

ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ  
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 11, 1997.

ЧЕРНОГОРСКАЈА АКАДЕМИЈА НАУК И ИСКУССТВ  
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 11, 1997.

THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS  
GLASNIK OF SECTION OF NATURAL SCIENCES, 11, 1997.

UDK 517.16

**Milojica Jaćimović\***

## APOSTERIORNE OCJENE TAČNOSTI PRIBLIŽNIH RJEŠENJA VARIJACIONIH NEJEDNAČINA I ZADATAKA OPTIMIZACIJE

1. **Uvod.** Posmatrajmo sljedeći zadatak: naći  $\mathbf{x} \in C$  tako da je

$$\langle F(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \geq 0 \text{ za svako } \mathbf{y} \in C, \quad (1)$$

gdje je  $C$  zatvoren i konveksan podskup Hilbertovog prostora  $H$ ,  $F : H \rightarrow H$  zadati operator. Ako je  $F(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})$  potencijalni operator čiji je potencijal  $f : H \rightarrow R$ , onda je zadatak (1) vezan za određivanje minimuma funkcije  $f$  na skupu  $C$ . Specijalno, ako je  $C = H$ , zadatak (1) je ekvivalentan sa jednačinom  $F(\mathbf{x}) = 0$ .

Za rješavanje zadatka (1) razvijeni su različiti iterativni postupci. Oni, po pravilu, u konačnom broju koraka mogu dati samo aproksimaciju rješenja nejednačine (1). Od interesa je da se procijeni koliko je aproksimacija rješenja dobijena u nekom iterativnom procesu udaljena od tačnog rješenja. U radu [1] izvedene su ocjene u slučaju kada je skup  $C \subseteq R^n$  poliedar. Ocjene koje ćemo izvesti u ovom radu su opštije, jer važe i u slučaju kada skup  $C$  nije poliedar. Specijalno, ako je  $C$  poliedar, naše ocjene su nešto preciznije od onih iz rada [1]. Za izvođenje ocjena koristili smo tehniku za dokazivanje konvergencije metoda linearizacije, koja je prezentirana u [2], s. 310-313 i [3].

Ako je  $F(\mathbf{x}) = c \in R^n$  a  $C = \{\mathbf{x} \in R^n : A\mathbf{x} \leq b, C\mathbf{x} = d\}$  poliedar, tada je (1) zadatak linearnog programiranja. Ocjene odstupanja tačke  $\mathbf{x}$  od skupa rješenja zadatka linearnog programiranja zasnovane na Hofmanovoj lemi [4]

---

\* Prof. dr Milojica Jaćimović, Prirodnomatemički fakultet, Podgorica

izvedene su prvi put u radu [5]. I većina kasnije izvedenih ocjena za zadatak linearnog programiranja zasnovana je na Hofmanovoj lemi koja daje ocjenu odstupanja tačke od skupa rješenja sistema linearnih nejednačina. Ocjena koju mi izvodimo takodje je zasnovana na jednoj varijanti Hofmanove leme, koju takodje dokazujemo.

**2. Projekcione mjere.** Primijetimo da je  $x_*$  rješenje zadatka (1) ako i samo ako je  $x_* = Pr_{G,C}(x_* - \beta G^{-1}F(x_*))$ , ([6]) gdje je  $\beta > 0$  realan broj  $G : H \rightarrow H$  simetričan linearni operator koji zadovoljava uslov

$$m\|\xi\|^2 \leq \langle G\xi, \xi \rangle \leq M\|\xi\|^2, \quad 0 < m < M, \quad (2)$$

a  $Pr_{G,C}$  operator projektovanja na skup  $C$  u normi definisanoj sa  $\|x\|^2 = \langle Gx, x \rangle$ . Odavde slijedi da je  $z$  rješenje zadatka (1) ako i samo ako je

$$r(z) := z - Pr_{G,C}(z - \beta G^{-1}F(z)) = 0, \quad (3)$$

pa se kao mjera odstupanja aproksimacije  $z \in H$  od skupa rješenja zadatka (1) može uzeti veličina  $\|r(z)\|$ . Naš cilj je da pokažemo kako se na osnovu veličine  $\|r(z)\|$  može ocijeniti udaljenost tačke  $z$  od skupa  $C_*$  rješenja zadatka (1). Na vrlo jednostavnim primjerima se pokazuje da je moguće da  $\|r(z)\|$  bude blisko nuli a da rastojanje  $\rho(z, C_*)$  bude veliko. Na primjer, jedino rješenje jedr ačine  $F(x) = x/(1+x^2) = 0, x \in R$  je  $x_* = 0$ . Pri tome za niz  $z_k = k, r(z_k) = \beta f(z_k) \rightarrow 0 (\beta > 0)$  kada  $k \rightarrow \infty$ , dok istovremeno  $|z_k - x_*| = k \rightarrow \infty$ . Veličina  $\|r(z)\|$  može služiti kao snov za ocjenu odstupanja tačke  $z$  od skupa rješenja, samo za određene klase zadataka, odnosno samo uz neka dodatna ograničenja na preslikavanje  $F$  ili skup  $C$ .

**Teorema 1.** *Neka je  $C \subseteq H$  konveksan i zatvoren skup u Hilbertovom prostoru  $H$  i  $F : H \rightarrow H$  preslikavanje koje zadovoljava uslove:*

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2 \text{ za svako } x, y \in H, \quad (4)$$

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\| \text{ za svako } x, y \in H. \quad (5)$$

Tada je

$$\|z - x_*\|^2 \leq k \|r(z)\|^2, \quad (6)$$

gdje je  $x_*$  jedinstveno rješenje zadatka (1),  $m$  i  $M$  konstante iz uslova (2) i

$$0 < k = k(L, \alpha, m, M, \beta, \epsilon) =$$

$$\left( \frac{\beta(L + \alpha)}{4} - m + \frac{M\epsilon}{2} \right) / \left( \frac{L\alpha\beta}{L + \alpha} - \frac{M}{2\epsilon} \right), \epsilon > 0.$$

**Dokaz.** Kako je  $x_*$  rješenje zadataka (1) i kako  $z - r(z) \in C$ , to je

$$\langle F(x_*), z - r(z) - x_* \rangle \geq 0. \tag{7}$$

Dalje, iz uslova  $z - r(z) = Pr_{G,C}(z - \beta G^{-1}F(z))$ , slijedi da je

$$\langle -Gr(z) + \beta F(z), y - (z - r(z)) \rangle \geq \text{ za svako } y \in C. \tag{8}$$

Množeći nejednačinu (7) sa  $\beta$  i sabirajući je sa nejednačinom (8) u koju je postavljeno  $y = x_*$ , dobijamo

$$\langle Gr(z), z - r(z) - x_* \rangle + \beta \langle F(z) - F(x_*), x_* - z + r(z) \rangle \geq 0. \tag{9}$$

Iz uslova (4), (5) (v. [2], teorema 4.3.5, s. 187) slijedi da je

$$\langle F(z) - F(x_*), x_* - z + r(z) \rangle \leq \frac{L + \alpha}{4} \|r(z)\|^2 - \frac{L\alpha}{L + \alpha} \|z - x_*\|^2. \tag{10}$$

Dalje je za svako  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \langle Gr(z), z - r(z) - x_* \rangle &= -\langle Gr(z), r(z) \rangle + \langle Gr(z), z - x_* \rangle \leq \\ &= -m \|r(z)\|^2 + \frac{M\epsilon \|r(z)\|^2}{2} + \frac{M \|z - x_*\|^2}{2\epsilon}. \end{aligned}$$

Na osnovu ovih ocjena, iz nejednakosti (9) dobijamo

$$\left( \frac{L\alpha\beta}{L + \alpha} - \frac{M}{2\epsilon} \right) \|z - x_*\|^2 \leq \left( \frac{\beta(L + \alpha)}{4} - m + \frac{M\epsilon}{2} \right) \|r(z)\|^2.$$

Oдавde slijedi ocjena (6).  $\square$

Primijetimo da je izbor operatora  $G$  vezan za izbor parametara  $\beta$  i  $\epsilon$ . Njihov izbor mora obezbijediti da budu zadovoljeni sljedeći uslovi:  $\frac{L\alpha\beta}{L + \alpha} - \frac{M}{2\epsilon} > 0$  i  $\frac{\beta(L + \alpha)}{4} - m + \frac{M\epsilon}{2} > 0$ .

Ako u (6) postavimo  $G = I, \epsilon = 1$ , tada dobijamo prostiju ali manje preciznu ocjenu:

$$\|z - x_*\|^2 \leq \left( \frac{\beta(L + \alpha)}{4} \right) / \left( \frac{L\alpha\beta}{L + \alpha} - \frac{1}{2} \right) \|r(z)\|^2.$$

Ako je skup  $C$  konveksan, zatvoren i ograničen a preslikavanje  $F$  zadovoljava uslov jake monotonosti (4), tada se kao mjera odstupanja tačke  $z$  od tačnog rješenja  $x_*$  zadatka (1) može koristiti norma funkcije

$$r_1(z) = \sup\{\langle F(z), z - x \rangle : x \in C\}.$$

Naime, tada je  $r_1(z) \leq 0$  i  $r_1(z) = 0$  ako i samo ako je  $z = x_*$ . Jednostavno se dokazuje da tada važi sljedeća teorema (v. [1], teorema 4.1):

**Teorema 2** *Neka neprekidno preslikavanje  $F : H \rightarrow H$  zadovoljava uslov (4) jake monotonosti. Ako je  $C \subseteq H$  ograničen konveksan i zatvoren skup, tada za svako  $z \in C$  važi:*

$$\|z - x_*\| \leq \frac{r_1(z)}{\sqrt{\alpha}}.$$

### 3. Mjere zasnovane na projekciji na linearizovani skup ograničenja.

Primjena projekcionih mjera podrazumijeva mogućnost realizacije projektovanja na skup  $C$ , odnosno jednostavnu strukturu skupa  $C$ . Ako je skup  $C$  zadat nelinearnim ograničenjima:

$$C = \{x \in C_0 : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\},$$

gdje je  $C_0 \subseteq H$  skup proste strukture (na primjer,  $C_0$  je kugla ili poliedar u  $R^n$ ), tada je poželjno da se u formiranju mjere  $\|r(z)\|$  odstupanja tačke  $z$  od tačnog rješenja  $x_*$  zadatka (1) projekcija na skup  $C$  zamijeni projekcijom na neki jednostavniji skup. Neka je

$$C(z) = \{x \in C_0 : g_i(z) + \langle g'_i(z), x - z \rangle \leq 0, i = 1, \dots, m\} \quad (11)$$

i

$$r(z) = z - Pr_{C(z)}(z - \beta F(z)), \beta > 0. \quad (12)$$

Ako je  $C = C_0$  tada se  $r(z)$  iz (12) ne razlikuje od  $r(z)$  iz formule (3). U tom smislu možemo smatrati da se radi o poopšten projekcione mjere konstruisane pomoću formule (3), i za novu mjeru zadržati raniju oznaku. U toku izvodjenja ocjene veličine  $\|z - x_*\|$  dokazaćemo da je  $r(z) = 0$  ako i samo ako je  $z$  rješenje zadatka (1).

**Teorema 3.** *Neka je  $C_0 \subseteq H$  konveksan i zatvoren skup u Hilbertovom prostoru,  $g_i : H \rightarrow R$  konveksne neprekidno diferencijabilne funkcije na  $H$  za koje je*

$$\|g'_i(x) - g'_i(y)\| \leq L_i \|x - y\| \text{ za svako } x, y \in C_0, i = 1, \dots, m, \quad (13)$$

postoji  $x \in C_0$  tako da je  $g_i(\bar{x}) < 0, i = 1, \dots, m$  (Slejterov uslov).

Neka je dalje skup  $C$  zadat ograničenjima (11) i  $F : H \rightarrow H$  preslikavanje koje zadovoljava uslove (4) i (5). Tada je

$$\|z - x_*\|^2 \leq k\|r(z)\|^2, \tag{14}$$

gdje je  $k > 0$  konstanta koja zavisi od  $\alpha, L, \beta$  i Lagranžovih množitelja  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$  koji odgovaraju jedinstvenom rješenju  $x_*$  zadatka (1).

**Dokaz.** U toku dokaza biće izvedena eksplicitna ocjena konstante  $k$ . Iz uslova teoreme slijedi da zadatak (1) ima jedinstveno rješenje  $x_*$ . Pri tome (v. [7], lema 5.5, s. 117) postoji  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \geq 0, \lambda^* \neq 0$ , tako da je

$$\langle F(x_*) + (\lambda^*, g'(x_*)), x - x_* \rangle \geq 0 \text{ za svako } x \in C_0, \tag{15}$$

$$\lambda_i^*, g_i(x_*) = 0, g_i(x_*) \leq 0, \tag{16}$$

gdje je

$$(\lambda^*, g'(x_*)) = \lambda_1^* g_1'(x_*) + \dots + \lambda_m^* g_m'(x_*).$$

Iz uslova konveksnosti funkcija  $g_i$  slijedi da je za svako  $x \in C_0, g_i(z) + \langle g_i'(z), x - z \rangle \leq g_i(x)$ . To znači da je i za funkcije  $g_i(z) + \langle g_i'(z), x - z \rangle$  ispunjen Slejterov uslov. Primjenjujući teoremu o Lagranžovim množiteljima na zadatak projektovanja tačke  $z - \beta F(z)$  na skup  $C(z)$ , zaključujemo da postoji  $\xi^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_m^*) \geq 0, \xi^* \neq 0$  tako da je

$$\langle \beta F(z) - r(z) + (\xi^*, g'(z)), x - (z - r(z)) \rangle \text{ za svako } x \in C_0, \tag{17}$$

$$\xi_i^* (g_i(z) + \langle g_i'(z), r(z) \rangle) = 0, i = 1, \dots, m, \tag{18}$$

$$(g_i(z) + \langle g_i'(z), r(z) \rangle) \leq 0, i = 1, \dots, m. \tag{19}$$

Postavimo u (15)  $x = z - r(z)$  a u (17)  $x = z - r(z)$  i pomnožimo (15) sa  $\beta$ . Sabiranjem tako dobijenih nejednačina imamo:

$$\begin{aligned} & \beta \langle F(z) - f(x_*), x_* - z + r(z) \rangle + \langle r(z), z - x_* - r(z) \rangle + \\ & \beta \langle (\lambda^*, g'(x_*)), z - r(z) - x_* \rangle + \langle (\xi^*, g'(z)), x_* - z + r(z) \rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Ocijenimo svaki sabirak sa desne strane nejednačine (20). Prvi sabirak je ocijenjen u (10). Dalje je

$$\langle r(z), z - x_* - r(z) \rangle \leq -\frac{\|r(z)\|^2}{2} + \frac{\|z - x_*\|^2}{2}. \quad (21)$$

Iz uslova (15), (16), (19) i konveksnosti funkcija  $g_i$ ; slijedi (v. [2], lema 2.3.1, s. 93)

$$\begin{aligned} \langle (\lambda^*, g'(x_*)), z - r(z) - x_* \rangle &= \langle (\lambda^*, g(x_*) + g'(x_*)), z - r(z) - x_* \rangle \leq \\ \langle \lambda^*, g(z - r(z)) \rangle &\leq \langle \lambda^*, g(z) \rangle + \langle g'(z), -r(z) \rangle + \frac{L_i \|h(z)\|^2}{2} \leq \frac{(L_0, \lambda^*) \|h(z)\|^2}{2}, \end{aligned} \quad (22)$$

gdje je  $(L_0, \lambda^*) = L_1 \lambda_1^* + \dots + L_m \lambda_m^*$ . Iz uslova (18) i (16), ponovo koristeći konveksnost funkcija  $g_i$ , dobijamo ocjenu četvrtog sabirka:

$$\langle (\xi^*, g'(z)), x_* - z + r(z) \rangle \leq \langle (\xi^*, g'(z)), x_* - z \rangle + \langle (\xi^*, g(z)) \rangle \leq \langle (\xi^*, g(x_*)) \rangle \leq 0. \quad (23)$$

Uzimajući u obzir ocjene (10), (21), (22) i (23), iz (20) slijedi:

$$\left( \frac{L\alpha\beta}{L+\alpha} - \frac{1}{2} \right) \|z - x_*\|^2 + \left( \frac{\beta(L+\alpha)}{4} - \frac{1}{2} + \beta(L_0, \lambda^*) \right) \|r(z)\|^2 \geq 0.$$

Ako je parametar  $\beta > 0$  izabran tako da su koeficijenti uz  $\|z - x_*\|^2$  i  $\|r(z)\|^2$  pozitivni, tada iz prethodne nejednačine dobijamo ocjenu (14). Teorema 3 je dokazana.  $\square$ .

Primijetimo da je za primjenu gornjih ocjena potrebno znati Lagranžove množitelje i i bar njihove ocjene. Ponekad ovi množitelji imaju geometrijsko, fizičko ili neko drugo značenje, na osnovu čega se mogu dobiti njihove ocjene.

**4. Zadatak linearnog programiranja.** Ako je  $H = R^n$  konačnodimenzionalni prostor,  $F(x) = c \in R^n$ ,  $x \in R^n$  i  $C$  poliedar u  $R^n$  tada je zadatak (1) zadatak linearnog programiranja. Uslov (4) jake monotonosti preslikavanja  $F$  nije ispunjen. Za ocjenu odstupanja aproksimacije  $z$  od skupa  $C_*$  rješenja zadatka (1) može se koristiti Hofmanova lema.

Pretpostavimo da su na  $R^n$  i  $R^m$  zadate norme  $|\cdot|$  i  $\|\cdot\|$ , koje su dualne u odnosu na standardni skalarni proizvod. Možemo zapravo pretpostaviti da su dvije dualne norme definisane na prostoru  $R^l$ , gdje je  $l = \max\{n, m\}$ , a

да су норме свих вектора из простора  $R^k$ , гдје је  $k < l$ , индуциране нормама  $\|\cdot\|_i$  и  $\|\cdot\|_l$ .

**Lema 1.** *Neka je  $C = \{x \in R^n : Ax \leq b\}$  neprazan skup, гдје је  $b = (b_1, \dots, b_m) \in R^m$  и  $A = (a_{ij})$  matrica ђије су врсте вектори  $a_1, \dots, a_m$  из простора  $R^n$ . Tada za svako  $z \in R^n$  postoji  $z_* \in C$ , tako da je*

$$|z - z_*| \leq \mu \cdot |(Az - b)_+|, \tag{24}$$

гдје је  $((Az - b)_+)_i = 0$  ако је  $(Az - b)_i = \langle a_i, z \rangle - b_i < 0$  и  $((Az - b)_+)_i = (Az - b)_i$  ако је  $(Az - b)_i \leq 0$  и

$$\mu = \max_D \{\|D\|\}. \tag{25}$$

*Maksimum u (25) se bira po svim matricama D koje su inverzne regularnim podmatricama matrice A ђији је red  $k = \text{rang } A$  а норма matrica D saglasna је sa normom  $\|\cdot\|$ .*

**Dokaz.** Pretpostavimo да је  $z = 0$ . Posmatrajmo zadatаk minimizacije  $f(x) = |x| \rightarrow \inf, x \in C$ . Skup rješenja  $C_*$  ovog zadatka je neprazan. Neka je  $z_* \in C_*$ . Tada (v. [8], teorema 6.1.1, s. 228) postoji  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \in R_+^m, \lambda_* \neq 0$ , tako da je

$$\lambda^* A \in -\partial f(z_*), \lambda_i^* (\langle a_i, z_* \rangle - b_i) = 0, i = 1, \dots, m, \tag{26}$$

гдје је

$$\partial f(z_*) = \{y \in R^n : \|y\| = 1, \langle y, z_* \rangle = |z_*|\} \tag{27}$$

subdiferencijal funkcije  $f$  u taђki  $z_*$ . Neka je  $J = \{j \in \{1, \dots, m\} : \lambda_j^* > 0\}$ . Tada postoji  $y \in \partial f(z_*)$  tako da je  $y = \sum_{i \in J} \lambda_i^* a_i$ . Prema Karateodoriјевој теорему вектор  $y$  се може представити као неегативна линеарна комбинација линеарно независних вектора  $(a_i, i \in K \subseteq J)$ . Проширујући систем  $(a_i, i \in K)$  до базе  $(a_i, i \in I)$  vrsta matrice  $A$ , dobijamo да је

$$y = \sum_{i \in I} \xi_i^* a_i, \|y\| = 1, \langle y, z_* \rangle = |z_*|. \tag{28}$$

Primijetimo да је  $\text{card}(I) = \text{rang } A = k$ . Fiksirajmo jedan takav skup indeksa  $I$ . Pretpostavimo да је  $I = \{1, \dots, k\}$  и да је podmatrica  $B$  која лежи на првих  $k$  vrsta i prvih  $k$  kolona matrice  $A$  invertibilna. Ako sa  $y(I) = (y_1, \dots, y_k)$  oznaђimo  $k$ -dimenzionalni вектор ђије су koordinate prvih  $k$

koordinata vektora  $y$ , i ako oznakom  $\xi^*(I) = \xi^*$  naglasimo vezu izmedju vektora  $\xi$  i skupa indeksa  $I$ , imaćemo da je  $\xi^*(I)B = y(I)$  i

$$\|\xi^*(I)\| \leq \|y(I)B^{-1}\| \leq \|B_{-1}\| \|y(I)\| \leq \|B_{-1}\|$$

Odavde, iz (26), (27) i (28) slijedi

$$|z_*| = \langle y, z_* \rangle = - \sum_{i \in I} \xi_i^* b_i \leq \|\xi^*(I)\| \|b\| \leq \mu \|b\|. \quad \square$$

Ako je, na primjer, norma matrice  $D = (d_{ij})$  reda  $k$  definisana formulom  $\|D\| = k \cdot \max |d_{ij}|$ , tada (v. [9], teorema 5.7.13, s. 390) postoji vektorska norma koja je sa njom saglasna. Slijedi da je  $\mu = k\Delta$ , gdje je  $\Delta = \max |d_{ij}|$ , gdje se maksimum bira po svim elementima inverznih podmatrica  $D$  reda  $k$  matrice  $A$ . Procjenjujući norme inverznih matrica mogu se dobiti jednostavnije ocjene konstante  $\mu$ .

Na kraju, pokažimo kako se gornja lema može primijeniti na zadatak linearnog programiranja (v. [4] i [1]). Pretpostavimo da je u zadatku (1) skup  $C$  zadan formulom

$$C = \{x \in R^n : Ax \leq b, Cx = d\}.$$

Zadatak (1) tada možemo zapisati u obliku:

$$\langle c, x_* \rangle \leq \langle c, x \rangle \quad \text{za svako } x \in C. \quad (29)$$

Njemu dualan zadatak glasi

$$\langle b, \lambda \rangle + \langle d, \eta \rangle \rightarrow \max, \quad A^T \lambda + C^T \eta = c, \quad \lambda \geq 0. \quad (30)$$

Pri tome je u paru  $(x_*, (\lambda^*, \eta^*))$ , čije obje komponente zadovoljavaju ograničenja, komponenta  $x_*$  rješenje osnovnog a  $(\lambda^*, \eta^*)$  rješenje dualnog zadatka ako i samo ako je  $\langle c, x_* \rangle = \langle b, \lambda^* \rangle + \langle d, \eta^* \rangle$ . Odavde, primjenjujući Hofmanovu lemu, dobijamo da za trojku  $(x, \lambda, \eta)$  postoje rješenja  $x_*$  i  $(\lambda^*, \eta^*)$  zadatka (29) i (30) tako da je

$$|(x, \lambda, \eta) - (x_*, \lambda^*, \eta^*)| \leq$$

$$\mu | \langle Ax - b \rangle_+, \langle Cx - d, c - A^T \lambda - C^T \eta, (-\lambda)_+, \langle c, x \rangle - \langle b, \lambda \rangle - \langle d, \eta \rangle |,$$

gdje se konstanta  $\mu$  ocjenjuje kao u (25), ali se umjesto matrice  $A$  uzimaju u obzir sva druge matrice koje učestvuju u definisanju skupa ograničenja.



## Rezime

U radu se izvode апостериорне оcjене одступања апроксимациjе од тацног рjешенjа вариjационе неjедначjине са jако монотоним оператором. Изведене оcjене се могу везати за одређене класе итеративних поступака за рjешавање вариjационих неjедначjина и, што је посебно важно, за формулисање правила за завршетак итерационих процесa. U radu се посебно изводе оcjене одступања приближног од тацног рjешенjа за задатак линеарног програмирања. За њихово извођење користи се Hofманова лема.

## LITERATURA

[1] PANG J. S., A posteriori error bounds for the linearly-constrained variational inequality problem, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 12, No. 3, 1987, 474-484.

[2] ВАСИЛЬЕВ Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач. Москва, Наука, 1988.

[3] ВАСИЛЬЕВ Ф. П., Солодкая М. С., Ячимович М., О регуляризованном методе линеаризации при наличии погрешностей в исходных данных, *Вестник МГУ, Сер. Вычисл. мат. и киберн.*, No 3, 1994, 5-11.

[4] HOFFMANN A. J., On approximate solutions of systems of linear inequalities. *J. Res. Nat. Bur. Standards*. 1952., Vol. 49., 263-265.

[5] ROBINSON S. M., Bounds for errors in the solutions set of a perturbed linear program, *Linear Algebra Appl.* v. 6, 69-81.

[6] HARKER. P. T., PANG. J. S., Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications, *Mathematical Programming*, v. 48, 1990, 161-220.

[7] БАКУШИНСКИЙ А. Б., ГОНЧАРСКИЙ А. В. Итеративные методы и решения некорректных задач. Москва, Наука, 1989.

[8] CLARKE F. H. Optimization and nonsmooth analysis. John Wiley and sons, 1983.

[9] ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч., МАТРИЧНЫЙ анализ, Москва, Мир, 1989

