ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 11, 1997.

ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 11, 1997.

THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS
GLASNIK OF SECTION OF NATURAL SCIENCES, 11, 1997.

UDK 517.16

Milojica Jaćimović*

APOSTERIORNE OCJENE TAČNOSTI PRIBLIŽNIH RJEŠENJA VARIJACIONIH NEJEDNAČINA I ZADATAKA OPTIMIZACIJE

1. Uvod. Posmatrajmo sljedeći zadatak: naći $x \in C$ tako da je

$$\langle F(x), y - x\rangle \geq 0 \text{ za svako } y \in C, \tag{1}$$

gdje je C zatvoren i konveksan podskup Hilbertovog prostora H, $F : H \to H$ zadati operator. Ako je $F(x) = f'(x)$ potencijani operator čiji je potencijal $f : H \to R$, onda je zadatak (1) vezan za odredjivanje minimuma funkcije f na skupu C. Specijalno, ako je $C = H$, zadatak (1) je ekvivalentan sa jednačinom $F(x) = 0$.

Za rješavanje zadatka (1) razvijeni su različiti iterativni postupci. Oni, po pravilu, u konačnom broju koraka mogu dati samo aproksimaciju rješenja nejednačine (1). Od interesa je da se procijeni koliko je aproksimacija rješenja dobijena u nekom iterativnom procesu udaljena od tačnog rješenja. U radu [1] izvedene su ocjene u sluǎju kada je skup $C \subseteq R^n$ poliedar. Ocjene koje ćemo izvesti u ovom radu su opštije, jer važe i u slučaju kada skup C nije poliedar. Specijalno, ako je C poliedar, naše ocjene su nešto preciznije od onih iz rada [1]. Za izvodjenje ocjena koristili smo tehniku za dokazivanje konvergencije metoda linearizacije, koja je prezentirana u [2], s. 310-313 i [3].

Ako je je $F(x) = c \in R^n$ a $C = \{x \in R^n : Ax \leq b, Cx = d\}$ poliedar, tada je (1) zadatak linearnog programiranja. Ocjene odstupanja tačke x od skupa rješenja zadatka linearnog programiranja zasnovane na Hofmanovoj lemi [4]

* Prof. dr Milojica Jaćimović, Prirodnomatematički fakultet, Podgorica

izvedene su prvi put u radu [5] I većina kasnije izvedenih ocjena za zadatak linearnog programiranja zasnovana je na Hofmanovoj lemi koja daje ocjenu odstupanja tačke od skupa rješenja sistema linearnih nejednačina. Ocjena koju mi izvodimo takodje je zasnovana na jednoj varijanti Hofmanove leme, koju takodje dokazujemo.

2. Projekcione mjere. Primijetimo da je x_* rješenje zadatka (1) ako i samo ako je $x_* = Pr_{G,C}(x_* - \beta G^{-1}F(x_*))$, ([6]) gdje je $\beta > 0$ realan broj $G : H \to H$ simetričan linearni operator koji zadovoljava uslov

$$m\|\xi\|^2 \leq \langle G\xi, \xi\rangle \leq M\|\xi\|^2,\ 0 < m < M, \tag{2}$$

a $Pr_{G,C}$ operator projektovanja na skup C u normi definisanoj sa $\|x\|^2 = \langle Gx, x\rangle$. Odavde slijedi da je z rješenje zadatka (1) ako i samo ako je

$$r(z) := z - Pr_{G,C}(z - \beta G^{-1}F(z)) = 0, \tag{3}$$

pa se kao mjera odstupanja aproksimacije $z \in H$ od skupa rješenja zadatka (1) može uzeti veličina $\|r(z)\|$. Naš cilj je da pokažemo kako se na osnovu veličine $\|r(z)\|$ može ocijeniti udaljenost tačke z od skupa C_* rješenja zadatka (1). Na vrlo jednostavnim primjerima se pokazuje da je moguće da $\|r(z)\|$ bude blisko nuli a da rastojanje $\rho(z, C_*)$ bude veliko. Na primjer, jedino rješenje jednačine $F(x) = x/(1+x^2) = 0, x \in R$ je $x_* = 0$. Pri tome za niz $z_k = k$, $r(z_k) = \beta f(z_k) \to 0$ $(\beta > 0)$ kada $k \to \infty$, dok istovremeno $|z_k - x_*| = k \to \infty$. Veličina $\|r(z)\|$ može služiti kao snov za ocjenu odstupanja tačke z od skupa rješenja, samo za odredjene klase zadataka, odnosno samo uz neka dodatna ograničenja na preslikavanje F ili skup C.

Teorema 1. *Neka je $C \subseteq H$ konveksan i zatvoren skup u Hilbertovom prostoru H i $F : H \to H$ preslikavanje koje zadovoljava uslove:*

$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \geq \alpha\|x - u\|^2 0 \ \textit{za svako}\ x, y \in H, \tag{4}$$

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\| \ \textit{za svako}\ \ x, y \in H. \tag{5}$$

Tada je

$$\|z - x_*\|^2 \leq k\|r(z)\|^2, \tag{6}$$

gdje je x_* jedinstveno rješenje zadatka (1), m i M konstante iz uslova (2) i

$$0 < k = k(L, \alpha, m, M, \beta, \epsilon) =$$

$$\left(\frac{\beta(L+\alpha)}{4} - m + \frac{M\epsilon}{2}\right) / \left(\frac{L\alpha\beta}{L+\alpha} - \frac{M}{2\epsilon}\right), \ \epsilon > 0.$$

Dokaz. Kako je x_* rješenje zadataka (1) i kako $z - r(z) \in C$, to je

$$\langle F(x_*), z - r(z) - x_* \rangle \geq 0. \tag{7}$$

Dalje, iz uslova $z - r(z) = Pr_{G,C}(z - \beta G^{-1} F(z)$, slijedi da je

$$\langle -Gr(z) + \beta F(z), y - (z - r(z)) \rangle \geq \text{ za svako } y \in C. \tag{8}$$

Množeći nejednačinu (7) sa β i sabirajući je sa nejednačinom (8) u koju je postavljeno $y = x_*$, dobijamo

$$\langle Gr(z), z - r(z) - x_* \rangle + \beta \langle F(z) - F(x_*), x_* - z + r(z) \rangle \geq 0. \tag{9}$$

Iz uslova (4), (5) (v. [2], teorema 4.3.5, s. 187) slijedi da je

$$\langle F(z) - F(x_*), x_* - z + r(z) \rangle \leq \frac{L+\alpha}{4} \|r(z)\|^2 - \frac{L\alpha}{L+\alpha} \|z - x_*\|^2. \tag{10}$$

Dalje je za svako $\epsilon > 0$

$$\langle Gr(z), z - r(z) - x_* \rangle = -\langle Gr(z), r(z) \rangle + \langle Gr(z), z - x_* \leq$$

$$-m\|r(z)\|^2 + \frac{M\epsilon\|r(z)\|^2}{2} + \frac{M\|z - x_*\|^2}{2\epsilon}.$$

Na osnovu ovih ocjena, iz nejednakosti (9) dobijamo

$$\left(\frac{L\alpha\beta}{L+\alpha} - \frac{M}{2\epsilon}\right) \|z - x_*\|^2 \leq \left(\frac{\beta(L+\alpha)}{4} - m + \frac{M\epsilon}{2}\right) \|r(z)\|^2.$$

Odavde slijedi ocjena (6). □

Primijetimo da je izbor operatora G vezan za izbor parametara β i ϵ. Njihov izbor mora obezbijediti da budu zadovoljeni sljedeći uslovi: $\frac{L\alpha\beta}{L+\alpha} - \frac{M}{2\epsilon} > 0$ i $\frac{\beta(L+\alpha)}{4} - m + \frac{M\epsilon}{2} > 0$.

Ako u (6) postavimo $G = I, \epsilon = 1$, tada dobijamo prostiju ali manje preciznu ocjenu:

$$\|z - x_*\|^2 \leq \left(\frac{\beta(L+\alpha)}{4}\right) / \left(\frac{L\alpha\beta}{L+\alpha} - \frac{1}{2}\right) \|r(z\|^2.$$

Ako je skup C konveksan, zatvoren i ograničen a preslikavanje F zadovoljava uslov jake monotonosti (4), tada se kao mjera odstupanja tačke z od tačnog rješenja x_* zadatka (1) može koristiti norma funkcije

$$r_1(z) = sup\{\langle F(z), z - x\rangle : x \in C\}.$$

Naime, tada je $r_1(z) \leq 0$ i $r_1(z) = 0$ ako i samo ako je $z = x_*$. Jednostavno se dokazuje da tada važi sljedeća teorema (v. [1], teorema 4.1):

Teorema 2 *Neka neprekidno preslikavanje $F : H \to H$ zadovoljava uslov (4) jake monotonosti. Ako je $C \subseteq H$ ograničen konveksan i zatvoren skup, tada za svako $z \in C$ važi:*

$$\|z - x_*\| \leq \frac{r_1(z)}{\sqrt{\alpha}}.$$

3. Mjere zasnovane na projekciji na linearizovani skup ograničenja. Primjena projekcionih mjera podrazumijeva mogućnost realizacije projektovanja na skup C, odnosno jednostavnu strukturu skupa C. Ako je skup C zadat nelinearnim ograničenjima:

$$C = \{x \in C_0 : g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\},$$

gdje je $C_0 \subseteq H$ skup proste strukture (na primjer, C_0 je kugla ili poliedar u R^n), tada je poželjno da se u formiranju mjere $\|r(z)\|$ odstupanja tačke z od tačnog rješenja x_* zadataka (1) projekcija na skup C zamijeni projekcijom na neki jednostavniji skup. Neka je

$$C(z) = \{x \in C_0 : g_i(z) + \langle g_i'(z), x - z\rangle \leq 0, i = 1, \ldots, m\} \tag{11}$$

i

$$r(z) = z - Pr_{C(z)}(z - \beta F(z)),\ \beta > 0. \tag{12}$$

Ako je $C = C_0$ tada se $r(z)$ iz (12) ne razlikuje od $r(z)$ iz formule (3). U tom smislu možemo smatrati da se radi o poopštenoj projekcione mjere konstruisane pomoću formule (3), i za novu mjeru zadržati raniju oznaku. U toku izvodjenja ocjene veličine $\|z - x_*\|$ dokazaćemo da je $r(z) = 0$ ako i samo ako je z rješenje zadatka (1).

Teorema 3. *Neka je $C_0 \subseteq H$ konveksan i zatvoren skup u Hilbertovom prostoru, $g_i : H \to R$ konvekesne neprekidno diferencijabilne funkcije na H za koje je*

$$\|g_i'(x) - g_i'(y)\| \leq L_i\|x - y\| \text{ za svako } x, y \in C_0,\ i = 1, \ldots, m, \tag{13}$$

postoji $\bar{x} \in C_0$ *tako da je* $g_i(\bar{x}) < 0,\ i = 1, \ldots, m$ *(Slejterov uslov).*

Neka je dalje skup C *zadat ograničenjima (11) i* $F : H \to H$ *preslikavanje koje zadovoljava uslove (4) i (5). Tada je*

$$\|z - x_*\|^2 \leq k\|r(z)\|^2, \tag{14}$$

gdje je $k > 0$ *konstanta koja zavisi od* α, L, β *i Lagranžovih množitelja* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots \lambda_m^*)$ *koji odgovaraju jedinstvenom rješenju* x_* *zadatka (1).*

Dokaz. U toku dokaza biće izvedena eksplicitna ocjena konstante k. Iz uslova teoreme slijedi da zadatak (1) ima jedinstveno rješenje x_*. Pri tome (v. [7], lema 5.5, s. 117) postoji $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots \lambda_m^*) \geq 0, \lambda^* \neq 0$, tako da je

$$\langle F(x_*) + (\lambda^*, g'(x_*)), x - x_* \rangle \geq 0 \text{ za svako} x \in C_0, \tag{15}$$

$$\lambda_i^*, g_i(x_*)) = 0, g_i(x_*) \leq 0, \tag{16}$$

gdje je

$$(\lambda^*, g'(x_*)) = \lambda_1^* g_1'(x_*) + \cdots + \lambda_m^* g_m'(x_*).$$

Iz uslova konveksnosti funkcija g_i slijedi da je za svako $x \in C_0$, $g_i(z) + \langle g_i'(z), x - z \rangle \leq g_i(x)$. To znači da je i za funkcije $g_i(z) + \langle g_i'(z), x - z \rangle$ ispunjen Slejterov uslov. Primjenjući teoremu o Lagranžovim množiteljima na zadatak projektovanja tačke $z - \beta F(z)$ na skup $C(z)$, zaključujemo da postoji $\xi^* = (\xi_1^*, \ldots, \xi_m^*) \geq 0, \xi^* \neq 0$ tako da je

$$\langle \beta F(z) - r(z) + (\xi^*, g'(z)), x - (z - r(z)) \rangle \text{ za svako} x \in C_0, \tag{17}$$

$$\xi^*(g_i(z) + \langle g_i'(z), r(z) \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, m, \tag{18}$$

$$(g_i(z) - \langle g_i'(z), r(z) \rangle \leq 0,\ i = 1, \ldots, m. \tag{19}$$

Postavimo u (15) $x = z - r(z)$ a u (17) $x = z - r(z)$ i pomnožimo (15) sa β. Sabiranjem tako dobijenih nejednačina imamo:

$$\beta \langle F(z) - f(x_*), x_* - z + r(z) \rangle + \langle r(z), z - x_* - r(z) \rangle +$$

$$\beta \langle (\lambda^*, g'(x_*)), z - r(z) - x_* \rangle + \langle (\xi^*, g'(z)), x_* - z + r(z) \rangle \geq 0. \tag{20}$$

Ocijenimo svaki sabirak sa desne strane nejednačine (20). Prvi sabirak je ocijenjen u (10). Dalje je

$$\langle r(z), z - x_* - r(z)\rangle \leq -\frac{\|r(z)\|^2}{2} + \frac{\|z - x_*\|^2}{2}. \tag{21}$$

Iz uslova (15), (16), (19) i konveksnosti funkcija g_i slijedi (v. [2], lema 2.3.1, s. 93)

$$\langle(\lambda^*, g'(x_*)), z - r(z) - x_*\rangle = \langle(\lambda^*, g(x_*) + g'(x_*)), z - r(z) - x_*\rangle \leq$$

$$(\lambda^*, g(z - r(z)) \leq (\lambda^*, g(z) + \langle g'(z), -r(z)\rangle + \frac{L_i\|h(z)\|^2}{2} \leq \frac{(L_0, \lambda^*)\|h(z)\|^2}{2}, \tag{22}$$

gdje je $(L_0, \lambda^*) = L_1\lambda_1^* + \cdots L_m\lambda_m^*$. Iz uslova (18) i (16), ponovo koristeći konveksnost funkcija g_i, dobijamo ocjenu četvrtog sabirka:

$$\langle(\xi^*, g'(z)), x_* - z + r(z)\rangle \leq \langle(\xi^*, g'(z)), x_* - z\rangle + (\xi^*, g(z)) \leq \langle(\xi^*, g(x_*)) \leq 0. \tag{23}$$

Uzimajući u obzir ocjene (10), (21), (22) i (23), iz (20) slijedi:

$$\left(\frac{L\alpha\beta}{L+\alpha} - \frac{1}{2}\right)\|z - x_*\|^2 + \left(\frac{\beta(L+\alpha)}{4} - \frac{1}{2} + \beta(L_0, \lambda^*)\right)\|r(z)\|^2 \geq 0.$$

Ako je parametar $\beta > 0$ izabran tako da su koeficijenti uz $\|z - x_*\|^2$ i $\|r(z)\|^2$ pozitivni, tada iz prethodne nejednačine dobijamo ocjenu (14). Teorema 3 je dokazana. □.

Primijetimo da je za primjenu gornjih ocjena potrebno znati Lagranžove množitelje i i bar njihove ocjene. Ponekad ovi množitelji imaju geometrijsko, fizičko ili neko drugo značenje, na osnovu čega se mogu dobiti njihove ocjene.

4. Zadatak linearnog programiranja. Ako je $H = R^n$ konačnodimenzionalni prostor, $F(x) = c \in R^n$, $x \in R^n$ i C poliedar u R^n tada je zadatak (1) zadatak linearnog programiranja. Uslov (4) jake monotonosti preslikavnaja F nije ispunjen. Za ocjenu odstupanja aproksimacije z od skupa C_* rješenja zadatka (1) može se koristiti Hofmanova lema.

Pretpostavimo da su na R^n i R^m zadate norme $|\cdot|$ i $\|\cdot\|$, koje su dualne u odnosu na standardni skalarni proizvod. Možemo zapravo pretpostaviti da su dvije dualne norme definisane na prostoru R^l, gdje je $l = \max\{n; m\}$, a da su norme svih vektora iz prostora R^k, gdje je $k < l$, inducirane normama $|\cdot|$ i $\|\cdot\|$ u R^l.

Lema 1. *Neka je* $C = \{x \in R^n : Ax \leq b\}$ *neprazan skup, gdje je* $b = (b_1, ..., b_m) \in R^m$ *i* $A = (a_{ij})$ *matrica čije su vrste vektori* $a1, \ldots, a_m$ *iz prostora* R^n. *Tada za svako* $z \in R^n$ *postoji* $z_* \in C$, *tako da je*

$$|z - z*| \leq \mu \cdot |(Az - b)_+|, \tag{24}$$

gdje je $((Az - b)_+)_i = 0$ *ako je* $(Az - b)_i = \langle a_i, z\rangle - b_i < 0$ i $((Az - b)_+)_i = (Az - b)_i$ *ako je* $(Az - b)_i \leq 0$ i

$$\mu = \max_D\{\|D\|\}. \tag{25}$$

Maksimum u (25) se bira po svim matricama D koje su inverzne regularnim podmatricama matrice A čiji je red $k = \operatorname{rang} A$ *a norma matrica D saglasna je sa normom* $\|\cdot\|$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $z = 0$. Posmatrajmo zadatak minimizacije $f(x) = |x| \to \inf$, $x \in C$. Skup rješenja C_* ovog zadatka je neprazan. Neka je $z_* \in C_*$. Tada (v. [8], teorema 6.1.1, s. 228) postoji $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*) \in R_+^m$, $\lambda_* \neq 0$, tako da je

$$\lambda^* A \in -\partial f(z_*),\ \lambda_i^*((a_i, z_* rangle - b_i) = 0,\ i = 1, .. \ m, \tag{26}$$

gdje je

$$\partial f(z_*) = \{y \in R^n : \|y\| = 1, \langle y, z_*\rangle = |z_*|\} \tag{27}$$

subdiferencijal funkcije f u tački z_*. Neka je $J = \{j \in \{1, \ldots, m\} : \lambda_j^* > 0\}$. Tada postoji $y \in \partial f(z_*)$ tako da je $y = \sum_{i \in J} \lambda_i^* a_i$. Prema Karateodorijevoj teoremi vektor y se može predstaviti kao nenegativna linerana kombinacija linearno nezavisnih vektora $(a_i, i \in K \subseteq J)$. Proširujući sistem $(a_i, i \in K)$ do baze $(a_i, i \in I)$ vrsta matrice A, dobijamo da je

$$y = \sum_{i \in I} \xi_i^* a_i,\ \|y\| = 1,\ \langle y, z_*\rangle = |z_*|. \tag{28}$$

Primijetimo da je $card(I) = \operatorname{rang} A = k$. Fiksirajmo jedan takav skup indeksa I. Pretpostavimo da je $I = \{1, \ldots k\}$ i da je podmatrica B koja leži na prvih k vrsta i prvih k kolona matrice A invertibilna. Ako sa $y(I) = (y_1, \ldots, y_k)$ označimo $k-$dimenzionalni vektor čije su koordinate prvih k

koordinata vektora y, i ako oznakom $\xi^*(I) = \xi^*$ naglasimo vezu izmedju vektora ξ i skupa indeksa I, imaćemo da je $\xi^*(I)B = y(I)$ i

$$\|\xi^*(I)\| \leq \|y(I)B^{-1}\| \leq \|B_{-1}\|\|y(I)\| \leq \|B_{-1}\|$$

Odavde, iz (26), (27) i (28) slijedi

$$|z_*| = \langle y, z_*\rangle = -\sum_{i\in I} \xi_i^* b_i \leq \|\xi^*(I)\||b| \leq \mu|b|. \ \square$$

Ako je , na primjer, norma matrice $D = (d_{ij})$ reda k definisana formulom $\|D\| = k \cdot \max|d_{ij}|$, tada (v. [9], teorema 5.7.13, s. 390) postoji vektorska norma koja je sa njom saglasna. Slijedi da je $\mu = k\Delta$, gdje je $\Delta = \max|d_{ij}|$, gdje se maksimum bira po svim elementima inverznih podmatrica D reda k matrice A. Procjenjujući norme inverznih matrica mogu se dobiti jednostavnije ocjene konstante μ.

Na kraju, pokažimo kako se gornja lema može primijeniti na zadatak linearnog programiranja (v. [4] i [1]). Pretpostavimo da je u zadatku (1) skup C zadat formulom

$$C = \{x \in R^n : Ax \leq b, Cx = d\}.$$

Zadatak (1) tada možemo zapisati u obliku:

$$\langle c, x_*\rangle \leq \langle c, x\rangle \text{ za svako } x \in C. \tag{29}$$

Njemu dualan zadatak glasi

$$\langle b, \lambda\rangle + \langle d, \eta\rangle \to \max,\ A^T\lambda + C^T\eta = c,\ \lambda \geq 0. \tag{30}$$

Pri tome je u paru $(x_*, (\lambda^*, \eta^*))$, čije obje komponente zadovoljavaju ograničenja, komponenta x_* rješenje osnovnog a $(\lambda^*, \eta^*))$ rješenje dualnog zadataka ako i samo ako je $\langle c, x_*\rangle = \langle b, \lambda^*\rangle + \langle d, \eta^*\rangle$. Odavde, primjenjujući Hofmanovu lemu, dobijamo da za trojku (x, λ, η) postoje rješenja x_* i (λ^*, η^*) zadataka (29) i (30) tako da je

$$|(x, \lambda, \eta) - (x_*, \lambda^*, \eta^*)| \leq$$
$$\mu|(Ax - b)_+, Cx - d, c - A^T\lambda - C^T\eta, (-\lambda)_+, \langle c, x\rangle - \langle b, \lambda\rangle - \langle d, \eta\rangle|,$$

gdje se konstanta μ ocjenjuje kao u (25), ali se umjesto matrice A uzimaju u obzir sva druge matrice koje učestvuju u definisanju skupa ograničenja.

Rezime

U radu se izvode aposteriorne ocjene odstupanja aproksimacije od tačnog rješenja varijacione nejednačine sa jako monotonim operatorom. Izvedene ocjene se mogu vezati za određene klase iterativnih postupaka za rješavanje varijacionih nejednačina i, što je posebno važno, za formulisanje pravila za završetak iteracionih procesa. U radu se posebno izvode ocjene odstupanja približnog od tačnog rješenja za zadatak linearnog programiranja. Za njihovo izvođenje koristi se Hofmanova lema.

LITERATURA

[1] PANG J. S., A posteriri error bounds for the linearly-constrained variational inequality problem, Mathematics of Operations Researche, Vol. 12, No. 3, 1987, 474-484.

[2] ВАСИЛЬЕВ Ф. П., Численные методы решения екстремальных задач. Москва, Наука, 1988.

[3] ВАСИЛЬЕВ Ф. П., Солодкая М. С., Ячимович М., О регуля ризованном методе линеаризации при наличий погрешностей в исходнныих данныих, Вестник МГУ, Сер. Вычисл. мат. и киберн. , No 3, 1994, 5-11.

[4] HOFFMANN A. J., On approximate solutions of systems of linear inequalities. J. Res. Nat. Bur. Standards. 1952. , Vol. 49., 263-265.

[5] ROBINSON S. M., Bounds for errors in the solutions set of a perturbed linaer program, Linear Algebra Appl. v. 6, 69-81.

[6] HARKER. P. T., PANG. J. S., Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a surve¤ of theory, algorithms and applications, Mathematical Programming, v. 48, 1990, 161-220.

[7] БАКУШИНСКИЙ А. Б., ГОНЧАРСКИЙ А. В. Итеративные методы и решения некорректных задач. Москва, Наука, 1989.

[8] 1. CLARKE F. H. Optimization and nonsmooth analysis. John Wiley and sons, 1983.

[9] ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч., МАТРИЧНЫЙ и анализ, Москва, Мир, 1989