

Miodrag MATELJEVIĆ*

NEKI ASPEKTI TEORIJE POTENCIJALA, VIZUALIZACIJA, VARIJACIONI RAČUN I PRIMENE

Sažetak. Deo teksta je preuzet iz [12]. Glavna tema rada je varijacioni račun i veza sa stacionarnim tačkama funkcionala i parcijalnim jednačinama kao i primena u drugim naukama. Parcijalne jednačine i posebno jednačine matematičke fizike opisuju mnoge pojave iz realnog sveta. Korisno je primetiti da se veći deo teksta može smestiti u zajednički okvir: rešenja eliptičkih jednačina drugog reda u zavisnosti od graničnih uslova, a kao primer navedeno je rešenje Sinaijevog problema.

Rad je podeljen na nekoliko celina:

1. Prvo je dat kratak istorijski pregled ideja i pojmova sa motivacijama iz realnog sveta. Navedene su izjave poznatih ličnosti o matematici i razmatrani pojmovi: granična vrednost, izvod, ekstremne vrednosti, stacionarne tačke, doprinos razvoju funkcionalnog razmišljanja u vezi sa konveksnošću i jednodimenzionalnim kretanjem i inercijski sistemi (jedan zadatak sa PISA testa u vezi sa pojmom konveksnosti), primene metoda vizualizacije na neke matematičke probleme . . . Modifikovan je Arhimedov pristup za izračunavanje površine koju ograničava parabola.

2. U Sekciji 2 dat je dokaz poznate nejednakosti Mihaila Petrovića o konveksnim funkcijama primenom metoda vizualizacije.

3. U trećem delu navedene su neke motivacije za matematičke teorije u realnom svetu, posebno u fizici. Razmatrane su veze između matematičke teorije potencijala i potencijala u elektrostatici: stanje ravnoteže, težnja sistema da zauzme položaj minimalne energije, izoperimetrijske nejednakosti u vezi sa kapacitetom, geometrijske nejednakosti koje uključuju Geringov problem i njihova veza sa logom Internacionalne matematičke unije, itd.

4. U četvrtom delu razmatrani su Dirihleov princip i varijacioni račun u vezi sa minimalnim površima, harmonijska preslikavanja koja su stacionarne tačke funkcionala energije i geometrijske nejednakosti.

Autor je pokušao pristupnu besedu [12] (kao i ovaj rad) da prilagodi i čitaocima (slušaocima) kojima matematika nije osnovna delatnost i da pokaže da problemi kojima se bavi imaju motivaciju u realnom svetu. Takođe, treba napomenuti da su ideje uglavnom samo skicirane.¹

1. KRATAK PREGLED ISTORIJSKOG RAZVOJA IDEJA, ARHIMEDOV PRISTUP I POJAM GRANIČNE VREDNOSTI I IZVODA

1.1. **O matematici.** Možemo kao Gaus govoriti: „*Matematika je kraljica nauka*“, i nadahnuo nastaviti „*Pored jezika i muzike, matematika je jedna od glavnih oblasti stvaralaštva*“. Prava matematika je lepa i istinita. Najznačajniji rezultati u matematici (trijumf ljudskog uma), sadrže ne samo istinu, nego i najveću lepotu.

* Miodrag Mateljević, Matematički fakultet, Studentski trg 16, Beograd, Republika Srbija

¹ Izdavač je ograničio veličinu teksta.

Dobitnik Nobelove nagrade E. Vigner napisao je čuveni esej *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences* iz koga navodimo: *Čini se da je za puno 'objašnjenje' uspeha matematike potrebno više od razumevanja jezika, psihologije, strukture mozga i njegovog delovanja, nego što se u ovom trenutku može zamisliti. Još gore, što za razvoj razumevanja možda treba, zaista mora da treba, nova vrsta i tip matematike. Ipak je važno da analiziramo obim i ograničenja matematike. Takođe, razumno je da takva analiza treba da bude neophodan deo obrazovanja i razmatranja studenta matematike. Od kakve je koristi učenik koji ne zna takve stvari?*

Postoje i druga mišljenja o matematici (možda realnija, ali takva razmatranja izlaze iz okvira ovog rada). Na primer, Albert Ajnštajn je rekao: „Ukoliko se zakoni matematike odnose na stvarnost, oni nisu sigurni, a ako su sigurni, oni se ne odnose na realnost”.

Matematika ima višestruki značaj: važna je u unapređivanju nauke i razumevanju funkcionisanja univerzuma.

Takođe bi trebalo da budemo svesni širokog značaja matematike, i da se napreduje u primeni matematike spektakularnom brzinom. Matematika se odnosi na obrasce i strukture, ona se bavi logičkom analizom, dedukcijom (proces rezonovanja kojim se iz jedne ili više opštih izjava (premissa) dostiže određeni logički zaključak), računanjem u okviru tih obrazaca i struktura. Matematički obrasci se često koriste u veoma različitim oblastima nauke i tehnologije. Matematički obrasci se mogu koristiti da se objasne i kontrolišu prirodna dešavanja i situacije. Matematika ima prodoran uticaj na naš svakodnevni život i doprinosi bogatstvu pojedinca.

1.2. Kratko o odnosu matematike i stvarnosti i specifičnosti matematičara.

Postoji veliki broj rasprava o odnosu matematike i stvarnosti. Kratko spomenimo neka prirodna pitanja. Da li postoji pravougli trougao u realnom svetu? Ako postoji pravougli trougao u realnom svetu, da li važi verzija Pitagorine teoreme za hiperboličku ili euklidsku geometriju? Šta je prava linija u realnom svetu? Neki fizičari smatraju da je prava linija putanja svetlosti i da svetlosni zraci skreću kada prolaze pored Zemlje. Ovakva pitanja ne izučava matematika. U matematici se definišu Rimanove mnogostrukosti i geodezijske linije (ali takvi objekti ne postoje u realnom svetu). Matematika se primenjuje na modele i aproksimacije.

Sve nauke zajedno doprinose napretku znanja o realnom svetu. Smatramo da ljudski um nikada neće razumeti realan svet potpuno.

Naše je gledište da pored drugih metoda i metod vizualizacije se može koristiti u procesu učenja i razmatranja novih problema. U celom tekstu elementi metoda vizualizacije su prisutni, a posebno u Sekciji 1 i 2 skiciramo neke probleme u kojima primenjujemo ovaj metod. Vizualizacija je sposobnost, proces i proizvod stvaranja, interpretacije, upotrebe i razmišljanja o slikama i dijagramima, u našim mislima, na papiru ili pomoću tehnoloških alata, sa svrhom prikazivanja i prenošenja informacija; razmišljanje i razvijanje ranije nepoznatih ideja i unapređenje razumevanja [14].

Postoje i posebne priče o specifičnosti matematičara. Ovde će biti navedena jedna u kojoj je autor učestvovao:

Akademik M. Marjanović postavio je na sajt članak u vezi PISA² testa. Sa kolegom M. Svetlikom objavio sam nekoliko članaka u vezi sa ovom temom. Jednoj

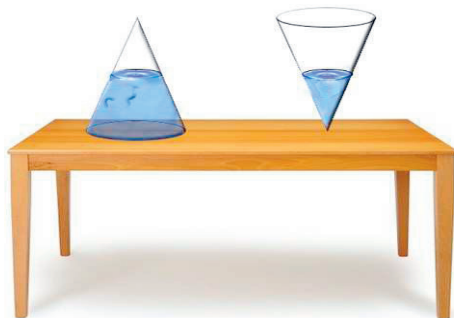
²Programme for International Student Assessment .

elitnoj grupi studenata matematike (treća godina studija) postavio sam zadatak sa PISA testa u kome se voda uliva u posudu u obliku kupe. Učesnici testa zaključuju da voda koja se uliva u posudu formira zarubljenu kupu. Setio sam se nekih situacija iz sopstvenog iskustva: zamislite da ste zakačili dno (vrh) posude pomoću kuke za vratilo i ulivate tečnost. Tečnost ne ostaje u posudi zbog gravitacije. Možda matematičari mogu da promene smer dejstva gravitacije. Šta znači posuda u obliku kupe?

Prava kupa nastaje obrtanjem pravouglog trougla oko ose koja sadrži jednu njegovu katetu. Površ kupe bez baze nastaje obrtanjem hipotenuze pravouglog trougla oko ose koja sadrži jednu njegovu katetu. Površ kupe sa bazom nastaje obrtanjem hipotenuze pravouglog trougla i jedne katete oko ose koja sadrži drugu njegovu katetu. Ako su BC hipotenuza, a AB i AC katete pravouglog trougla ABC i ako rotiramo oko AC , tada je C teme, a AB poluprečnik baze. Smatrao sam da je posuda u obliku kupe bez baze postavljena tako da je teme C na podu i da kupasta površ nema bazu, tj. ima otvor kroz koji se uliva tečnost. Posle odgovora studenata počeo sam da razmišljam. Možda postoje i druge mogućnosti.

Npr. probušite vrh (teme) posude u obliku kupe sa bazom, postavite bazu na pod i ulivajte tečnost. Sada voda koja se uliva u posudu formira zarubljenu kupu (Slika 1). Čudni su putevi matematike (možda postoje neke nadprirodne sile, vrhovne aksiome).

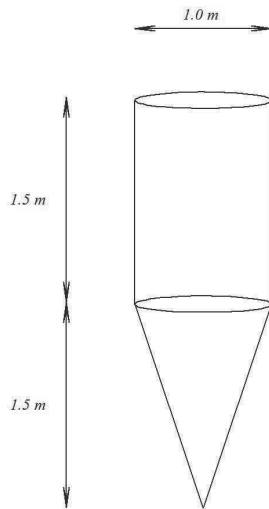
Autor je sa M. Svetlikom objavio nekoliko radova u vezi sa PISA testovima i metodikom nastave matematike.



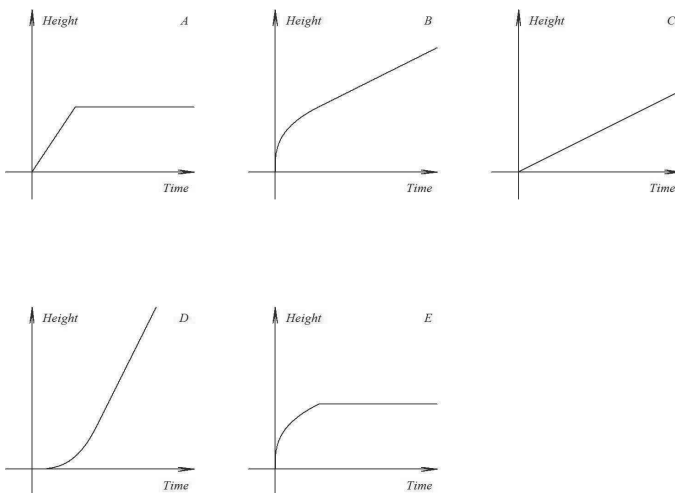
SLIKA 1. Ulivanje tečnosti u posudu oblika kupe

1.3. Doprinos razvoju funkcionalnog razmišljanja u vezi sa konveksnošću i jednodimenzionalnim kretanjem i inercijalni sistemi. U ovoj podsekciji prikazujemo sadržaj slajda M. Mateljević and M. Svetlik [17].

Primer 1. *Rezervoar za vodu ima oblik i dimenzije kao na slici. U početku rezervoar je prazan. Zatim je napunjen vodom, brzinom punjenja od 1 litra u sekundi.*



Koji od sledećih grafika prikazuje kako se visina nivoa vode menja tokom vremena?



1.4. Direktan problem. Pretpostavimo da se tečnost (voda) uliva konstantnom brzinom u rezervoar oblika rotacione površi. Takođe, pretpostavimo da taj proces počinje u trenutku $t = 0$ i završava se u trenutku $t = T$, kada je rezervoar u potpunosti napunjen.

Razmotrimo zavisnost visine nivoa vode u rezervoaru od vremena. Ako sa $h(t)$ obeležimo visinu nivoa vode u trenutku t , funkciju $h : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ nazivamo funkcija visine (*height filling function*).

Neka je $H > 0$ i neka je data funkcija $r : [0, H] \rightarrow \mathbf{R}$, sa sledećim osobinama:

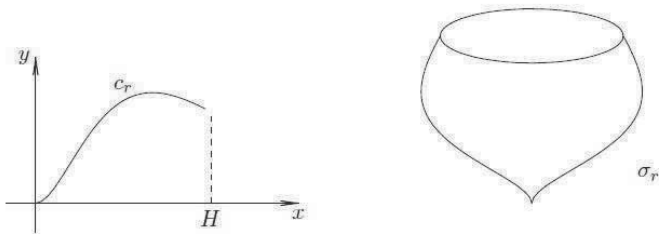
- (r1) r je neprekidna na $[0, H]$ i
- (r2) $r(x) > 0$ za $x \neq 0$.

Rotacijom krive

$$c_r = \{(0, y) : y \in [0, r(0)]\} \cup \{(x, r(x)) : x \in [0, H]\}$$

oko x -ose dobijamo površ σ_r .

Postavimo rezervoar tako da njegova osa rotacije bude u vertikalnom položaju i kroz gornji deo sipajmo tečnost konstantnom brzinom v_0 (u jednakim intervalima vremena uliva se jednaka zapremina tečnosti).



SLIKA 2. Generatrisa rezervoara i rezervoar

Pokazuje se da funkcija h ima sledeće osobine:

(h1) h je strogo rastuća i neprekidna na $[0, T]$;

(h2) $h(0) = 0$;

(h3a) h je neprekidno diferencijabilna na $[0, T]$ i za svako $t \in [0, T]$ važi $h'(t) > 0$ (ako je $r(0) \neq 0$)

ili

(h3b) h je neprekidno diferencijabilna na $(0, T]$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} h'(t) = +\infty$ i za svako $t \in (0, T]$ važi $h'(t) > 0$ (ako je $r(0) = 0$).

Dalje važi

$$h'(t) = \frac{v_0}{\pi r^2(h(t))}$$

i

$$h''(t) = -\frac{2v_0^2 r'(h(t))}{\pi^2 r^5(h(t))}.$$

Korišćenjem poslednje formule, koja važi ako je r diferencijabilna, dobijamo:
 Ako je r rastuća, onda je $r' \geq 0$ i $h'' \leq 0$, odnosno h je konkavna na $(0, T)$.
 Ako je r opadajuća, onda je $r' \leq 0$ i $h'' \geq 0$, odnosno h je konveksna na $(0, T)$.

1.5. Obratan problem. Razmotrimo da li važi obratno tj. ako je data funkcija h sa osobinama (h1),(h2) i (h3a) ili (h3b), da li postoji funkcija r sa osobinama (r1) i (r2) takva da je funkcija h funkcija visine koja odgovara rezervoaru σ_r u koji se uliva tečnost brzinom v_0 ?

Odgovor:

$$r(x) = \sqrt{\frac{v_0}{\pi h'(h^{-1}(x))}}, \quad x \in [0, h(T)].$$

1.6. Uopštenje obratnog problema. Neka je $h : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ funkcija sa sledećim osobinama:

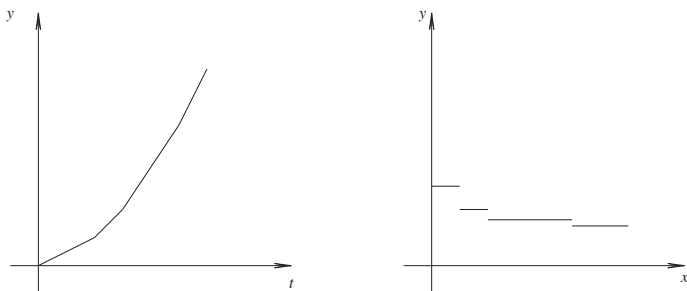
(ch1) h je neprekidna, konveksna i strogo rastuća na $[0, T]$;

(ch2) $h(0) = 0$;

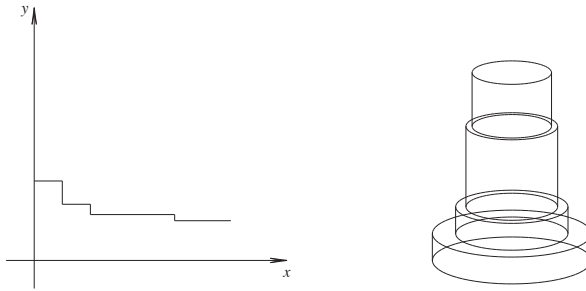
(ch3) $h'_+(0) > 0$ i $h'_-(T) < +\infty$.

Da li za ovu funkciju postoji rezervoar takav da funkcija h bude funkcija visine za taj rezervoar ako se u njega uliva tečnost konstantnom brzinom?

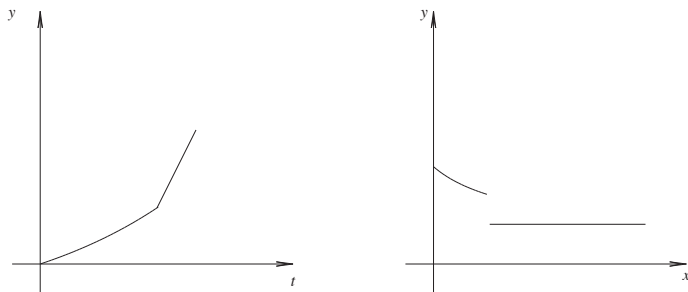
Odgovor: Da, postoji ako proširimo klasu rezervoara.



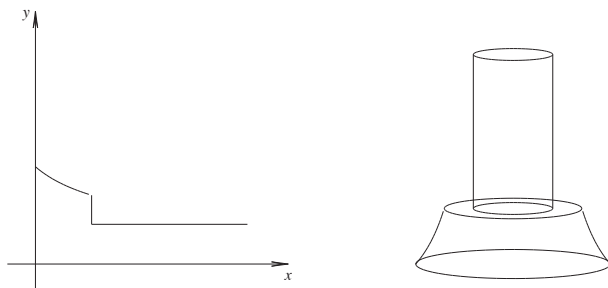
SLIKA 3. Funkcija visine i generatrisa rezervoara



SLIKA 4. Generatrisa rezervoara i rezervoar



SLIKA 5. Funkcija visine i generatrisa rezervoara



SLIKA 6. Generatrisa rezervoara i rezervoar

Primer 2. *Neka je*

$$h(t) = t^2,$$

tada je odgovarajuće

$$r(x) = \sqrt{\frac{v_0}{2\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}.$$

Primetimo da funkcija h ne zadovoljava niti uslov (h3a), niti uslov (h3b), niti uslov (ch3). Sledstveno, odgovarajući rezervoar bi imao dno beskonačne površine, ali konačnu zapreminu.

1.7. Jednodimenzionalno kretanje. Razmotrimo kretanje materijalne tačke duž prave linije (jednodimenzionalno kretanje).

Postoje dve mogućnosti: materijalna tačka se sve vreme kreće u jednom smeru ili menja smer kretanja.

Funkcije kojima opisujemo kretanje:

$x(t)$ pozicija u trenutku t (*position function*);

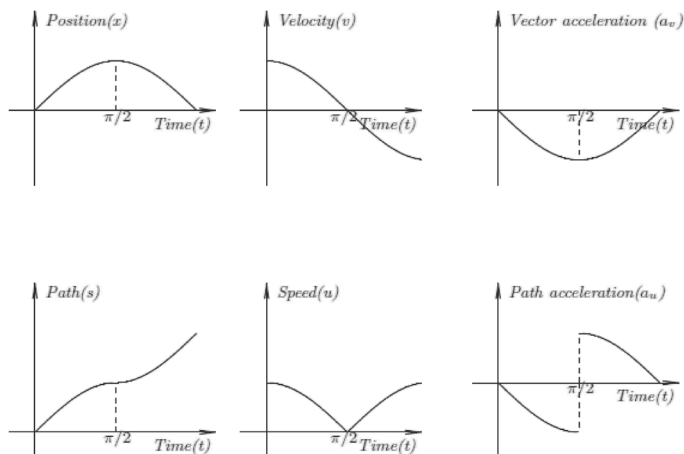
$s(t)$ pređeni put do trenutka t (*path function*);

$v(t) = x'(t)$ brzina u trenutku t (*velocity function*);

$u(t) = s'(t)$ apsolutna vrednost brzine u trenutku t (*speed function*);

$a_v(t) = v'(t)$ ubrzanje u trenutku t (*vector acceleration function*);

$a_u(t) = u'(t)$ brzina promene apsolutne vrednosti brzine u trenutku t (*path acceleration function*).



SLIKA 7. Funkcije kojima je opisano kretanje

Porast visine nivoa tečnosti u rezervoaru možemo videti kao jednodimenziono kretanje tečnosti duž ose rotacije rezervoara.

Pri tome važi:

$$x(t) = s(t) = h(t),$$

$$v(t) = u(t) = h'(t)$$

i

$$a_v(t) = a_u(t) = h''(t).$$

1.8. Primeri, elementi vizuelnog pristupa.

Primer 3 (Kretanje kuglica). *Na kompjuterskom igralištu u obliku pravougaonika $ABCD$ u datom momentu $t = t_0$ počne da se kreće neki broj malih figurica (igrača) istom brzinom 1 cm/s paralelno sa stranicama $AB = CD = 10 \text{ cm}$ u oba smera. Kada neka figurica stigne do stranica BC ili AD uklanja se iz igre. Ako se figurice sudare, onda samo promene smer kretanja.*

Da li će posle 10 s igralište biti prazno?

Numerišimo figurice u datom momentu $t = t_0$ i posmatrajmo njihovo kretanje na dva identična pravougaonika R i R_1 .

Na pravougaoniku R simulirajmo kretanje da izbegnemo sudare, a na pravougaoniku R_1 simulirajmo kretanje tako da ako se figurice sudare razmenimo njihove brojeve. Ovaj proces vizualizacije daje jednostavno rešenje.

U svakom momentu isti brojevi zauzimaju iste pozicije na pravougaonicima; otuda igralište će biti prazno posle 10 s.

U toku mog izlaganja na naučnom simpozijumu (1–4. novembar 2022), M. Marković je postavio pitanje da li se zadatak može rešiti metodom matematičke indukcije. Interesantno je da ovaj metod daje jednostavno rešenje.

Primer 4. *Na beskonačnom putu nalaze se učenik A i B , koji ne vide jedan drugog.*

Učenik A napravi dva koraka dok učenik B napravi jedan korak. Da li učenik A može da stigne učenika B ?

Up: Neka se u početnom momentu A nalazi u koordinatnom početku O i neka je rastojanje između A i B jednako d koraka; neka se kreće oscilatorno i broji ukupan broj koraka. Kada se nađe u koordinatnom početku ako je do tada prešao $2n$ koraka neka predje još $4n$ koraka u istom pravcu i onda promeni smer kretanja. Za to vreme B prelazi $(2n + 4n)/2 = 3n$ koraka; za dovoljno veliko n , $4n > d + 3n$.

Neka je prešao $2n_k$ od početka do momenta kada se k put ponovo vrati u koordinatni početak; za dovoljno veliko k , $4n_k > d + 3n_k$.

Primer 5. *Na beskonačnoj kvadratnoj mreži nalaze se pauk i muva. Kreću se naizmenično tako što pauk napravi dva koraka dok muva napravi jedan korak. Korak je prelazak sa jednog čvora mreže na susadni čvor. Pauk može da vidi horizontalno i vertikalno.*

Da li pauk može da stigne muvu?

Uputstvo. Neka se u početnom momentu pauk P nalazi u koordinatnom početku O i muva m ima koordinate (m_1, m_2) ; zamislimo da je m_1 projekciju muve na x -osi i razmotrimo pomoćni problem: Da li pauk može da stigne projekciju muve na x -osi? Napomenimo da pauk ne vidi projekciju muve na x -osi, sem ako se muva nalazi na x -osi.

- 1) *Na osnovu Primera 4, posle konačno koraka P stiže projekciju muve (neka je rastojanje između njih u tom momentu d_1) i onda nastavlja da se kreće vertikalno duž pravca L_1 u smeru prema muvi.*
- 2) *Posle konačno koraka P stiže projekciju muve na pravac L_1 (neka rastojanje između njih u tom momentu d_2).*

Na osnovu Primera 4, posle konačno koraka P stiže projekciju muve (neka je rastojanje između njih u tom momentu d_1) i onda nastavlja da se kreće vertikalno duž pravca L_1 u smeru prema muvi. Onda nastavlja da se kreće horizontalno duž pravca L_2 prema muvi; proveriti $d_1 > d_2$, itd.

Primer 6 (Površina kupe i torusa). Površina kupe je $P = \pi r s$, gde je s dužina izvodnice, a r poluprečnik.

Zašto se kupa može razrezati a zatim „razviti“ u ravni u kružni isečak dužine luka $l = 2\pi r$ poluprečnika $R = s$? Ovaj proces vizualizacije treba objasniti.

U analizi 2 definišemo površinu površi npr. u 3-prostoru.

Neka je površ S zadata jednačinom $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, gde je D dopustiva oblast i $f \in C^1(\bar{D})$.

Tada je

$$P = \int_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy,$$

gde je $p = \partial_1 f$ i $q = \partial_2 f$.

Npr. rotacijom duži $z = kx$, $0 \leq x \leq r$, oko z -ose dobija se kupa $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in B_r$, gde je B_r krug.

Ako je h visina kupe, a s dužina izvodnice, dobija se

$$h = kr, \quad s^2 = r^2 + h^2, \quad \sqrt{1 + k^2} = s/r, \quad i$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + k^2} = s/r. \quad \text{Otuda}$$

$$P = \int_{B_r} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy = \pi \sqrt{1 + k^2} r^2 = \pi r s.$$

Neka je kupa K zadata sa $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$ i neka je kružnica C_r presek kupe i ravni $z = r$. Da li je C_r geodezijska linija na K ?

Površina zarubljene kupe je $P = \pi(r + R)s$.

Neka kupa K_1 sa temenom A ima izvodnicu dužine s_1 , a R poluprečnik i neka kupa K_2 sa temenom A , koja je deo kupe K_1 , ima izvodnicu dužine s_2 , a r poluprečnik i neka je

$$P_1 = \pi R s_1, \quad P_2 = \pi r s_2, \quad s_1 = s + s_2, \quad s_1/s_2 = R/r; = k;$$

$$\text{otuda } s = (k - 1)s_2, \quad R s_1 = k^2 r s_2 \quad i$$

$$P = P_1 - P_2 = \pi(k^2 - 1)r s_2 = \pi(k + 1)r s = \pi(r + R)s.$$

Torus je obrtna površ koja se dobija rotacijom kružnice u trodimenzionom prostoru oko ose komplanarne sa tom kružnicom i nema zajedničkih tačaka sa njom.

Na primer, u xz -ravni data je kružnica K_1 : $(x - R)^2 + z^2 = r^2$. Rotacijom kružnice oko z -ose dobijamo torus. Torus lako definišemo u parametarskom obliku. Neka je M tačka na torusu i v ugao između vektora RM i x -ose. Ako je v fiksirano tačka M opisuje kružnicu K_v poluprečnika $R' = R + r \cos v$. Projekciju K_v^z kružnice K_v na xy -ravan opisujemo na uobičajen način pomoću parametra u : $x = R' \cos u$ i $y = R' \sin u$. Otuda $x(u, v) = (R + r \cos v) \cos u$, $y(u, v) = (R + r \cos v) \sin u$, $z(u, v) = r \sin v$ gde su u, v parametri (u intervalu $[0, 2\pi)$), R rastojanje od središta cevi torusa do središta torusa r poluprečnik cevi torusa.

Površina torusa jednaka je

$$P = 4\pi^2 R r = (2\pi r) (2\pi R)$$

Zapremina torusa jednaka je

$$V = 2\pi^2 R r^2 = (\pi r^2) (2\pi R).$$

Neka je K_2 kružnica koja se dobija rotacijom tačke $(r, 0, r)$ oko z -ose. K_2 se opisuje jednačinom $x^2 + y^2 = R^2, z = r$. Formula za površinu torusa navodi na pomisao da se torus može razrezati (npr. duž kružnica K_1 i K_2) a zatim „razviti“

u ravni u pravougaonik sa stranicama $2\pi r$ i $2\pi R$. Da li je preslikavanje $f(M) = (Ru, rv)$ izometrija?

Primer 7. Neka je kugla sladoleda dijametra $d = 4$ cm i kornet u obliku kupe čija je baza dijametra $d_1 = 4$ cm i visine $H = 10$ cm. Kada se kugla istopi koji deo zapremine korneta zauzme?

Razmotriti slučaj $d > d_1$.

Kako je $V_0 = 4\pi R^3/3$ i $V_1 = \pi R^2/3$, dobija se $V_0/V_1 = 4R/H$. Otuda za $R = 2$ cm, nalazimo $V_0/V_1 = 4R/H = 8/10 = 0,8$. Dakle, odgovor je 80%.

Objasniti da ako se kugla stavi prirodno na kornet sladoled ne curi van korneta.

Neka je $H > R > 0$, $0 < h_1 < H$, $0 < r_1 < R$, $M = (-r_1, h_1)$, $N = (r_1, h_1)$, K kružnica sa središtem u $P = (0, H)$ i poluprečnika R , O presek tangenti l_1 i l_2 na K kroz M i N , A presek l_1 sa $x = -R$ i B presek l_2 sa $x = R$. Rotacijom trougla OAB i K oko y -ose dobija se sfera koja tangira kupu.

1.9. Arhimedov pristup. U geometriji se definiše površina figura kao što su trougao, pravougaonik i mnogougao. Ako imamo neku figuru koja se može rastaviti na konačan broj trouglova (takve figure nazivaju se elementarne), tada je njena površina jednaka zbiru površina trouglova (aditivnost površine).

Za pozitivnu funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \geq 0\}$ definišemo ordinatni skup nad $[a, b]$ sa $\text{Ord}(f) = \{(x, y) : a < x < b, 0 < y < f(x)\}$.

Prirodno je postaviti sledeće pitanje:

- i) Arhimedov problem. Šta je površina P figure ordinatnog skupa funkcije $y = x^2$ nad $[0, 1]$ (površina parabole)?
- ii) Ili, uopšte, šta je površina skupa $\text{Ord}(f)$ pozitivne funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$?

Kako ordinatni skup parabole nije elementaran i ne može se rastaviti na konačan broj trouglova, potrebno je prvo definisati pojam površine za ovakve figure.

Ako smo familijarni sa integralima, možemo dati jednostavan odgovor za Arhimedov problem:

$$P = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{3}.$$

Pokušajmo da objasnimo rhimedovu ideju za izračunavanje površine parabole. Arhimed nije, naravno, znao integrale, ali ideja koju je primenio vodi definiciji integrala. Pokušajmo da rekonstruišemo Arhimedov pristup, koristeći pojam granične vrednosti. U vreme kada je Arhimed radio, nije postojao jasan pojam limesa, ali je razmatranja koja slede obrazložio tada dostupnim metodama.

Podelimo interval $[0, 1]$ tačkama $x_k = \frac{k}{n}$, $0 \leq k \leq n$. Neka je P_k pravougaonik $[x_{k-1}, x_k] \times [0, f(x_k)]$ i

$$(1.1) \quad S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Pokažimo da $S_n \rightarrow \frac{1}{3}$, kad $n \rightarrow \infty$, tj. da je površina figure ordinatnog skupa funkcije $y = x^2$ nad $[0, 1]$ jednaka $\frac{1}{3}$.

Iz (1.1) sledi

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = T_n \frac{1}{n^3},$$

gde je $T_n = \sum_{k=1}^n k^2$.

Kako je

$$T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

nalazimo $S_n = \frac{a_n b_n}{6}$, gde je $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ i $b_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)$.

Kako $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, na osnovu pravila za limes zbira i proizvoda, zaključujemo $a_n \rightarrow 1$, $b_n \rightarrow 2$ i $a_n b_n \rightarrow 2$. Dakle, S_n teži ka $\frac{1}{3}$, kada n teži ∞ .

Po analogiji možemo pokušati da izračunamo površinu kruga i zapreminu lopte.

1.9.1. *Zapremina piramide.* Zapremina piramide P čija je baza B i visina h jednaka je $V = \frac{1}{3}h|B|$.

Neka je baza B piramide P u ravni $z = h$, $h > 0$, a vrh u koordinatnom početku i neka je $B(t)$ presek piramide sa ravni $z = t$. Tada je $|B(t)| = \frac{t^2}{h^2}|B|$. Koristeći integrale, nalazimo $V = \int_0^h |B(t)| dt = h^{-2} \int_0^h t^2 dt$. Otuda je $V = \frac{1}{3}h|B|$.

Pokušajmo da sledimo Arhimeda:

Podelimo interval $[0, h]$ tačkama $z_k = h\frac{k}{n}$, $0 \leq k \leq n$. Neka je $B_k = B(z_k)$, D_k projekcija B_k na xy -ravan, C_k prizma $D_k \times [z_{k-1}, z_k]$ i

$$V_n = \sum_{k=1}^n |C_k| = \sum_{k=1}^n |D_k|(z_k - z_{k-1}).$$

Kako je $z_k - z_{k-1} = \frac{h}{n}$ i

$$|D_k| = \frac{z_k^2}{h^2}|B| = \left(\frac{k}{n}\right)^2 |B|,$$

nalazimo

$$V_n = \sum_{k=1}^n |C_k| = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 |B| \frac{h}{n} = h|B|T_n \frac{1}{n^3},$$

gde je $T_n = \sum_{k=1}^n k^2$. Otuda $V_n \rightarrow V_0$, gde je $V_0 = \frac{1}{3}h|B|$ zapremina piramide.

Teorija integrala, preko tablice, daje nam gotove rezultate tako da ne treba da računamo komplikovane limese nizova. Drugo je pitanje da li i koliko razumemo teoriju.

Dalji razvoj Arhimedove ideje omogućava da izračunamo površine kupe, piramide i torusa. Takođe, mogu se razmatrati pojam integrala i primitivne funkcije kao i nejednakosti vezane za obim i površinu figura (izoperimetrijski problem).

1.10. Izvod funkcije. Izvod funkcije jedan je od osnovnih pojmova infinitezimalnog računa i zasniva se na pojmu granične vrednosti funkcije u tački. Nastao je u 17. veku u vezi sa problemima u matematici i fizici (na primer, da se definišu tangenta, trenutna brzina, itd.), a ima značajne primene u matematičkim naukama, fizici, ekonomiji, itd.

Rasprava između Njutna i Lajbnica oko toga kome treba pripisati otkriće izvoda počinje 1699. godine, a kulminaciju dostiže 1711. godine. Njutnov argument je da je na pojmu izvoda počeo da radi još 1666. godine, međutim, svoja istraživanja nije objavio sve do 1704. godine. Kasnije postaje jasno da su Njutn i Lajbnic došli do istog rezultata, koristeći različitu notaciju i ispitujući različite probleme. Tokom godina su učenici sa obe strane iznosili nove argumente, ali rasprava o prioritetu nikada nije razrešena, pa se obojici naučnika pripisuje zasluga za konačno formiranje i povezivanje pojmova integrala i diferenciranja.

Potreba za izvodom funkcije javila se prilikom pokušaja da se pronađe univerzalni način za određivanje tangente krive u geometriji i brzine kretanja u mehanici.

Vrednost količnika promene pređenog puta i promene vremena je srednja brzina. Trenutna brzina je granična vrednost količnika promene puta i promene vremena, kada promena vremena teži nuli. Ako posmatramo kretanje na pravolinijskom putu i sa x označimo pređeni put za vreme t , u tx -koordinatnom sistemu kretanje možemo predstaviti pomoću funkcije $x = x(t)$ (koristi se i oznaka $x = s(t)$). Brzina u tački t_0 je izvod funkcije $x = x(t)$ u tački t_0 (oznaka $v = x'(t_0)$) u fizici se koristi i $\dot{x}(t_0)$, a $k = x'(t_0)$ je koeficijent pravca tangente.

Ubrzanje je promena brzine po vremenu.

Dakle, ubrzanje pokazuje koliko „brzo” se menja brzina posmatranog tela ili čestice. Stoga, ubrzanje a je prvi izvod brzine po vremenu, odnosno drugi izvod položaja po vremenu, tj. važi $a = \dot{v} = \ddot{s}$.

Izvod funkcije $f(x)$ u tački a se definiše kao:

$$f'(a) := f'(x)|_{x=a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x},$$

ukoliko limes postoji. Inače, izvod u datoj tački a možemo shvatiti i kao linearni operator, koji aproksimira funkciju u okolini tačke a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a), \quad x \rightarrow a.$$

Ako je $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkcija više promenljivih i $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, funkciji f pridružimo funkciju jedne promenljive $g(t) = f(t, a_2, \dots, a_n)$.

Vrednost $g'(a_1)$ nazivamo parcijalni izvod funkcije f po promenljivoj x_1 u a i označavamo sa $D_1 f(a)$. Gradijent funkcije f u tački a označavamo i definišemo sa $\nabla f(a) = (D_1 f(a), \dots, D_n f(a))$.

Postupak pronalaženja izvoda funkcije se naziva diferenciranjem. Diferenciranje je proces obratan u odnosu na integraciju.

Ako su vrednosti funkcije realni brojevi, tačke lokalnog minimuma i maksimuma se zajedno zovu lokalni ekstremi.

Tačka x_0 sa osobinom da je $f'(x_0) = 0$ naziva se stacionarna tačka.

1.10.1. Brzina i ubrzanje. Za ilustriranje početnih veza između matematike i fizike korisno je skicirati definicije pojmova – trenutna brzina i trenutno ubrzanje pomoću pojma izvoda funkcije (koji je jedan od osnovnih pojmova infinitezimalnog računa i zasniva se na pojmu granične vrednosti funkcije).

U fizici i tehničarima ponekad se navodi „jednostavna“ (neki kažu „fizička“) definicija da je vektor veličina koja ima intenzitet (nenegativna brojna vrednost), pravac i smer (koji se u trodimenzionom prostoru mogu pokazati prstom).

Koriste se razni opisi vektora. Na primer, u srednjoškolskim udžbenicima često piše: „vektor ima intenzitet, pravac i smer“. Na fakultetima, u matematici, koristi se apstraktna definicija: „vektorski prostor (VP) je skup čije elemente nazivamo vektorima (vektor je element VP)“. U realnom VP su definisane dve operacije: sabiranje vektora i množenje vektora skalarom (realnim brojem), koje imaju osobine koje odgovaraju pojmu vektora u realnom svetu.

U svakodnevnom govoru, reč brzina često označava samo vrednost (intenzitet) brzine (*speed*). Nasuprot tome, u fizici reč brzina označava vektor brzine (*velocity*).

Pretpostavimo da razmatramo pravolinijsko kretanje čestice u jednom smeru.

Vrednost količnika promene pređenog puta i promene vremena je srednja brzina. Trenutna brzina je granična vrednost količnika promene pređenog puta i promene vremena, kada promena vremena teži nuli. Dakle, ako posmatramo jednosmerno kretanje na pravolinijskom putu i sa x označimo pređeni put za vreme t (t označava vreme, računajući od nekog početnog trenutka ili položaja), u tx -koordinatnom sistemu kretanje možemo predstaviti pomoću funkcije $x = x(t)$ (koristi se i oznaka $x = s(t)$).

Kako da definišemo brzinu u određenom momentu t_0 ? Ako je $t > t_0$ srednja brzina na intervalu $[t_0, t]$ je

$$v_{pr} = v_{pr}(t, t_0) = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}.$$

„Prava“ brzina (trenutna brzina) u t_0 ne zavisi od vremenskog intervala jer se dobija, kako se to popularno kaže, njegovim zamišljenim skraćivanjem na „beskonačno mali interval“ oko određenog trenutka t_0 .

Preciznije, ako postoji, granična vrednost $v_{pr}(t, t_0)$ kada t teži t_0 , naziva se brzina i označava se sa $v = v(t_0)$. Dakle, brzina je izvod funkcije $x = x(t)$ u tački t_0 (oznaka $v = x'(t_0)$ u fizici se koristi i $\dot{x}(t_0)$).

Opštije, pretpostavimo da je kretanje materijalne tačke u nekom referentnom sistemu (koje ne mora biti pravolinijsko) zadato sa $\vec{r} = \vec{r}(t)$, gde t označava vreme, računajući od nekog početnog trenutka ili položaja, a $\vec{r}(t)$ vektor položaja. Ako sa s označimo funkciju $s(t)$ koja je pređeni put (dužina pređenog puta) do trenutka t , vrednost brzine je izvod puta po vremenu: $v = s'(t)$.

Ako u trenutku t tačka ima položaj $\vec{r}(t)$, ona će se nakon vremenskog intervala Δt pomeriti u položaj $\vec{r}(t + \Delta t)$. Promena položaja (ili pomak) tačke tokom tog vremenskog intervala je vektor $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$, koji se dobija oduzimanjem prvog vektora položaja od drugog. Deljenjem vektora promene položaja $\Delta\vec{r}$ sa odgovarajućim vremenskim intervalom Δt dobije se prosečni vektor brzine u tome intervalu:

$$\vec{v}_{pr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Da bi se dobio trenutni vektor brzine (kraće: brzina), treba koristiti izvod (kao i kod definicije intenziteta brzine): $\vec{v} = \vec{r}'(t)$.

Ubrzanje se može definisati slično kao brzina. Vrednost količnika promene brzine i promene vremena je srednje ubrzanje.

Trenutno ubrzanje je granična vrednost količnika promene brzine i promene vremena, kada promena vremena teži nuli. Dakle, ubrzanje pokazuje koliko „brzo“ se

menja brzina posmatranog tela ili čestice. Stoga, ubrzanje a je prvi izvod brzine po vremenu $a = \dot{v}$, odnosno drugi izvod položaja po vremenu $a = \ddot{s}$.

U fizici je ubrzanje vektorska veličina, izvod brzine po vremenu (koja je isto vektor). U nekim situacijama, međutim, koristi se reč ubrzanje da označi samo intenzitet vektora ubrzanja, ako je iz konteksta jasno o čemu se radi, npr. kod pravolinijskog kretanja.

Preciznije, označimo sa $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$ promenu brzine od trenutka t_1 do trenutka t_2 , a sa $\Delta t = t_2 - t_1$ vremenski interval (proteklo vreme) između ta dva trenutka. Srednje ubrzanje na vremenskom intervalu $[t_1, t_2]$ je

$$\vec{a}_{pr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Nasuprot tome, „pravo“ ubrzanje (trenutno ubrzanje) ne zavisi od vremenskog intervala jer se dobija njegovim zamišljenim skraćivanjem na „beskonačno mali interval“ oko određenog trenutka. Postupak se uopšte (u različitim primenama) naziva graničnim prelazom i precizno definiše pomoću pojma izvoda. Dakle, ubrzanje je izvod brzine po vremenu:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Simbol \vec{a} označava ubrzanje (a je prvo slovo reči akceleracija koja je latinskog porekla), simbol \vec{v} označava brzinu; i jedna i druga veličina su funkcije vremena t (što se podrazumeva, pa se ne mora eksplicitno navesti). Ubrzanje opisuje kako se brzo i u kom smeru menja brzina u određenom trenutku. Budući da je brzina vektorska veličina koja može menjati i vrednost i smer, ubrzanje istovremeno opisuje i jednu i drugu promenu. No, one se mogu razdvojiti tako da se zasebno razmatraju tangencijalno i normalno ubrzanje.

Analiza kretanja u dinamici često polazi od Drugog Njutnovog zakona, koji (u nerelativističkoj aproksimaciji) glasi „suma sila jednaka je proizvodu mase i ubrzanja“ (tj. $\sum \vec{F} = m\vec{a}$). Odatle se, iz sila koje deluju na materijalnu česticu, jasno dobija ubrzanje čestice. Potom se iz ubrzanja, brzina čestice računa integracijom:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a} dt$$

gde je \vec{v}_0 brzina u trenutku t_0 (tzv. početna brzina). Iz brzine se može odrediti jednačina putanje ili pređeni put. Ako se umesto materijalne tačke razmatra telo, navedena razmatranja odnose se na kretanje njegovog centra masa.

2. VIZUALIZACIJA I MODELIRANJE MATEMATIKE

U ovoj sekciji je skiciran dokaz nejednakosti Mihaila Petrovića korišćenjem vizualizacije konveksnih funkcija. Pristup je zasnovan na radu [10] u kome je dat doprinos razvoju funkcionalnog razmišljanja u vezi pojma konveksnosti. Interesantno je da je klica ovog rada jedan zadatak višestrukog izbora iz PISA testa. Uopštavajući ovaj zadatak razmatra se veza između oblika rezervoara za vodu (posude) u koji se voda uliva konstantnom brzinom i grafika funkcije koja pokazuje kako se visina vode u rezervoaru za vodu menja kao funkcija vremena. Ako u momentu t označimo sa $h(t)$ visinu vodenog stuba onda h nazivamo funkcijom visine (ulivanja).

Neka je posuda P_r nastala rotacijom grafika funkcije $x = r(z)$, $0 \leq z \leq H$ oko z -ose i pretpostavimo da je negativna orijentacije z -ose u smeru teže i da je dno posude u obliku kruga poluprečnika $r_0 = r(0)$.

U [10] je dokazano da se konveksna funkcija na $[0, T]$ može interpretirati kao funkcija visine (ulivanja) u posudu koja ima oblik rotacione površi definisane pomoću nerastuće funkcije $r : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$.

2.0.1. Petrovićeva nejednakost za konveksne funkcije.

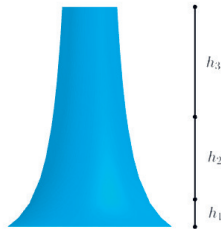
Teorema 1 (Petrovićeva nejednakost za konveksne funkcije).

Neka je $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija i neka su t_1, t_2, \dots, t_n pozitivni brojevi. Tada važi sledeća nejednakost

$$h(t_1) + \dots + h(t_n) \leq h(t_1 + \dots + t_n) + (n - 1)h(0).$$

Ponovimo, funkcija h se može interpretirati kao funkcija visine punjenja posude V , koja ima oblik rotacione površi P_r , gde je $r : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ nerastuća funkcija.

Korak 1. Neka je $h_1 = h(t_1), \dots, h_n = h(t_n)$ i $H = h_1 + \dots + h_n$. Formirajmo posudu V koja odgovara funkciji h i čija je visina H (Slika 8).



SLIKA 8. Posuda V koja odgovara funkciji h

Korak 2. Uzmimo n kopija posude V (videti Sliku 9 za $n = 3$) i isecimo ih na visinama h_1, \dots, h_n . Time dobijamo posude V_1, \dots, V_n (Slika 10).

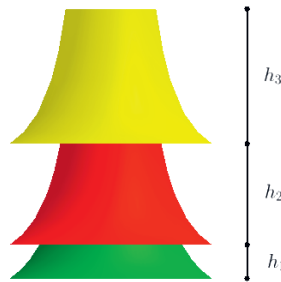


SLIKA 9. Tri kopije posude V



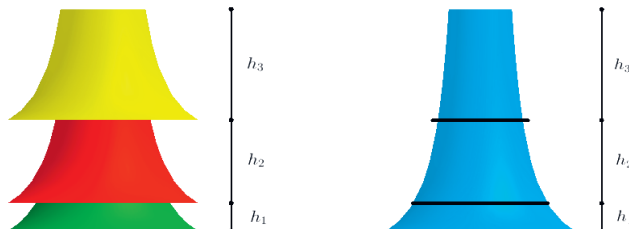
SLIKA 10. Posude V_1 , V_2 i V_3

Korak 3. Isecanjem delova baza ovih posuda, dobijamo novu posudu V' (Slika 11).



SLIKA 11. Posuda V'

Korak 4. Pretpostavimo da u istom trenutku počnemo da punimo obe posude V i V' (Slika 12). Kako je $r : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ nerastuća funkcija, zapremine odgovarajućih delova posude V manje su od zapremina odgovarajućih delova posude V' . Stoga, posuda V će se prva napuniti i otuda sledi Petrovićeva nejednakost (ostavljamo čitaocu da popuni detalje).

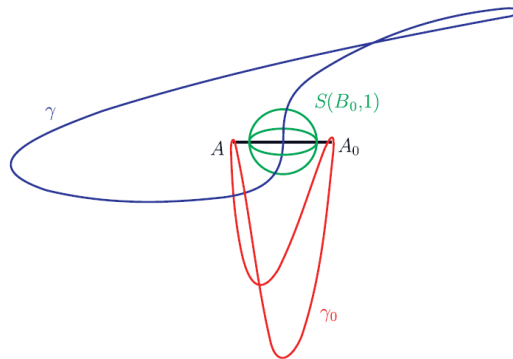


SLIKA 12. Posude V' i V

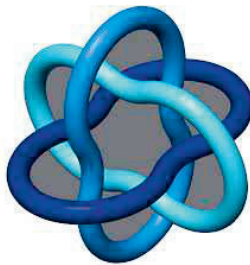
2.0.2. *Geringov problem.* Navedimo samo jedan specijalni izoperimetrijski problem (Geringov problem). Ovaj problem autor je rešio i objavio 1975. godine (Uopštenje je objavio 2015. godine.):

Teorema 2. *Ako su γ i γ_0 ulančane krive u \mathbb{R}^3 na rastojanju 1, dokazati da je dužina svake od ovih krivih najmanje 2π .*

Rešenje ovog problema ima veze sa logom IMU³ (videti slike 13 i 14; takođe, videti i Borominov prsten).



SLIKA 13. Rešenje Geringovog problema



SLIKA 14. IMU logo

3. NJUTNOV ZAKON I KULONOV ZAKON

3.1. **Njutnov zakon.** Drugi Njutnov zakon glasi: „Intenzitet sile koja pokreće telo jednak je proizvodu mase tela i ubrzanja koje telo dobija delovanjem te sile”, tj. $F = ma$, gde je F sila koja pokreće telo i daje mu ubrzanje, m masa tog tela i a ubrzanje koje telo dobija delovanjem te sile. Ubrzanje tela srazmerno je spoljašnjoj sili koja deluje na telo i obrnuto srazmerno njegovoj masi. Smer ubrzanja je u smeru ukupne sile koja deluje na telo.

³Internacionalna matematička unija.

Njutnov zakon o opštoj univerzalnoj gravitaciji ima sledeću formulaciju: Svako materijalno telo u Vasioni privlači drugo telo silom koja deluje u pravcu prave koja spaja tela (preciznije centre masa), intenziteta srazmernog proizvodu masa tela, a obrnuto srazmernog kvadratu rastojanja. Dakle, intenzitet sile je

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

gde je G univerzalna gravitaciona konstanta (po Gausu).

U nameri da damo precizniju formulaciju pretpostavimo da su x i y respektivno središta prvog i drugog tela, $\vec{r} = \overrightarrow{xy}$, $r = |\vec{r}|$ međusobna udaljenost između tela (m), i $\mathbf{r}_0 = \vec{r}/|\vec{r}|$. Označimo sa \vec{F}_1 silu kojom drugo telo dejstvuje na prvo i sa \vec{F}_2 silu kojom prvo telo dejstvuje na drugo. Tada je

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \mathbf{r}_0,$$

gde je G univerzalna gravitaciona konstanta koja otprilike iznosi $6,67428 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}$, m_1 masa prvog tela (kg), m_2 masa drugog tela (kg).

U literaturi se ponekad sila označava bez strelice i tvrdi da važi $F = F_1 = F_2$, gde je F uzajamna sila privlačenja između dva tela. Preciznije je reći da su intenziteti uzajamnih sila privlačenja između dva tela jednaki.

Tako, Danilo P. Rašković u svom udžbeniku Dinamika, iz 1948. godine, piše da je ovaj Njutnov zakon gravitacije uneo mnogo poleta u naučna dokazivanja istina o kretanju nebeskih tela i citira da se o njegovoj važnosti najlepše izrazio velikan naše nauke Milutin Milanković: *Tako se Njutnov zakon najvećanstveniji što ga je ikad smrtni čovek mogao da dokuči, pokazao kao opšti zakon prirode kome se pokorava cela Vasiona.* I Veljko A. Vujičić u svojoj monografiji Preprincipi mehanike, iz 1998. godine, takođe citira našeg genijalnog naučnika Milutina Milankovića sledećim rečenicama: *Njutnovim zakonom posta odgonetnuta hiljadugodišnja zagonetka planetskog kretanja i nova saznanja sledovaše, sama od sebe iz njega. Sve nejednakosti kretanja planeta i Meseca ispoljiše se kao prirodna posledica toga zakona, kao i jasni izražaj međusobnog privlačnog dejstva tih nebeskih tela. Ne samo da je tim priroda tih nejednakosti postala rastumačena: one su se mogle izračunavati i pratiti i u prošlost i u budućnost. Pokazalo se i za komete, ubrzo iza postavljenja Njutnovog zakona, da on važi za sva nebeska tela bez izuzetka, dakle i izvan Sunčevog sistema. Precesija ravnodnevnica, koju je, kao što smo čuli, prvi konstatovao Hiparhos, našla je Njutnovim zakonom svoje potpuno razjašnjenje, a isto tako kasnije opažena rotacija Zemljine ose. I oblik naše Zemlje, a naročito njena spljoštenost usled rotacije dobi, u svim pojedinostima, mehaničko i geometrijsko obrazloženje. To isto važi i za prastaro pitanje o postanku morske plime, koja se pokazala kao neposredna posledica privlačnog dejstva Sunca i Meseca. Zahvaljujući ovom Njutnovom zakonu iznikla je jedna nova nauka - Nebeska mehanika.*

Postoje razlike u metodama provere neke teorije u matematici i naukama koje se bave realnim pojavama. Sa matematičke tačke gledišta može se postaviti pitanje da li se masa definiše pomoću sile i obrnuto (pomoću Njutnovog zakona) i da li se može postići napredak u vezi ovog pitanja.

Osvrnimo se kratko na razvoj nauke i nove teorije koje su se pojavile posle Njutna.

a) Danas se smatra da Njutnovi zakoni važe samo u klasičnoj mehanici, gde je brzina kretanja tela relativno mala u odnosu na brzine svetlosti, a masa tela znatno veća od mase atomskih delova (elektrona, protona i neutrona). U slučaju

izuzetno velikih brzina, uporedivih sa brzinom svetlosti, ili izuzetno malih masa, uporedivih sa masom atoma, pojavljuju se drugi efekti koji se precizno opisuju zakonima kvantne mehanike i relativističke fizike.

b) Teorija relativnosti koju je razvio Albert Ajnštajn (1905. godine) ne prihvata pojam apsolutnog vremena, koji je na prvi pogled potpuno logičan. Da bi se uporedilo vreme između dva događaja, koji mere dva posmatrača u različitim referentnim sistemima, potrebno je koristiti neki signal. Jedini mogući način u realnom svetu je upotreba svetlosnog signala. No kako je brzina svetlosti konstantna i nezavisna od referentnog sistema, Ajnštajn je pokazao da vreme mora zavisiti od referentnog sistema. Vreme je, a prema tome i pojam istovremenosti dva događaja, relativno. Tretirajući vreme kao promenljivu ekvivalentnu prostornim promenljivim, Ajnštajn je, sledeći put na koji je ukazao Herman Minkovski, izgradio pojam četvorodimenzionog prostora – prostorno vremenskog kontinuuma. Geometriju takvog prostora određuje materija, a gravitacija je samo posledica geometrije fizičkog prostora. Drugim rečima, gravitacija je samo posledica činjenice da kontinuum prostor-vreme nije ravan, nego zakrivljen. Čestica materije ubačena u svemir ne bi se kretala po pravoj liniji, kako sledi iz Njutnove jednačine, nego po tzv. geodezijskoj liniji, koja fizički predstavlja (vremenski) najkraći put između bilo koje dve tačke u svemiru. Svetlosni zraci takode se ne šire pravolinijski, nego se i oni savijaju u gravitacionom polju (gravitacijske leće).

v) U savremenoj fizici kvantna mehanika se primenjuje na mikronivou. Teorija relativiteta i kvantna mehanika su dve fundamentalno različite teorije sa potpuno različitim formulacijama i prema sadašnjem razumevanju nekompatibilne teorije realnosti. Za razliku od teorije relativiteta, stvarnost na koju se odnosi kvantna mehanika sačinjena je od kvantnih skokova. Ishodi događaja nisu određeni i opisuju se pomoću verovatnoće. Kretanje subatomske čestice nije neprekidno.

g) Teorija struna je prvi pokušaj da se ujedine ove dve teorije. Pogodno je u fizici koristiti modele u kojima se najsitnije, elementarne čestice razmatraju kao bezdimenzione tačke u prostoru i predstavljaju pomoću koordinata. Obično zamišljamo, npr. elektron kao tačku bez unutrašnje strukture. Osnovna ideja teorije struna je: sve te različite „osnovne” čestice u standardnom modelu su samo različite manifestacije jednog osnovnog objekta – strune. Supersitne strune su dužine od oko 10^{-35} metara (npr. proton je 100 milijardi puta veći od tih struna). Po teoriji struna, koja je nastala šezdesetih godina, najsitnije, elementarne čestice (elektroni, kvarkovi, hadroni, bozoni, fermioni...) imaju prirodu jednodimenzionih struna. Na primer, prema teoriji struna elektron je sićušna petlja strune koja može da osciluje na različite načine i da se ponaša kao foton ili kvark ili graviton. Univerzum je sačinjen od elemenata koji vibriraju, čije ponašanje je slično ponašanju zategute žice u prostoru. Oscilovanje elementarnim česticama daje naelektrisanje, masu i spin.

Mnogi teorijski fizičari veruju da je teorija struna korak napred u shvatanju fundamentalnog opisa prirode, mada je eksperimentalno izuzetno teško proveravati predviđanja ove teorije. Istraživači u oblasti teorijske fizike proučavaju matematiku na kojoj se bazira teorija struna i kvantna teorija polja. To uključuje primenu najnovijih matematičkih disciplina, kao što je nekomutativna geometrija, ali takode uključuje razvoj i proučavanje nove matematike koja je potrebna za dalji razvoj teorije.

d) O suštini Faradejevih ideja Maksvel piše: „Faradej je svojim misaonim okom video linije sile kako prožimaju ceo prostor tame gde su matematičari videli centre sila koji deluju iz daleka; Faradej je video medijum tamo gde oni nisu videli ništa sem odstojanja; Faradej je tražio sedište fenomena u realnim delovanjima koja se prostiru kroz medijum, dok su se oni zadovoljavali da ga nađu u dejstvu na daljinu kojem su podvrgnuti električni fluidi”.

3.1.1. *Kulonov zakon.* Elektrostatika je oblast fizike koja proučava statički elektricitet ili naelektrisanje koje miruje. Postoji pozitivno i negativno naelektrisanje. Nosioци pozitivnog naelektrisanja su protoni, a negativnog elektroni. Protoni i elektroni su nosioци najmanje količine naelektrisanja u prirodi i nazivaju se *elementarna naelektrisanja*. Naelektrisanje protona obeležava se sa e (ili p^+), a naelektrisanje elektrona obeležava se sa $-e$ (ili e^-).

Privlačne električne sile se javljaju između pozitivno i negativno naelektrisanih tela. Odbojne električne sile se javljaju između istoimenih naelektrisanja. Na atomskoj skali, zbog principa neodređenosti kvantne mehanike, naelektrisana čestica nema preciznu poziciju, ali je predstavljena raspodelom verovatnoće, tako da se naelektrisanje pojedinačne čestice ne koncentriše u jednoj tački, već se „razmazuje” u prostoru i ponaša se kao prava kontinuirana distribucija naelektrisanja.

Za telo kažemo da je u ravnoteži (equilibrium) ako ne menja svoj položaj u odnosu na referentno telo, tj. ne kreće se u odnosu na njega. U matematičkoj analizi, grani matematike, izvod je mera kako (koliko brzo) funkcija menja svoje vrednosti kada joj se ulazne vrednosti menjaju. Izvod krive u nekoj tački predstavlja koeficijent pravca tangente date krive u toj tački.

Osnovna jednačina elektrostatike je Kulonov zakon, koji opisuje silu između dve tačke (naelektrisanih tela). Veličina elektrostatičke sile između dva naelektrisanja je direktno proporcionalna proizvodu veličina naelektrisanja i obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti između tačaka koje su naelektrisane opterećenjima Q_1 i Q_2 :

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

gde je ϵ_0 konstanta koja se naziva permitivnost vakuum (dielektrična konstanta vakuum).

U elektrostatiki električno polje je naročito fizičko stanje u okolini naelektrisanih tela i električnih opterećenja, koje se vidno manifestuje u pojavi mehaničke sile, koja deluje na probno električno opterećenje uneto u polje. Ako se u prostor između naelektrisanih tela unese punktualno električno opterećenje q , koje je toliko malo da se njegov uticaj na raspodelu električnih opterećenja koja stvaraju polje može zanemariti, na njega će delovati mehanička sila čiji su intenzitet, pravac i smer potpuno određeni u svakoj tački prostora. U jednoj tački polja intenzitet sile je srazmeran probnom opterećenju dok pravac i smer ostaju nepromenjeni.

Pomenutu osnovnu manifestaciju električnog polja, da dejstvuje mehaničkom silom na uneseno probno opterećenje, iskoristićemo za definiciju kvantitativne karakteristike polja, koju nazivamo jačina električnog polja. Jačina polja je vektor, koji obeležavamo simbolom \mathbf{E} i definišemo kao količnik mehaničke sile, kojom polje dejstvuje na pozitivnu probnu količinu elektriciteta, i same te količine elektriciteta: $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$. Vektor jačine polja ima pravac i smer sile koja deluje na pozitivno probno opterećenje, a intenzitet mu je brojno jednak sili koja deluje na jedinično opterećenje.

Podvučimo da postoji sličnost između Njutnovog zakona i Kulonovog zakona. Formule su analogne, masa igra ulogu naelektrisanja, a matematika koja se odnosi na teoriju potencijala je ista i to može da ima veze sa univerzalnim principima.

4. VARIJACIONI RAČUN

Pronalaženje ekstrema funkcionala je slično pronalaženju maksimuma i minimuma funkcija. Maksimumi i minimumi funkcije mogu biti locirani pronalaženjem tačaka gde se izvod anulira (tj. jednak je nuli). Ekstremi funkcionala mogu se dobiti pronalaženjem funkcija gde je funkcionalni izvod jednak nuli. To dovodi do rešavanja pridružene Ojler - Lagranžove jednačine. Navedimo jedan poznat primer iz istorije matematike. Plato je eksperimentisao sa sapunicom kako bi pokazao postojanje minimalne površi sa datom granicom. Pogodno je formulisati odgovarajući problem u sledećoj formi.

4.0.1. *Platov problem.* Odrediti funkciju $z = f(x, y)$ zadatu na domenu D u ravni, čiji grafik minimizira površinu, uz pretpostavku zadatih vrednosti na granici domena D . Koristeći standardni argument u računu varijacija, može se pokazati da rešenje Platovog problema (koje nazivamo minimalni graf $z = f(x, y)$) zadovoljava nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Neka je G domen u ravni okružen Žordanovom krivom C . Pretpostavlja se da je Lagranžijan $L(x, y, u, p, q)$ dovoljno glatka funkcija svojih pet argumenata i neka je $u : G \rightarrow \mathbb{R}$. Mi koristimo notaciju $p = u_x$ i $q = u_y$. Razmotrimo

$$J[u] = \iint_G L(x, y, u, u_x, u_y) dx dy.$$

Za $t \in \mathbb{R}$ i $v : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$, uvedimo $h(t) = J[u + tv]$. Ako je $v \in C^1(\bar{G})$ i $v = 0$ na bG , tada je

$$h'(0) = \iint_G (v L_u + v_x L_p + v_y L_q) dx dy.$$

Pomoću parcijalne integracije dobijamo

$$h'(0) = \iint_G v (L_u - (L_p)_x - (L_q)_y) dx dy.$$

Otuda je

$$(4.1) \quad L_u - (L_p)_x - (L_q)_y = 0$$

i

$$(4.2) \quad L_u - L_{xp} - L_{yq} - u_x L_{up} - u_y L_{uq} - u_{xx} L_{pp} - 2u_{xy} L_{pq} - u_{yy} L_{qq} = 0.$$

Izvedimo Ojler - Lagranžovu jednačinu za minimalnu površ

$$L = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Neka je $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Sa $\Gamma(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in G\}$ označavamo grafik preslikavanja f . Razmotrimo 1-parametarsku familiju $f^t := f + tg$ i definišimo

$A(\Gamma(f)) = \int_G dA$ i $A(t) = A(\Gamma(f^t))$, gde je $dA = \underline{A} dx dy$ i $\underline{A} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$. Dalje nalazimo

$$A'(0) = - \int_G g \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\underline{A}} \right) dx dy$$

i stoga $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\underline{A}} \right) = 0$.

Otuda, kako je $\underline{A}^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2$ mi prvo nalazimo $\underline{A} \underline{A}_x = f_x f_{xx} + f_y f_{xy}$ i stoga

$$(1 + f_y^2) f_{xx} + (1 + f_x^2) f_{yy} - 2 f_x f_y f_{xy} = 0.$$

Površina tečnosti se ponaša kao elastična gumena membrana (opruža). Generalno, sistem pod uticajem sila kreće se ka ravnotežnoj konfiguraciji koja odgovara minimalnoj potencijalnoj energiji. Od svih tela zadate zapremine lopta ima najmanju površinu. Od svih zatvorenih površi zadate površine sfera sadrži najveći volumen i minimalnu površinsku potencijalnu energiju.

Nema kubnih kišnih kapi. Sila F_T kojom površina tečnosti deluje na objekt koji je u kontaktu s njom je direktno proporcionalna dužini L linije kontakta (ili površini A područja kontakta ako je predmet površ). Konstanta proporcionalnosti γ naziva se koeficijent površinskog napona tečnosti. Dakle, važi $F_T = \gamma L$. Stoga se koeficijent površinskog napona može izraziti u formi: $\gamma = F_T/L$. Čvrstoća membrane varira za različite tečnosti, npr. mnogo je manje za sapunastu vodu nego za čistu vodu. Na primer, ako $\varphi(x, y)$ označava pomeranje membrane iznad domena D u ravni xy , tada je njena potencijalna energija proporcionalna njegovoj površini:

$$U[\varphi] = \iint_D \sqrt{1 + \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi} dx dy.$$

4.0.2. *Dirihleov princip.* Za male $|\nabla\varphi|$, $\sqrt{1 + \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi} = \sqrt{1 + |\nabla\varphi|^2}$ se aproksimira sa $1 + |\nabla\varphi|^2/2$.

Često je dovoljno razmotriti samo male pomake membrane, čija energetska razlika od početnog položaja se aproksimira integralom energije

$$(4.3) \quad E[\varphi] = E_D[\varphi] = \frac{1}{2} \iint_D \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi dx dy.$$

Ovde je $L = p^2 + q^2$. Kako je $L_u = L_{xp} = L_{yq} = L_{up} = L_{pq} = 0$ jednačina (4.2) se svodi na $L_u - u_{xx} L_{pp} - u_{yy} L_{qq} = 0$. Dalje, $L_p = 2p$, $L_q = 2q$ i stoga $L_{pp} = L_{qq} = 2$. Otuda nalazimo $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$. Funkcije koje zadovoljavaju poslednju jednačinu nazivaju se harmonijske.

Može se koristiti i formula (4.1). Tada treba $L_p = 2p$ razmatrati kao $L_p = 2p = 2u_x$ i $L_q = 2q = 2u_y$. Otuda $(L_p)_x = 2u_{xx}$ i $(L_q)_y = 2u_{yy}$.

Primitimo da se u fizici koristi notacija $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ za Laplasov operator Δ (Laplasijan).

Ako je u glatka funkcija na domemu $D \subset \mathbb{R}^n$, motivisani prethodnim razmatranjima i formulom (4.3) definišemo

$$E[u] = E_D[u] = \int_D |\nabla u|^2 dx$$

i nazivamo integral energije preslikavanja u .

Razmatranja u ovoj sekciji prirodno dovode do sledećeg problema: minimizirati funkcionalne U i E među svim probnim funkcijama f koje imaju zadate vrednosti na granici bD .

Prvo ćemo navesti Dirihlov princip za harmonijske funkcije.

Teorema 3 (Dirihleov princip). *Pretpostavimo da je D domen u \mathbb{R}^n i:*

- (a) *g je neprekidna funkcija na \overline{D} ;*
- (b) *g ima prve parcijalne izvode koji su neprekidni na D ;*
- (v) *integral energije funkcije g je konačan.*

Ako je u neprekidna funkcija na granici \overline{D} , harmonijska na D i ako je $u = g$ na granici \overline{D} onda je

$$E(g) \geq E(u),$$

pri čemu se jednakost dostiže ako i samo ako je $u = g$ na bD .

5. TEORIJA POTENCIJALA I POTENCIJAL U ELEKTROSTATICI

Podvucimo da se razmatranja u ovoj sekciji odnose na 3D-trodimenzioni prostor.

O osnovama elektrostatičke i elektromagnetike videti na primer u [15]. Neka je e pozitivno naelektrisana čestica locirana u tački y . Ako se naelektrisana čestica s jediničnim naelektrisanjem nalazi u tački x , po Kulonovom zakonu naelektrisanje e deluje na jedinično naelektrisanje u x sa silom $\vec{F}(x) = \frac{e\vec{r}}{r^3}$, gde je $\vec{r} = \vec{y}x$ i $r = |x - y|$.

Polje koje potiče od naelektrisanja e je potencijalno polje, tj. postoji funkcija

$$\varphi = -\frac{e}{|x - y|}$$

takva da je $F = \nabla\varphi$. Funkcija φ se naziva potencijal. Ponovimo da važi $\Delta = \operatorname{div}\nabla = \nabla \cdot \nabla$.

Dajemo nekoliko posledica Kulonovog zakona. Pošto je

$$\Delta \frac{1}{r} = 0,$$

imamo presudnu činjenicu da je $\frac{1}{r}$ harmonijska funkcija u $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ i stoga $\operatorname{div}F = 0$.

Interesantno da u smislu distribucija važi $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta$, pri čemu je δ Dirakova distribucija.

Otuda sledi da je elektrostatičko polje solenoidno. U vektorskom računu solenoidno vektorsko polje (poznato i kao nekompresibilno vektorsko polje, vektorsko polje bez divergencije, ili poprečno vektorsko polje) je vektorsko polje v sa divergencijom nula u svim tačkama u polju:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Sada razmotrimo sistem naelektrisanja e_1, \dots, e_n koja se nalaze u tačkama x_1, \dots, x_n . Ovom sistemu možemo pridružiti polje sila (unošenjem probnog naelektrisanja), koje se može smatrati Rimanovom sumom,

$$\mathbf{F}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{|x - x_k|^3} (x - x_k)$$

sa potencijalom

$$(5.1) \quad \varphi(x) = - \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{|x - x_k|}.$$

Ako se dva provodnika proizvoljnog oblika opterete jednakim količinama električnosti suprotnog znaka,

$$q_1 = -q_2 = Q,$$

u prostoru oko provodnika se formira električno polje, a između provodnika potencijalna razlika

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl.$$

Linijski integral se može uzeti po proizvoljnoj konturi koja spaja površi provodnika koje su ekvipotencijalne.

Između električnog opterećenja kondenzatora, Q , i potencijalne razlike U postoji linearna zavisnost, što je direktna posledica linearnih odnosa koji vladaju između električnih opterećenja i potencijala. Ako se ukupna količina električnosti na nekom provodniku poveća x puta, relativna raspodela opterećenja na njegovoj površini se neće izmeniti, već će se samo površinska gustina u svim tačkama povećati x puta. U istoj razmeri će se povećati i potencijal. Odnos između opterećenja i potencijalne razlike između elektroda kondenzatora je funkcija oblika, dimenzija i međusobnog položaja elektroda i naziva se kapacitivnost: $C = Q/U$.

Neka je G naelektrisano provodno telo u \mathbb{R}^3 u kom je ukupno naelektrisanje Q . Ako je sistem u stanju ravnoteže, potencijal V je konstantan u G .

Veličina $C(G) = \text{cap}(G) = \frac{Q}{V}$ naziva se kapacitet provodnog tela G . U nastavku teksta je data matematička definicija kapaciteta oblasti u \mathbb{R}^3 .

Totalni rad kada se sva naelektrisanja premete u beskonačnost je

$$(5.2) \quad W = \sum_{k=1}^n W_k = \sum_{k < l} \frac{e_k e_l}{|x_l - x_k|} = \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} \frac{e_k e_l}{|x_l - x_k|}.$$

Koristeći rezultate za potencijal naelektrisanja, možemo dati odgovarajuće matematičke definicije.

Smatraćemo da je gustina naelektrisanja neprekidna i da konačne sume teže integralu. Umesto raspodele naelektrisanja posmatraćemo mere.

Ako je površ S (odnosno oblast G) naelektrisanja i A podskup na površi S (odnosno oblasti G) onda A sadrži neku količinu naelektrisanja $q = q(A)$. Dakle svakom podskupu A dodeljujemo $q = q(A)$, količinu naelektrisanja koju sadrži. Opštije, umesto naelektrisanja smatraćemo da imamo meru μ koja „meri” podskupove od S ; $\mu(A) \geq 0$.

Sa $D^c = \mathbb{R}^n \setminus D$ označavamo komplement skupa D .

Motivisani formulama (5.1) i (5.2) definišemo:

i) Njutnov potencijal V^μ (predlažemo i oznake $N[\mu]$ i $\Gamma[\mu]$) mere μ sa nosačem u D kao konvoluciju:

$$V^\mu(x) = \Gamma[\mu](x) = \int_D \frac{1}{|x - y|} \mu(y) dy;$$

ii) energiju $I(\mu)$ mere μ sa:

$$I(\mu) = \int_D V^\mu(x) d\mu(x) = \int_{D \times D} \frac{1}{|x-y|} d\mu(x) d\mu(y).$$

Ako je $E(x) = \frac{1}{|x|}$, tada je $V^\mu = E * \mu$ konvolucija E i μ . Važi da je V^μ je harmonijska funkcija na \overline{D}^c .

Kada je sistem (telo G opterećeno naelektrisanjem Q) u ravnoteži, odgovarajući potencijal u_0 se može normalizovati tako da je u_0 jednako 1 na bG . Tada je $u_0 = u_G$ on G^c , gde je u_G harmonijska funkcija na \overline{G}^c , neprekidna na G^c , koja je jednaka 1 na bG .

Interesantno je da je kapacitet skupa G povezan sa energijom harmonijske funkcije u_G :

$$(5.3) \quad 4\pi \text{cap}(G) = E_G[u_0].$$

Pre nego što skiciramo dokaz ove jednakosti, navodimo jedan dovoljan uslov za rešenje spoljašnjeg Dirihleovog problema.

Ako je G ograničena oblast sa glatkom granicom (preciznije Helderove klase $C^{1,\alpha}$) postoji rešenje spoljašnjeg Dirihleovog problema za neprekidnu realno vrednosnu funkciju f na bG , tj. funkcija $u = u_G$ koja je neprekidna na $\mathbb{R}^n \setminus G$, harmonijska na $\overline{G}^c = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, $u = f$ na bG i $u(x)$ teži c kada x teži ∞ .

Sada možemo dati matematičku definiciju kapaciteta pomoću varijacionog problema: Preciznije $C(G)$ je infimum $E(\mu)$ preko familije svih pozitivnih mera μ za koje $N[\mu] \geq 1$ na G . Podvucimo kako je $V^\mu = -4\pi\mu$ i kako V^μ ima kompaktn nosač na osnovu parcijalne integracije, dobijamo

$$(5.4) \quad E(V^\mu) = - \int_{\mathbb{R}^3} V^\mu \Delta V^\mu dx = 4\pi E(\mu).$$

Ako označimo potencijal V^μ sa $u(x)$ i primetimo da funkcija $u(x)$ ima kompaktn nosač, dolazimo do sledeće definicije:

$C(G) = \text{cap}(G)$ je infimum $\frac{E[u]}{4\pi}$ preko familije svih funkcija $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ (ili $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$) za koje je $u(x) \geq 1$ na G .

Otuda, jednakost (5.3) sledi na osnovu Dirihleovog pricipa.

Primetimo da formula $E[u] = 4\pi E(\mu)$ daje još jedno objašnjenje zašto $E[u]$ nazivamo integral energije.

5.1. Tomsonova teorema. Na osnovu elektrostatičkih razmatranja zaključujemo da elektrostatička ravnoteža znači da ne postoji neto protok električnog naelektrisanja ili da nema struje. Ovde ćemo proučavati svojstva provodnika u elektrostatičkoj ravnoteži.

1. Električno polje unutar provodnika je nula u elektrostatičkoj ravnoteži.
2. Bilo koja neto naelektrisanja na izolovanom provodniku nalaze se na njegovoj površi.
3. Svaka tačka na površini provodnika u elektrostatičkoj ravnoteži je na istom potencijalu – površ je ekvipotencijalna.

Želeli bismo da razmotrimo Tomsonovu teoremu sa matematičke tačke gledišta.

Postoji analogija između raspodele naelektrisanja, elektrostatičkog potencijala, elektrostatičke energije električnog polja, respektivno i mere, Njutnovog potencijala, energija mera itd.

Teorema 4 (Tomsonova teorema). *Za raspodelu naelektrisanja, za koju su obe površi provodnika ekvipotencijalne, elektrostatička energija električnog polja je minimalna.*

Umesto dva provodnika možemo razmatrati n -provodnika koji su ograničeni površima S_i opterećeno sa datim naelektrisanjima q_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

U ovoj situaciji Tomsonova teorema tvrdi: *Za raspodelu naelektrisanja, za koju su sve površi provodnika ekvipotencijalne, elektrostatička energija električnog polja je minimalna.*

Na seminaru za analizu pokazali smo da je ovaj rezultat posledica Dirihleovog principa i dobili dalje rezultate.

5.2. Karlemanov rezultat. Neka je $F \subset D$ i $A = D \setminus F$ topološki prsten u \mathbb{C} . Ako je $S_1 = \text{area}(D)$ i $S_0 = \text{area}(F)$ tada je

$$\text{cap}^{-1}(D, F) \leq \ln \frac{S_1}{S_0}.$$

Ovaj rezultat se može iskazati i u sledećoj formi:

Teorema 5. *Među svim topološki prstenastim domenima u ravni sa datom površinom „rupa“, domen ograničenog sa dva koncentrična kruga daje najmanju vrednost za $\text{cap}(D, F)$.*

Za više detalja o rezultatima prikazanim u ovoj podsekciji videti [8]. Na osnovu Žordanove teoreme znamo da prosta zatvorena Žordanova kriva γ u ravni deli ravan na dve oblasti. Označimo sa $\text{Int}(\gamma)$ ograničenu komponentu.

Neka su γ_0 i γ_1 dve proste zatvorene Žordanove krive u ravni i neka je $D_0 \subset D_1$ i $A = D_1 \setminus D_0$, gde je $D_0 := \text{Int}(\gamma_0)$ i $D_1 := \text{Int}(\gamma_1)$.

Interesantno je da su modul i kapacitet prstena jednaki, tj. važi

$$\text{cap}(A) = M(A) = d_A(\gamma_0, \gamma_1),$$

gde je $M(A)$ modul A i $d_A(\gamma_0, \gamma_1)$ je ekstremalno rastojanje između γ_0 i γ_1 u A .

Mekmulen je dokazao verziju Karlemanovog rezultata sa $M(A)$ (Milnor [13] koristi naziv Mekmulenova nejednakost) i primenio je u kompleksnoj dinamici.

Autor je dokazao razne verzije i uopštenja ovog rezultata u [8] (videti teoreme 5.3, 5.4 i 6.1).

Poenkare i Sege dobili su sledeći rezultat: ako S ograničava domen D u 3D-prostoru zapremine $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, tada je

$$C(S) \geq C(S(0; R)) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} V^{1/3}.$$

Drugim rečima, između svih domena date zapremine lopta ima najmanji kapacitet.

5.3. **Sferna simetrizacija.** Definišimo p -integral energije

$$E_p[u] = \int |\nabla u|^p dx.$$

Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $C \subset A$ kompaktan skup. Par $E = (A, C)$ naziva se kondenzator, a $p - \text{cap}(A, C)$ je infimum

$$E_p[u] = \int_A |\nabla u|^p dx$$

preko familije svih funkcija $u \in C_0^1(A)$ (ili preko svih nenegativnih funkcija $ACLP$ sa kompaktnim nosačem u A) za koje je $u(x) \geq 1$ na C .

Opštije ako je G podskup u \mathbb{R}^n definišimo kapacitet skupa G : $C(G) = \text{cap}(G)$ je infimum

$$E_p[u] = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx$$

preko familije svih funkcija $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ (ili $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$) za koje je $u(x) \geq 1$ na G .

Zimer je dokazao $p - \text{cap}(A, C) = M_p(\Delta(C, bA; A))$, gde M_p označava p -modul familije krivih $\Delta(C, bA; A)$ koje spajaju C i bA u A .

Definicija 1. Neka je L zrak iz x_0 do ∞ i $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ kompaktan skup.

Sferna simetrizacija E^* skupa E u odnosu L definiše se na sledeći način:

- 1) $x_0 \in E^*$ ako i samo ako $x_0 \in E$;
- 2) $\infty \in E^*$ ako i samo ako $\infty \in E$;
- 3) za $r \in (0, \infty)$ skup $E^* \cap S^{n-1}(x_0, r)$ je zatvorena sferna kalota centrirana na L sa istom $(n-1)$ -dimenzionom merom kao i $E(x_0, r) := E \cap S^{n-1}(x_0, r)$ za $E \cap S^{n-1}(x_0, r) \neq \emptyset$ i \emptyset ako je $(n-1)$ -dimenziona mera skupa $E(x_0, r)$ nula.

Gering je dokazao da ako je (A, C) kondenzator, tada za $p \geq 1$ važi

$$p - \text{cap}(A, C) \geq p - \text{cap}(A^*, C^*).$$

6. HARMONIJSKA PRESLIKAVANJA I GEOMETRIJSKE NEJEDNAKOSTI

6.1. **Harmonijska preslikavanja.** Podsetimo da smo u prethodnim sekcijama razmatrali varijacioni račun i pridruženu Ojler–Lagranžovu jednačinu i elektrostatičku teoriju potencijala, i specijalno Dirihleov princip i Platov problem, koji se odnosi na pronalaženje funkcije $z = f(x, y)$ zadate na domenu D u ravni, čiji grafik minimizira površinu, uz pretpostavku zadatih vrednosti na granici D , rešenja se nazivaju minimalnim površinama. Ponovimo ova razmatranja mogu se smestiti u zajednički okvir: rešenja eliptičkih jednačina drugog reda u zavisnosti od graničnih uslova. U tom pravcu u ovoj sekciji dajemo uslove pod kojima je gradijent rešenja ograničen, a kao primer navodimo i rešenje Sinaijevog problema.

Napomenimo da se teorija potencijala može razviti i za rešenja eliptičkih jednačina drugog reda. Dodatno razmatramo i neke geometrijske nejednakosti.

Ako je M podsup \mathbb{R}^n sa bM označavamo granicu M .

Holomorfnе funkcije su kompleksne funkcije definisane na otvorenom podskupu kompleksne ravni koje su diferencijabilne. Kompleksna diferencijabilnost ima mnogo jače posledice nego uobičajena (realna) diferencijabilnost. Na primer, holomorfnе

funkcije su beskonačno puta diferencijabilne, što nikako ne važi za realno diferencijabilne funkcije. I više od toga holomorfne funkcije su predstavljive stepenim redovima po kompleksnoj promenljivoj z . Većina elementarnih funkcija, uključujući eksponencijalnu funkciju, trigonometrijske funkcije, i sve polinomijalne funkcije, holomorfne su.

Razmatranja u vezi sledećeg problema su važna u geometrijskoj teoriji funkcija: ako su D i G dva domena u n -dimenzionom prostoru, odrediti funkcije koje minimiziraju Dirihleov integral

$$\int_D |\nabla f|^2 dx$$

po klasi funkcijama $f : \overline{D} \rightarrow \overline{G}$ koje preslikavaju bD u bG i „ne degenerišu se na granici”.

U ravni stacionarne tačke su holomorfne funkcije, a u prostoru harmonijske funkcije. Na primer, u prostoru ne postoji biholomorfno preslikavanje između lopte \mathbb{B}_2 i polidiska $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$, a u ravni postoji između domena istog topološkog tipa pri dodatnim uslovima.

Za jedinični vektor \mathbf{h} koji ima početak u tački x definišimo pravolinijski put $C(t) = x + th$. Ako t interpretiramo kao vreme, preslikavanje f definiše put $C_{\mathbf{h}}(t) = f(x + th)$. Brzina kretanja čestice duž ovog puta je istežanje funkcije f u pravcu (izvod u pravcu) vektora \mathbf{h} .

Za realno vrednosne funkcije $\dot{C}_{\mathbf{h}}(t) = (\nabla f, \mathbf{h})$ važi da je $|\nabla f(x)|$ najveće istežanje.

U ravni holomorfne funkcije istežu isto u svim pravcima. U prostoru kažemo da je preslikavanje $f : D \rightarrow G$, K -kvazikonformno ako je količnik između najvećeg i najmanjeg istežanja uniformno ograničen sa K u svakoj tački $x \in D$.

U [4] razmatramo

$$(6.1) \quad |\Delta u| \leq a|\nabla u|^2 + b$$

i pokazujemo da su kvazikonformna preslikavanja između glatkih domena koja zadovoljavaju (6.1) Lipšicova.

Za dalja uopštenja videti Apendiks 3 i teoremu 6.9 u [7].

Teorema 6 ([7]). *Neka su D i Ω glatki domen u \mathbb{R}^m . Ako je $u : D \rightarrow \Omega$ kvazikonformno (g, g') -harmonijsko preslikavanje (ili zadovoljava (6.1)), tada je preslikavanje u Lipšicovo na D .*

Ovaj rezultat je razmatran na Seminaru za analizu u Beogradu i na konferenciji u Čenaju, Indija (Workshop on Harmonic Mappings and Hyperbolic Metrics, Chennai, India, Dec. 10–19, 2009).

Videti i <https://sites.google.com/site/iwhmh09/course-materials>.

Na ovoj konferenciji autor je održao nekoliko predavanja. Ovde samo skiciramo ideju dokaza.

Pretpostavljamo da su domen D i Ω glatki, tako da možemo primeniti lemu 6.18 (i teoremu 6.19) iz [3]. Neka je $x_0 \in bD$, i $y_0 = u(x_0)$. Tada $y_0 \in b\Omega$ i postoji lokalna karta ψ definisana i glatka na \overline{B} gde je $B = B(y_0, r_0)$ lopta, koja preslikava $D \cap B$ u hiperravan $y^m = 0$ u \mathbb{R}^m .

Definišimo $\tilde{u} = \psi \circ u$ i neka je \tilde{u}^m m -ta kordinata \tilde{u} . Podvucimo da je $\tilde{u}^m = 0$ na $u^{-1}(B \cap \partial\Omega)$. Definišemo metriku g'' na $\overline{\psi(B)}$, $\overline{\psi(B)} \subset \mathbb{R}^m$ tako da je ψ izometrija

u odnosu na euklidsku metriku na B . Primenom leme 6.18 [3] može se pokazati da je \tilde{u} Lipsčicovo preslikavanje.

V. Božin i autor su pokazali da su domeni Ljapunova kvazikrugovi i da se mogu aproksimirati sa konveksnim domenima. Koristeći specijalnu tehniku, rešili su jedan otvoren problem (star oko dvadesetak godina, koji je verovatno prvi formulisao D. Kalaj):

Teorema 7 ([2]). *Kvazikonformna harmonijska preslikavanja između domena Ljapunova su bi-Lipsčicova.*

Napomenimo da u [7] ukazujemo na neke razlike između teorije u ravni i u prostoru.

6.1.1. *Pitanje Jakoba Sinaija.* Autor je imao priliku da 2016. godine na Prinstonu razgovara sa Jakobom Sinajem, dobitnikom Abelove nagrade, akademikom RAN i profesorom na Prinstonu. U tom razgovoru Sinai je izložio neke probleme vezane za dinamičke sisteme.

Takođe, tokom komunikacije pojavilo se i sledeće pitanje: neka je G ograničen domen u ravni klase C^2 , osim u konačno mnogo tačaka na granici, gde ima singularitete „tipa uglova“. Šta možemo reći o regularnosti Dirihleovih sopstvenih funkcija na G blizu granice? (O ovom pitanju govorimo kao o Sinajevom pitanju.)

Kažemo da je f Dirihleova sopstvena funkcije na domenu G ako postoji skalar λ tako da je $\Delta f = \lambda f$ na G i $f = 0$ na bG . U klasičnom smislu pretpostavljamo da je f neprekidna na zatvorenju G i da ima parcijalne izvode drugog reda na G . Opštije možemo govoriti o Dirihleovim sopstvenim funkcijama u prostorima Soboljeva. Funkcija f pripada prostoru Soboljeva $W_0^{1,2}(G)$ ako je istežanje integrabilno i trag $\text{tr}(f)$ nula na granici. Ako je f neprekidna na zatvorenju G tada se $\text{tr}(f)$ svodi na restrikciju f na bG .

Teorema 8. *Pretpostavimo da je G ograničen konveksan domen u ravni. Ako je $w \in W_0^{1,2}(G)$ Dirihleova sopstvena funkcija, onda je gradijent funkcije w ograničen.*

6.2. Geometrijske nejednakosti.

6.2.1. *Švarcova lema.* Neka $b \in \mathbb{S} = \{w : -1 < \text{Re} w < 1\}$ i ϕ_b konformni izomorfizam $\mathbb{U} = \{z : |z| < 1\}$ na \mathbb{S} , $\phi_b(0) = b$ i $\phi'_b(0) > 0$. Preslikavanje ϕ_b ima sledeća svojstva:

- i) ϕ_b je rastuća na $(-1, 1)$ i preslikava $(-1, 1)$ na sebe;
- ii) Za $r \in [0, 1)$ važi $\phi_b([-r, r]) = [m_b(r), M_b(r)]$, gde je

$$m_b(r) = \phi_b(-r) = \frac{4}{\pi} \arctan \frac{a-r}{1-ar}, \quad M_b(r) = \phi_b(r) = \frac{4}{\pi} \arctan \frac{a+r}{1+ar} \text{ i}$$

$$a = \tan \frac{b\pi}{4};$$
- iii) Ako je $z = re^{i\alpha} \in \mathbb{U}$, i R_α^+ i R_α^- rotacije definisane množenjem sa $e^{-i\alpha}$ i $-e^{-i\alpha}$ respektivno, $u^+ = \text{Re} \phi_b \circ R_\alpha^+$ i $u^- = \text{Re} \phi_b \circ R_\alpha^-$, tada je $u^+(z) = M_b(r)$ i $u^-(z) = m_b(r)$.

Za razmatranja u vezi Švarcove leme videti [9]. Ovde navedimo samo jedan rezultat. U radu [11] autor i M. Svetlik su dokazali:

Teorema 9 ([11]). *Neka je $u : \mathbb{U} \rightarrow (-1, 1)$ harmonijska funkcija i $u(0) = b$. Tada je*

$$(6.2) \quad m_b(|z|) \leq u(z) \leq M_b(|z|), \quad \text{za svako } z \in \mathbb{U},$$

i nejednakost je optimalna za svako $z \in \mathbb{U}$ u smislu iii).

6.2.2. *Lokalna distorzija kvazikonformnih preslikavanja.* Neka Δ označava jedinični krug i $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ kvazikonformno preslikavanje. Definišimo $\delta = \text{dist}(0, \partial f(\Delta))$, $\mu^+(z) = \sup\{|\mu(\zeta)| : |\zeta| = |z|\}$, gde je μ kompleksna dilatacija i pretpostavimo da integral

$$\tau = \int_0^1 \frac{2\mu^+(t)}{1 + \mu^+(t)} \frac{dt}{t}$$

konvergira.

Teorema 10 ([6]). *Neka je f kvazikonformno preslikavanje na Δ , koje je konformno u 0 i neka je $a_1 = f'(0)$. Pretpostavimo gornje oznake. Tada je*

$$(6.3) \quad |f'(0)|e^{-\tau} \leq 4\delta.$$

Ako je f konformno preslikavanje, onda je $\tau = 0$, i otuda kao posledicu dobijamo čuvenu Kebeovu teoremu.

7. DODATNI KOMENTARI

Kratka biografija, prikaz i odjek naučnih rezultata autora dobijenih posle izbora za dopisnog člana SANU dat su u [16]. Ovde navodimo samo da je Kristofer Bishop, pozvani predavač na Međunarodnom kongresu matematičara 2018. godine, u Math Reviews dao izuzetno pozitivan prikaz rezultata Mateljevića o harmonijskim preslikavanjima: [a41], MR2796877 (2012i: 30046) „Ovo je dobro napisan i vrlo zanimljiv rad”; [a40], MR2791734 (2012i: 30047) „Ovaj rad je zanimljiv doprinos teoriji harmonijskih kvazikonformalnih preslikavanja.”; [a35], MR2337479 (2008d: 30037) „Ovaj rad je fundamentalan za geometrijsku teoriju funkcija i kompleksnu dinamiku jer postavlja stroga ograničenja na veličinu lokalne distorzije koju kvazikonformno preslikavanje može imati.” Radovi [a35], [a40] i [a41] navedeni su u [16]; rad [a35] citiran je u ovom članku kao [6].

7.0.1. *Koautori.* Autor je saradivao i objavio radove sa M. Arsenović, V. Božin, D. Kalaj, M. Kežević, V. Marković, M. Marković, M. Pavlović, M. Jevtić, D. Šarić, I. Anić, N. Lakić, M. Svetlik, M. Albijanić, N. Mutavdžić, M. Vuorinen, S. Chen, S. Ponnusamy, ... Autorovi doktorandi (V. Marković, D. Kalaj, ...) imaju značajne matematičke doprinose u svojim oblastima. Na primer, V. Marković je izabran za Fellow of the Royal Society (ekvivalentno akademik u Engleskoj), u 2014. godini dobio je niz prestižnih nagrada i bio pozvani predavač na Međunarodnom kongresu matematičara u Seulu, Južna Koreja).

Zahvaljujem akademiku A. Đorđeviću i kolegama M. Arsenoviću, O. Mihić i M. Svetliku na korisnim sugestijama, i posebno kolegi M. Svetliku koji je izradio slike i tehnički obradio tekst.

U vezi vizualizacije videti takođe članke:

- (1) Piotr Zarzycki, *From visualizing to proving*, September 2004 Teaching Mathematics and its Applications 23(3) DOI: 10.1093/teamat/23.3.108, SourceOAI.
- (2) James Robert Brown, University of Toronto, <https://pirsa.org/04110002>, Proofs and Pictures: The Role of Visualization in Mathematical and Scientific Reasoning

- (3) Antonia Makina, *The role of visualisation in developing critical thinking in mathematics*, Perspectives in Education 28(1), March 2010 : 24–33, Project: Leadership for e-learning.
- (4) Yilmaz, R. & Argun, Z. *Role of visualization in mathematical abstraction: The case of congruence concept*. International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST), 6(1), 2018, 41–57. DOI:10.18404/ijemst.328337 2006. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlková, N. (Eds.). Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 457–464. Prague: PME. 4–457
- (5) Bettina Rösken Katrin Rolka, *A picture is worth a 1000 words-the role of visualization in mathematics learning*, University of Duisburg-Essen, Germany , <https://www.emis.de/proceedings/PME30/4/457.pdf>

The paper [14] describes some important aspects concerning the role of visualization in mathematics learning. We consider an example from integral calculus which focuses on visual interpretations. The empirical study is based on four problems related to the integral concept that highlight various facets of visualization. In particular, we are interested in the visual images that students use for working on specific problems and how they deal with given visualizations. The findings show the importance as well as the difficulties of visualization for the students. Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings. Problem 1: Draw a figure to illustrate the geometric definition of the integral.

LITERATURA

- [1] Nives Baranović, *Razvoj vizualno-prostornih vještina i geometrijskog mišljenja studenata učiteljskog fakulteta zasnovan na metodi usmjerenog opažanja i teoriji Van Hila*, (doktorska disertacija), septembar, 2022.
- [2] V. Božin, M. Mateljević, *Quasiconformal and HQC Mappings Between Lyapunov Jordan Domains*, <http://arxiv.org/abs/1805.04313>, prihvaćen za štampu u The Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze.
- [3] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial Differential Equation of Second Order*, Second Edition, 1983.
- [4] D. Kalaj, M. Mateljević, *Inner estimate and quasiconformal harmonic maps between smooth domains*, Journal d'Analyse Math. 2006. Vol. 100, pp. 117–132.
- [5] M. Knežević, M. Mateljević, *On the quasi-isometries of harmonic quasi-conformal mappings*, J. Math. Anal. Appl, 2007, Vol 334, No 1, 404–413.
- [6] M. Mateljević, *Quasiconformal and quasiregular harmonic analogues of Koebe's theorem and applications*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **32** (2007), 301–315.
- [7] M. Mateljević, *The Lower Bound for the Modulus of the Derivatives and Jacobian of Harmonic Injective Mappings*, Filomat 29:2 (2015), 221–244.
- [8] M. Mateljević, *Isoperimetric Inequality, F. Gehring's Problem on Linked Curves and Capacity*, Filomat 29:3 (2015), 629–650.
- [9] M. Mateljević, *Schwarz lemma and Kobayashi Metrics for harmonic and holomorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. 464 (2018) 78–100.
- [10] M. Mateljević, M. Svetlik, *A contribution to the development of functional thinking related to convexity and one-dimensional motion*, The Teaching of Mathematics, XIV 2 (2011), 87–96.
- [11] M. Mateljević, M. Svetlik, *Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings*, Appl. Anal. Discrete Math. 14 (2020), pp. 150–168.

- [11] M. Mateljević, M. Svetlik, *Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings*, Submitted on 20 Aug 2018, arXiv:1808.06647v1 [math.CV], <http://arxiv.org/abs/1808.06647>
- [12] M. Mateljević, Neki aspekti teorije potencijala, vizualizacija, varijacioni račun i primene, Akademske besede knj. 2, 2019, redovinih članova SANU koji su izabrani 8. novembra 2018 god. U izdanju Srpske akademije nauka i umetnosti, 73-110, ISSN 2466-5134
- [13] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Ann. Math. Studies **160**, Princenton U. Press, Princenton, 2006.
- [14] Bettina Rösken, Katrin Rolka, A picture is worth a 1000 words—the role of visualization in mathematics learning, <https://www.emis.de/proceedings/PME30/4/457.pdf>.
- [15] J. Surutka, *Elektromagnetika*, Akademska Misao, Beograd 2006.
- [16] Akademici A. Ivić, S. Pilipović i G. Milovanović, *Predlog za izbor Miodraga Mateljevića za redovnog člana SANU*, Avgust 2018.
- [17] Miodrag Mateljevic and Marek Svetlik, A Contribution to the Development of Functional Thinking Related to Convexity and One-dimensional Motion and Inertial Frames, slide.

