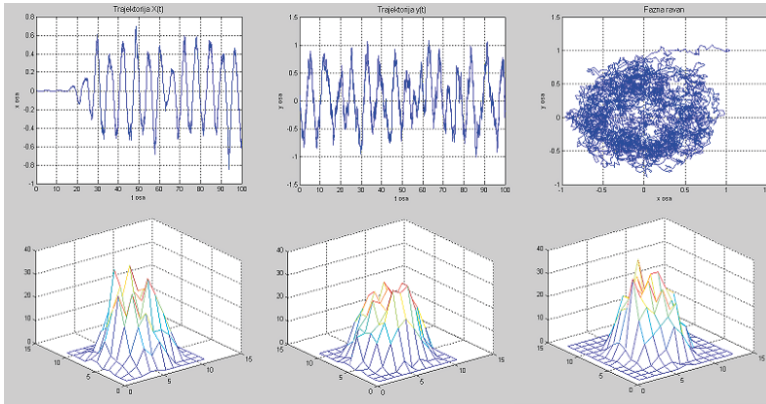
Ukoliko su šumovi nezavisni Vinerovi procesi i ukoliko ne zavise od veličine X_t , odnosno Y_t , sistem ima oblik:

$$\begin{cases} dX_t = (0.1X_t - Y_t - X_t(X_t^2 + Y_t^2)) dt + \sigma dW_t^1 \\ dY_t = (0.1Y_t + X_t - Y_t(X_t^2 + Y_t^2)) dt + \sigma dW_t^2 \end{cases} \quad (7.4)$$



Slika 4: Trajektorije $X(t)$, $Y(t)$, fazna ravan sistema (7.2) i histogram u 3D u različitim momentima t , koji označavaju početak, sredinu i kraj, respektivno ($\mu = 0.1$)

Sa Slike (5) se može primijetiti da je sada šum uticao na faznu ravan, i da se ona kvalitativno promijenila dok su se čestice ravnomjerno rasporedile, i nijesu koncentrisane na jednom mjestu.



Slika 5: Trajektorije $X(t)$, $Y(t)$, fazna ravan sistema (7.4) i histogram u 3D u različitim momentima t , koji označavaju početak, sredinu i kraj, respektivno ($\mu = 0.1$)

Dakle, u slučaju kada je šum koji se dodaje sistemu zavisen od veličine populacije, fazna ravan će zadržati kvalitativne odlike, i neće izostati periodično kretanje. U suprotnom, trajektorije se kvalitativno mijenjaju.

8. Primjer: FitzHugh-Nagumo model eksitacije neurona

Model koji je razmatran u [12], FitzHugh-Nagumo model, u stvari je uprošćeni Hodgkin-Huxley model. Hodgkin i Huxley su eksperimentisali na aksonima lignji u cilju davanja matematičkog objašnjenja pobudljive prirode aksona (nervnih vlakana), s obzirom na elektrohemijiska svojstva natrijuma i kalijuma. Aksoni odводе nadražaje od jednog do drugog neurona u cilju stvaranja impulsa. FitzHugh-Nagumo model je redukcija ovog 4-dimenzionalnog modela na dvo-dimenzionalni model, koji je mnogo pogodniji za geometrijsku interpretaciju i objašnjenje mnogih bioloških fenomena za pobuđivanje ne-

urona i generisanja nervnih impulsa (spikes). Sistem je zadat jednačinama:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = f_1(v, w) = v - \frac{v^3}{3} - w + I \\ \frac{dw}{dt} = f_2(v, w) = 0.08(v + 0.7 - 0.8w) \end{cases} \quad (8.1)$$

Promjenljiva v predstavlja ekscitabilnost sistema, tj. napon, ili membranski potencijal aksona, w je promjenljiva oporavka koja predstavlja težnju neurona da vrati u prvobitno stanje, dok je I stimulus, tj. energija koja se ulaže za pobuđivanje neurona. U Fitz-Nagumo sistemu ćemo proučavati pojavu bifurkacije Hopfa, tj. kvalitativne promjene dinamike sistema u zavisnosti od parametra I . Bifurkacija je promjena rješenja sistema koja nastaje prolaskom sistema kroz bifurkacionu vrijednost. Bifurkacija podrazumijeva pojavu graničnog cikla koja nastaje usljed gubljenja stabilnosti stanja ravnoteže. U tom slučaju dobijamo čisto imaginarne sopstvene vrijednosti. Za vrijednosti ispod parametra bifurkacije, stanje ravnoteže je stabilno, a iznad bifurkacione vrijednosti nestabilno. Da bismo dobili stanje ravnoteže, rješavamo sistem:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = 0, \frac{dw}{dt} = 0 \\ \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow w = v - \frac{v^3}{3} + I \\ \frac{dw}{dt} = 0 \Rightarrow w = \frac{v + 0.7}{0.8} \\ J = \begin{pmatrix} 1 - v^2 & 0 \\ 0.08 & -0.064 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(J - \lambda E) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{0.936 - v^2 \pm \sqrt{v^4 - 2.128v^2 + 0.8121}}{2}.$$

Da bismo našli traženi parametar, sopstvene vrijednosti moraju biti čisto imaginarne, a to je ispunjeno u slučaju:

$$v^4 - 2.128v^2 + 0.8121 < 0, \quad 0.936 - v^2 = 0.$$

Sopstvene vrijednosti su:

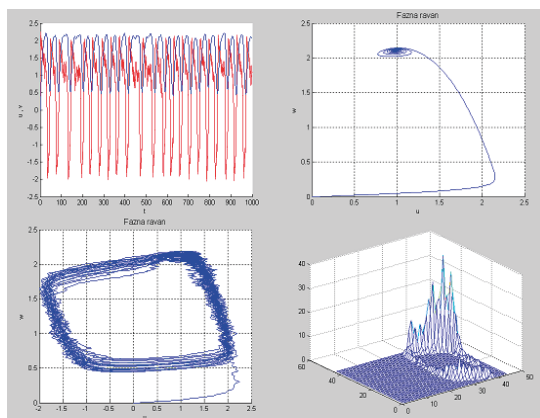
$$\lambda_1 = +0.2755i, \lambda_2 = -0.2755i.$$

Stanje ravnoteže dinamičkog sistema je:

$$(v, w) = (0.9675, 2.0844),$$

a odgovarajući parametar bifurkacije $I = 1.4188$. Ukoliko u sistem (8.1) uključimo šum, dobijamo:

$$\begin{cases} dV_t = \left(V_t - \frac{V_t^3}{3} - W_t + I \right) dt + \sigma dW_t \\ dW_t = (0.08 (V_t + 0.7 - 0.8W_t)) dt \end{cases} \quad (8.2)$$

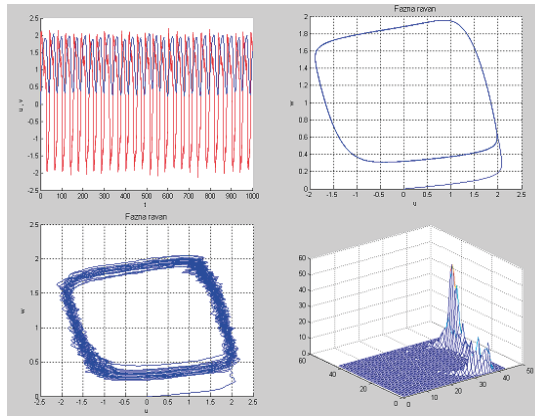


Slika 6: Trajektorije u, v sistema (8.2) u zavisnosti od vremena, fazna ravan ispod i iznad parametra bifurkacije i histogram u 3D respektivno, za $I=1.44$

Na slikama (6) i (7) nalaze se trajektorije, fazni portret (sa i bez šuma) i histogram u slučajevima kada je I iznad, odnosno ispod parametra bifurkacije.

9. Zaključak

U radu smo razmotrili tri modela: stohastičke logističke jednačine, dvodimenzionalni ENSO model i model FithHugh-Nagumo. Zaključili



Slika 7: Trajektorije u, v sistema (8.2) u zavisnosti od vremena, fazna ravan sa i bez šuma i histogram u 3D respektivno, za $I=1.2$

smo da dovoljno mali šum ne izaziva nastanak, odnosno nestanak Hopfove bifurkacije i da se stohastički proces ponaša kvalitativno isto kao i odgovarajući deterministički. U nekim slučajevima (model FithHugh-Nagumo) šum može podstaći pojavu kvaziperiodičkih trajektorija. U slučaju šuma jačeg intenziteta, dolazi do nestajanja periodičkog ponašanja sistema i pojedinih stanja ravnoteže. Dakle, ukoliko intenzitet šuma nije dovoljno veliki, kvalitativno ponašanje trajektorija, tj. realizacija slučajnog procesa se ne razlikuje od determinističkih. Ukoliko je jačina šuma dovoljno velika ne možemo očekivati da je stacionarno rješenje analog determinističkom. U tom slučaju se periodičnost rješenja gubi.

Literatura

- [1] Ludwig Arnold, *Random dynamical systems* Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [2] Pollard, Henry *The Stieltjes integral and its generalizations* The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 19, 1920.

-
- [3] Yuri Kuznetsov *Elements of Applied Bifurcation Theory* Applied Mathematical Sciences, Vol. 112, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1995.
- [4] J. David Logan, William R. Wolesensky, *Mathematical Methods in Biology*, University of Nebraska Lincoln, 2009, pp. 151–158.
- [5] Bernt Øksendal *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*, Department of Mathematics, University of Oslo, Sixth Edition, 2007.
- [6] Stroock. D. W., Varadhan, S. R. S. (1979) *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag.
- [7] Desmond. J. Higham, *An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*, SIAM REVIEW, Vol. 43, pp. 525-546.
- [8] Tom Cosimano, Alex Himonas *Mathematical methods in financial economics*, Spring 2009, Lecture Notes 23-26.
- [9] A. Ambrosetti, G. Prodi, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Department of Mathematics, University of Pisa, 1995.
- [10] Sara Pasquali, *The stochastic logistic equation: stationary solutions and their stability*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 106 (2001), p. 165-183.
- [11] H. A Dijkstra, L. M Frankcombeand, A. S von der Heydt, *A stochastic dynamical systems view of the Atlantic Multidecadal Oscillation*, Institute for Marine and Atmospheric Research Utrecht, Department of Physics and Astronomy, Utrecht University, 3508 TC Utrecht, The Netherlands, 29 April, 2008.
- [12] Mustafa Mamat, Zabidin Salleh, Mada Sanjaya WS, Ismail Mohd, *Numerical simulation bidirectional chaotic synchronization FitzHugh-Nagumo neuronal system*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, 2012, no. 38, 1863-1976.