ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 12, 1998.
ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 12, 1998.
THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS
GLASNIK OF THE SECTION OF NATURAL SCIENCES, 12, 1998.

UDK 517.968.2

Milojica Jaćimović, Izedin Krnić***

O REGULARIZACIJI LINEARNE JEDNAČINE SA NORMALNO RJEŠIVIM OPERATOROM

Izvod

U radu je predlažena metoda regularizacije normalno rješive linearne operatorske jednačine na konveksnom skupu u Hilbertovom prostoru. Razmatran je problem izbora parametra regularizacije i brzina konvergencije regularizovanih rješenja.

ON REGULATION OF LINEAR EQUATION WITH NORMAL SOLVABLE OPERATOR

Abstract

In this paper we propose one method of regularization of linear operator equation on convex subset of Hilbert space. We investigate the choice of parameter of regularization and derive some estimates of convergence rate.

* Prof. dr Milojica Jaćimović, Prirodno-matematički fakultet, 81000 Podgorica.
** Prof. dr Izedin Krnić, Prirodno-matematički fakultet, 81000 Podgorica.

1. UVOD

Neka su H i F – Hilbertovi prostori, $\Lambda(H,F)$ – prostor linearnih neprekidnih operatora koji H slikaju u F, $A\in\Lambda(H,F)$ – normalno rešivi operator, $f\in F$ – fiksirani element i $U\subseteq H$ – zatvoren i konveksan skup. U ovom radu razmatramo problem regularizacije ekstremalnog zadatka

$$\|u\|\to\inf,\ u\in U_f=\{u\in U\mid Au=f\}\tag{1}$$

Pri tome pretpostavljamo da su umjesto operatora A i elementa f poznate njihove aproksimacije $A_\mu\in\Lambda(H,F)$ i $f_\sigma\in F$ pri čemu je

$$\|A-A_\mu\|\le\mu,\ \|f-f_\sigma\|\le\sigma,\tag{2}$$

gdje su σ i μ mali pozitivni brojevi.

Ekstremalni zadatak bez ograničenja

$$\|u\|\to\inf,\ u\in U_f=\{u\in H\mid Au=f\}\tag{3}$$

razmatran je, na primjer, u [1], [2], [3] i [4].

Ako je skup U_f u zadacima (1) i (3) neprazan, onda je on zatvoren i konveksan, pa navedeni zadaci imaju jedinstvena rješenja, koja označavamo redom sa u_* i u_∞. Elementi u_* i u_∞ se nazivaju normalnim rješenjima operatorske jednačine $Au=f$, na skupu U odnosno na prostoru H.

Za operator $A\in\Lambda(H,F)$ se kaže da je normalno rješiv, ako je njegova slika $A(H)=R(A)=\{Au\mid u\in H\}$ zatvoren potprostor prostora F, tj. ako je $R(A)=\overline{R(A)}$.

Lema 1. ([1], str. 153). Operator $A\in\Lambda(H,F)$ je normalno rješiv, ako i samo ako je

$$m_A=\inf\left\{\|Au\|\ \middle|\ \|u\|=1,\ u\perp KerA\right\}>0.\tag{4}$$

Označimo sa $\sigma_p(A^*A)$ spektar operatora A^*A.
Kako je $\|Au\| = \|(A^*A)^{1/2}u\|$, slijedi da je broj m_A iz prethodne leme, najmanja nenulta tačka spektra nenegativnog samokonjugovanog operatora $(A^*A)^{1/2}$. Spektri operatora A^*A i AA^* se podudaraju sa tačnošću do tačke 0, pa je $\sigma_p(A^*A), \sigma_p(AA^*) \subseteq \{0\} \cup [m_A^2, \|A\|^2]$. To znači da je

$$R(A) = \overline{R(A)} \Leftrightarrow R(A^*) = \overline{R(A^*)}.$$

Lema 2. ([1], str. 153.) Neka za operatore $A, A_\mu \in \Lambda(H, F)$ važi

$$\|A - A_\mu\| \leq \mu, \quad 0 < 2\mu < m_A \tag{5}$$

i neka je zadovoljen uslov (4). Tada je

$$\sigma_p(A_\mu^* A_\mu), \sigma_p(A_\mu A_\mu^*) \subseteq [0, \mu^2] \cup [(m_A - \mu)^2, \|A_\mu\|^2].$$

Označimo sa P_μ operator ortogonalnog projektovanja prostora H na invarijantni potprostor operatora $A_\mu^* A_\mu$, koji odgovara dijelu spektra tog operatora koji leži u $[(m_A - \mu)^2, \|A_\mu\|^2]$.

U odnosu na normalno rješivi operator $A \in \Lambda(H, F)$, prostor H se može predstaviti u obliku ortogonalne sume

$$H = R(A^*) \oplus KerA.$$

Pri tome važi

$$(\forall x \in R(A^*)) m_A \|x\| \leq \|Ax\|.$$

Sa P označavamo operator ortogonalnog projektovanja prostora H, na zatvoreni potprostor $R(A^*)$. Tada je $I - P$ operator ortogonalnog projektovanja prostora H na jezgro $KerA$ operatora A.

Lema 3. ([1], str. 156). Ako su zadovoljeni uslovi (4) i (5) tada važi

$$\|P - P_\mu\| \le \frac{\mu}{m_A - \mu}, \quad \|P_\mu (I - P)\| \le \frac{\mu}{m_A - \mu}.$$

Svaki element $v \in H$ se može predstaviti u obliku ortogonalne sume $v = Pu + (I - P)v$, tako da je $\|v\|^2 = \|Pv\|^2 + \|(I - P)v\|^2$. S obzirom na to da je u_∞ normalno rješenje zadatka (3) i $Au_\infty = APu_\infty = f$, zaključujemo da je $(I - P)u_\infty = 0$, odnosno $u_\infty \in R(A^*)$. Element u_∞ je jedino rješenje jednačine $Au=f$, koje leži u $R(A^*)$. Za svako rješenje v_* te jednačine važi, $v_* = u_\infty + (I - P)v_*$. Prema tome, ako je $u_* \in R(A^*)$, tada je $u_* = u_\infty$.

Tihonovljeva metoda regularizacije primijenjena na zadatak (3) sastoji se u tome, da se za aproksimaciju normalnog rješenja u_∞, uzima jedinstveno rješenje u_α ekstremalnog zadatka bez ograničenja

$$J(u) = \|A_\mu u - f_\sigma\|^2 + \alpha\|u\|^2 \to \inf, u \in H, \alpha > 0 \tag{6}$$

Iz konveksnosti funkcionala J slijedi da je element u_α rješenje jednačine $J'(v) = 0$, pa se u_α može predstaviti u obliku $u_\alpha = g_o(\alpha, A_\mu^* A_\mu) A_\mu^* f_\sigma$, gdje je

$$g_o(\alpha, t) = (\alpha + t)^{-1}, \alpha > 0, t \ge 0.$$

Jedno vrijeme se smatralo da je zadatak (3), sa normalno rješivim operatorom A, nemoguće riješiti sa tačnošću $O(\mu + \sigma)$. U radovima [5] i [6] dokazano je da za aproksimaciju u_α, za izbor $\alpha = \mu$, važi ocjena

$$\|u_\infty - u_\alpha\| = O(\mu + \sigma) \tag{7}$$

Polazeći od svojstava funkcije $g_o(\alpha, t) = (\alpha + t)^{-1}$, u [1] je uvedena familija $\{g(\alpha,\cdot)\}, \alpha > 0$, funkcija $g(\alpha,\cdot): [0,u] \to R, a \geq \|A_\mu\|^2$, mjerljivih u Borelovom smislu, za koje važi

$$\left.\begin{array}{l} (\forall \alpha > 0) \sup\limits_{0 \leq t \leq a} |g(\alpha,t)| \leq \dfrac{\gamma}{\alpha}, \gamma \equiv const > 0 \\ (\forall \alpha > 0)(\forall t \in [0,a]) 0 \leq 1 - tg(\alpha,t) \leq 1 \\ (\forall \alpha > 0) \sup\limits_{0 \leq t \leq a} t(1 - tg(\alpha,t)) \leq \gamma_1 \alpha, \gamma_1 \equiv const > 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

Za aproksimaciju normalnog rješenja zadatka (3) uzima se element $u_\alpha = g(\alpha, A_\mu^* A_\mu) A_\mu^* f_\sigma$ i dokazuje da za izbor $\alpha = m_A \mu$ važi ocjena

$$\|u_\infty - u_\alpha\| \leq \frac{\sigma + [1 + (1 + \gamma^2 \gamma_1^2)] \|u_*\| \mu}{m_A - \mu}$$

Zadatak (1), koji je predmet razmatranja u ovom radu, takodje je razmatran u radu [7]. Za aproksimaciju normalnog rješenja u_*, uzeto je jedinstveno rješenje u_α ekstremalnog zadatka

$$J(u) = \|A_\mu u - f_\sigma\|^2 + \alpha \|u\|^2 \to \inf, u \in U, \alpha > 0 \tag{9}$$

Osnovni rezultat iz tog rada sadržan je u sljedećoj teoremi.

Teorema 1. [7] Neka pored uslova (4) važi

i) $u_* \in R(A^*)$

ii) $Pu_\alpha \in U$, za sve dovoljno male α, σ i μ.

Tada za izbor $\alpha = \mu$ važi ocjena (7).

U radu [7] se ne razmatra problem konvergencije metode (9) za $\alpha = \mu$, ako se namaju informacije i) i ii) o svojstvima normalnog rješenja u_* i aproksimacije u_α. S druge strane, kao što je već rečeno, uz uslov i) zadaci (1) i (3) su ekvivalentni. Autori navedenog rada [7] predlažu da se, u onim slučajevima kada metoda (9) daje mnogo bolju aproksimaciju normalnog rješenja u poredjenju sa aproksimacijom dobijenom metodom (6), umjesto zadatka (3) rješava daleko teži zadatak (1). Teško je, medjutim, naći sadržajan primjer u kome zadatak (3) ima takve prednosti u odnosu na zadatak (1).

Napomenimo da je problem izbora parametra regularizacije u zadatku (9), za proizvoljni operator $A \in \Lambda(H,F)$ razmatran u [3].

Teorema 2. ([3], str. 34). Neka su zadovoljeni uslovi (2). Ako je parametar α izabran tako da važi

$$\frac{\sigma}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\mu}{\alpha} \to 0, \text{ kada } \alpha \to 0, \mu \to 0, \sigma \to 0$$

tada

$$u_\alpha \to u_*, \text{ kada } \alpha \to 0, \mu \to 0, \sigma \to 0$$

2. ZASNIVANJE METODE, IZBOR PARAMETRA REGULARIZACIJE I KONVERGENCIJA

Ovdje ćemo razmotriti klasu metoda regularizacije zadatka (1), generisanu jednom familijom $\{g(\alpha,\cdot)\}, \alpha > 0$, funkcija

$g(\alpha,\cdot):[0,a]\to R, a\geq\left\|A_\mu\right\|^2$, koja kao specijalan slučaj sadrži metodu (9). Za normalno rješivi operator $A\in\Lambda(H,F)$, razmatramo problem izbora parametra regularizacije, za koji regularizovana rješenja konvergiraju ka normalnom rješenju. Za takav izbor dokazujemo da, pod uslovima teoreme 1, važi ocjena (7).

Funkcije $g(\alpha,\cdot)$ sa svojstvima (8), nisu pogodne za regularizaciju zadataka sa ograničenjima. Zbog toga uvodimo familiju $\{g(\alpha,\cdot)\},\alpha>0$, funkcija $g(\alpha,\cdot):[0,a]\to R,\ a\geq\left\|A_\mu\right\|^2$, mjerljivih u Borelovom smislu, sa sljedećim svojstvima

$$(\exists\beta>0)(\forall\alpha>0)(\forall t\in[0,a])\frac{1}{t+\beta\alpha}\leq g(\alpha,t)\leq\frac{1}{\beta\alpha} \tag{10}$$

$$(\forall\alpha>0)(\forall t\in[0,a])1-tg(\alpha,t)\geq 0 \tag{11}$$

Lako se provjerava da funkcije, $g(\alpha,\cdot)$ i $g^{-1}(\alpha,\cdot)$, gdje je

$g^{-1}(\alpha,t)=\dfrac{1}{g(\alpha,t)}$, zadovoljavaju ova svojstva:

$$0\leq\beta\alpha g(\alpha,t)\leq 1,\ 0\leq tg(\alpha,t)\leq 1,\ \beta\alpha\leq g^{-1}(\alpha,t)$$

$$t\leq g^{-1}(\alpha,t),\qquad 0\leq g^{-1}(\alpha,t)-t\leq\beta\alpha,\ 0\leq\frac{g^{-1}(\alpha,t)}{\beta\alpha}-1\leq\frac{t}{\alpha}$$

Na osnovu ovih relacija dobijamo

$$\beta\alpha\|x\|^2\leq\left\langle g^{-1}(\alpha,A_\mu^*A_\mu)x,x\right\rangle,\ x\in H, \tag{12}$$

$$\|A_\mu x\|^2 \le \langle g^{-1}(\alpha, A_\mu^* A_\mu)x, x\rangle \le \|A_\mu x\|^2 + \beta\alpha\|x\|^2, \ x \in H, \tag{13}$$

$$\|g^{-1}(\alpha, A_\mu^* A_\mu) - A^*{}_\mu A_\mu\| = \|g^{-1}(\alpha, A_\mu A_\mu^*) - A_\mu A_\mu^*\| \le$$

$$\le \sup_{t\in[0,a]}|g^{-1}(\alpha,t) - t| \le \beta\alpha, \tag{14}$$

$$\left\|\left(\frac{g^{-1}(\alpha, A_\mu^* A_\mu)}{\beta\alpha} - I\right)x\right\|^2 = \left\langle\left(\frac{g^{-1}(\alpha, A_\mu^* A_\mu)}{\beta\alpha} - I\right)^2 x, x\right\rangle \le \left\|\frac{A_\mu^* A_\mu x}{\beta\alpha}\right\|^2, \ x \in H, \tag{15}$$

Svojstvo (12) obezbedjuje strogu konveksnost funkcionala

$$T(u) = \|g^{-1/2}(\alpha, A_\mu^* A_\mu)u - g^{1/2}(\alpha, A_\mu^* A_\mu)A_\mu^* f_\sigma\|^2$$

jer je

$$\langle T'(u) - T'(v), u - v\rangle = \langle g^{-1}(\alpha, A_\mu^* A_\mu)(u - v), u - v\rangle \ge \beta\alpha\|u - v\|^2$$

Slijedi da ekstremalni zadatak

$$T(u) \mapsto \inf, u \in U$$

ima jedinstveno rješenje, koje označavamo sa u_α. Za aproksimaciju normalnog rješenja u_* zadatka (1), uzima se element u_α.

Lako se provjerava da ekstremalni zadaci

$$J(u) \mapsto \inf, u \in U \ \text{ i } \ T(u) \mapsto \inf, u \in U$$

za $g(\alpha, t) = (\alpha + t)^{-1}$, imaju isto rješenje.

Izvedimo dvije nejednakosti koje ćemo koristiti u dokazu konvergencije rješenja u_α ka u_* i ocjeni brzine.

Element u_α zadovoljava uslov ekstremalnosti, ([8], str. 38):

$$(\forall v \in U)\langle T'(u_\alpha), v - u_\alpha\rangle \ge 0$$

odnosno

$$(\forall v \in U)\left\langle g^{-1}\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)u_\alpha - A_\mu^* f_\sigma, v - u_\alpha \right\rangle \geq 0 \tag{16}$$

Ako jednakost

$$v - u_\alpha = \left(I - A_\mu^* A_\mu g\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)\right)v + g\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)A_\mu^*\left(A_\mu v - f_\sigma\right) +$$
$$+ g\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)T'(u_\alpha)$$

skalarno pomnožimo sa $g^{-1}\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)(v - u_\alpha)$, vodeći računa o (12), (14) i (16) dobijamo

$$\beta\alpha\|v - u_\alpha\|^2 \leq \left\langle\left(g^{-1}\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right) - A_\mu^* A_\mu\right)v, v - u_\alpha\right\rangle + \left\langle A_\mu v - f_\sigma, A_\mu(v - u_\alpha)\right\rangle \tag{17}$$

$$\|A_\mu(v - u_\alpha)\|^2 \leq \left\langle\left(g^{-1}\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right) - A_\mu^* A_\mu\right)v, v - u_\alpha\right\rangle + \|A_\alpha(v - u_\alpha)\|^2 +$$
$$+ \left\langle A_\mu u_\alpha - f_\sigma, A_\mu(v - u_\alpha)\right\rangle$$

Dodajući lijevoj i desnoj strani posljednje nejednakosti broj $\|A_\mu u_\alpha - f_\sigma\|^2$, dobijamo da za svako $v \in U$ važi

$$\|A_\mu u_\alpha - f_\sigma\|^2 \leq \left\langle\left(g^{-1}\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right) - A_\mu^* A_\mu\right)v, v - u_\alpha\right\rangle + \left\langle A_\mu v - f_\sigma, A_\mu(v - u_\alpha)\right\rangle \tag{18}$$

Za izvodjenje uslova za parametre α, σ i μ koji obezbjedjuju konvergenciju

$$u_\alpha \to u_*, \text{ kada } \alpha \to 0, \ \mu \to 0, \ \ \sigma \to 0.$$

potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 4. Neka su zadovoljeni uslovi (4), (5), (10) i (11). Tada

i) $A_\mu u_\alpha \to Au_*$, kada $\alpha \to 0, \mu \to 0, \sigma \to 0.$

ii) Ako postoji konstanta $c > 0$, tako da je

$$\frac{\mu}{\alpha} \leq c \tag{19}$$

za sve dovoljno male α i μ, tada za svako $x \in H$ važi

$$\frac{g^{-1}(\alpha, A_\mu^* A_\mu) - A_\mu^* A_\mu}{\beta \alpha}(I-P)x \to (I-P)x,$$

kada $\mu \to 0$.

Dokaz: i) Iz $T(u_\alpha) \leq T(u_*)$, primjenom relacije (13) dobijamo

$$\|A_\mu u_\alpha - f_\sigma\|^2 \leq \|A_\mu u_* - f_\sigma\|^2 + \alpha \|u_*\|^2$$

Kako je

$$\|A_\mu u_* - f_\sigma\| = \|(A - A_\mu)u_* + (f - f_\sigma)\| \leq \mu \|u_*\| + \sigma \tag{20}$$

nalazimo da

$$A_\mu u_\alpha - f_\sigma \to 0 \text{ kada } \alpha \to 0,\ \mu \to 0,\ \sigma \to 0.$$

Odavde, uzimajući u obzir da je

$$Au_* - A_\mu u_\alpha = f - f_\sigma + f_\sigma - A_\mu u_\alpha$$

dobijamo tvrdjenje i).

ii) Na osnovu leme 2. i relacija (10) i (20) imamo

$$\|g(\alpha, A_\mu^* A_\mu) A_\mu^* A_\mu (I-P)x\| = \|g(\alpha, A_\mu^* A_\mu) A_\mu^* (A_\mu - A)(I-P)x\| \leq$$
$$\leq \|g_\alpha(A_\mu^* A_\mu) A_\mu^*\| \mu \|(I-P)x\| \leq \mu \|(I-P)x\| \sup_{t \in \sigma_p(A_\mu^* A_\mu)} t^{1/2} g(\alpha, t) \leq$$

$$\leq \mu \|(I-P)x\| \max\left\{ \sup_{0\leq t\leq \mu^2} t^{1/2} g(\alpha,t), \sup_{(m_A-\mu)^2\leq t\leq a} t^{1/2} g(\alpha,t)\right\} \leq$$

$$\leq \mu \|(I-P)x\| \max\left\{ \mu \sup_{0\leq t\leq a} g(\alpha,t), \frac{1}{m_A-\mu} \sup_{0\leq t\leq a} tg(\alpha,t)\right\} \leq$$

$$\leq \mu \|(I-P)x\| \max\left\{ \frac{\mu}{\beta\alpha}, \frac{1}{m_A-\mu}\right\} \leq \mu \|(I-P)x\| \max\left\{ c, \frac{1}{m_A-\mu}\right\}.$$

Odavde slijedi da

$$\left(I - A_\mu^* A_\mu g\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)\right)(I-P)x \mapsto (I-P)x, \text{ kada } \mu \to 0. \quad (21)$$

Dalje je

$$\left\| \left[\frac{g^{-1}\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right) - A_\mu^* A_\mu}{\beta\alpha} - \left(I - A_\mu^* A_\mu g\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)\right)\right](I-P)x \right\|^2 =$$

$$= \left\langle \left(I - A_\mu^* A_\mu g\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)\right)^2 (I-P)x, \left(\frac{g^{-1}\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)}{\beta\alpha} - I\right)^2 (I-P)x \right\rangle \quad (22)$$

Na osnovu (15) i (19) imamo

$$\left\| \left(\frac{g^{-1}\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)}{\beta\alpha} - I\right)(I-P)x \right\| \leq \left\| \frac{A_\mu^*\left(A_\mu - A\right)(I-P)x}{\beta\alpha} \right\| \leq$$

$$\leq \frac{\mu}{\beta\alpha} \|A_\mu\| \|(I-P)x\| < +\infty.$$

Odavde, uzimajući u obzir (21) i (22) slijedi tvrdjenje ii).

Osnovni rezultat ovog rada sadržan je u sljedeće dvije teoreme.

Teorema 3. Neka su zadovoljeni uslovi (2), (4), (5), (10), (11). Ako postoji konstanta c>0, tako da je

$$\frac{\mu+\sigma}{\alpha}\leq c \tag{23}$$

za sve dovoljne male α, σ i μ, tada

$$u_\alpha \to u_*, \text{ kada } \alpha\to 0, \quad \mu\to 0, \quad \sigma\to 0.$$

Dokaz: Kako $u_\infty \in R(A^*)$, slijedi da postoji element $h_* \in F$, takav da je $u_\infty = A^* h_*$. Normalno rješenje u_* zadatka (1) možemo predstaviti u obliku $u_* = u_\infty + (I-P)u_*$.

Ako jednakost

$$u_* - u_\alpha = \left(I - A_\mu^* A_\mu g\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)\right)u_\infty + (I-P)u_* + g\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)A_\mu^*\left(A_\mu u_\infty - f_\sigma\right) +$$
$$+ g\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)T'\left(u_\alpha\right)$$

skalarno pomnožimo sa $g^{-1}\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)\left(u_* - u_\alpha\right)$, postupajući kao pri dokazu relacije (17) i imajući u vidu da je $u_\infty = A^* h_*$, dobijamo

$$\left\langle\left(g^{-1}\left(\alpha, A_\mu A_\mu^*\right) - A_\mu A_\mu^*\right)h_*, A_\mu\left(u_* - u_\alpha\right)\right\rangle + \left\langle\left(g^{-1}\left(\alpha, A_\mu A_\mu^*\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - A_\mu^* A_\mu\right)(I-P)u_*, u_* - u_\alpha\right\rangle + \left\langle\left(A_\mu - A\right)(I-P)u_*, A_\mu\left(u_* - u_\alpha\right)\right\rangle +$$
$$+ \left\langle A_\mu u_\infty - f_\sigma, A_\mu\left(u_* - u_\alpha\right)\right\rangle.$$

Napomenimo da je ovdje primijenjena jednakost, ([1], str. 34):

$$\left(g^{-1}\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right) - A_\mu^* A_\mu\right) A_\mu^* = A_\mu^*\left(g^{-1}\left(\alpha, A_\mu A_\mu^*\right) - A_\mu A_\mu^*\right).$$

Sada primjenom Košijeve nejednakosti i relacija (14) i (20) nalazimo da je

$$\|u_* - u_\alpha\|^2 \leq \mu\|h_*\|\|u_* - u_\alpha\| + \left(\|h_*\| + \frac{\left(\|(I-P)u_*\| + \|u_\infty\|\right)\mu + \sigma}{\beta\alpha}\right)\|A_\mu(u_* - u_\alpha)\| +$$

$$+\left\langle \frac{g^{-1}\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right) - A_\mu^* A_\mu}{\beta\alpha}(I-P)u_*, u_* - u_\alpha \right\rangle \tag{24}$$

Odavde, primjenom ε nejednakosti, relacije 23 i leme 4, zaključujemo da veličina $\|u_\alpha\|$, ostaje ograničena, kada $\alpha \to 0$, $\mu \to 0$ i $\sigma \to 0$.

Slijedi da postoje nizovi (α_n), (μ_n), (σ_n); $\alpha_n \to 0$, $\mu_n \to 0$, $\sigma_n \to 0$ kada $n \to \infty$, i tačka $v_* \in U$, tako da

$$u_{\alpha_a} \xrightarrow{w} v_* \text{ kada } n \to \infty.$$

Na osnovu leme 4, slijedi da $v_* \in U_f$. Ako u (24) pustimo, da $n \to \infty$, imajući u vidu lemu 4 i relaciju (23) dobijamo

$$\|u_* - v_*\|^2 \leq \left((I-P)u_*, u_* - v_*\right)$$

Kako $u_* - v_* \in KerA$, posljednju nejednakost možemo zapisati u obliku

$$\left(u_*, u_* - v_*\right) - \left(v_*, u_* - v_*\right) \leq \left(u_*, u_* - v_*\right)$$

Prema tome je

$$\left(v_*, u_* - v_*\right) \geq 0.$$

Iz ove nejednakosti dobijamo $\|u_*\| \geq \|v_*\|$. Kako je u_* normalno rješenje, to je $v_* = u_*$. Na taj način $u_{\alpha_n} \xrightarrow{w} u_*$, kada $n \to \infty$. Kako tačka u_* ne zavisi od izbora nizova $(\alpha_n), (\mu_n)$ i (σ_n) slijedi da

$$u_\alpha \xrightarrow{w} u_*, \text{ kada } \alpha \to 0, \quad \mu \to 0 \quad \text{i} \quad \sigma \to 0.$$

Ako u (24) pustimo da $\alpha \to 0, \quad \sigma \to 0 \quad$ i $\quad \mu \to 0$ dobijamo da

$$u_\alpha \to u_*, \text{ kada } \alpha \to 0, \quad \mu \to 0 \quad \text{i} \quad \sigma \to 0.$$

čime je teorema dokazana.

3. BRZINA KONVERGENCIJE

Brzina konvergencije $u_\alpha \to u_*$, može biti proizvoljno mala. Zato je važno da se izdvoje oni slučajevi u kojima se može garantovati određena brzina konvergencije.

Teorema 4. Neka su zadovoljeni uslovi teoreme 3 i neka je

i) $u_* \in R(A^*)$ tj. $u_* = A^* h_*, h_* \in F$

ii) $Pu_\alpha \in U$, za sve dovoljno male α, μ i σ.

Tada za izbor $\alpha = \beta^{-1}(\mu + \sigma)$, važi ocjena

$$\|u_* - u_\alpha\| = O(\mu + \sigma).$$

Dokaz: Ako jednakost

$$u_* - u_\alpha = \left(I - A_\mu^* A_\mu g\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)\right)u_* + g\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)A_\mu^*\left(A_\mu u_\infty - f_\sigma\right) +$$
$$+ g\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)T'(u_\alpha)$$

skalarno pomnožimo sa $g^{-1}\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)(u_* - u_\alpha)$, kao u prethodnoj teoremi dobijamo

$$\left\langle g^{-1}\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)(u_* - u_\alpha), u_* - u_\alpha\right\rangle \le \left\langle g^{-1}\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right) - A_\mu^* A_\mu, \left(A^* - A_\mu\right)h_*, u_* - u_\alpha\right\rangle +$$
$$+\left\langle\left(g^{-1}\left(\alpha, A_\mu A_\mu^*\right) - A_\mu A_\mu^*\right)h_*, A_\mu(u_* - u_\alpha)\right\rangle + \left\langle A_\mu u_* - f_\sigma, A_\mu(u_* - u_\alpha)\right\rangle$$

Primjenjujući (12), (13) i (20), odavde slijede dvije ocjene

$$\beta\alpha\|u_* - u_\alpha\|^2 \le \beta\alpha\mu\|h_*\|\|u_* - u_\alpha\| + \left(\beta\alpha\|h_*\| + \mu\|u_*\| + \sigma\right)\|A_\mu(u_* - u_\alpha)\| \quad (25)$$

$$\|A_\mu(u_* - u_\alpha)\|^2 \le \beta\alpha\mu\|h_*\|\|u_* - u_\alpha\| + \left(\beta\alpha\|h_*\| + \mu\|u_*\| + \sigma\right)\|A_\mu(u_* - u_\alpha)\| \quad (26)$$

Ako je

$$\|A_\mu(u_* - u_\alpha)\| \le \mu\|u_* - u_\alpha\|$$

tada za $\alpha = \beta^{-1}(\mu + \sigma)$, iz (25) dobijamo

$$\|u_* - u_\alpha\| \le \left(2\|h_*\| + \|u_*\|\right)\mu + \left(2\|h_*\| + 1\right)\sigma$$

čime je teorema za ovaj slučaj dokazana. Sada pretpostavimo da je

$$\mu\|u_* - u_\alpha\| \le \|A_\mu(u_* - u_\alpha)\|. \quad (27)$$

Tada iz (26), za $\alpha = \beta^{-1}(\mu + \sigma)$, slijedi ocjena

$$\|A_\mu(u_* - u_\alpha)\| \le \left(2\|h_*\| + \|u_*\|\right)\mu + \left(2\|h_*\| + 1\right)\sigma \quad (28)$$

Koristeći (27) i (28) imamo

$$\|A(u_* - u_\alpha)\| = \|(A - A_\mu)(u_* - u_\alpha) + A_\mu(u_* - u_\alpha)\| \le$$

$$\le \mu\|u_* - u_\alpha\| + \|A_\mu(u_* - u_\alpha)\| \le 2\|A_\mu(u_* - u_\alpha)\| \le$$

Dalje je

$$\|P(u_\alpha - u_*)\| \le \frac{1}{m_A}\|A(u_* - u_\alpha)\|$$

odnosno

$$\|P(u_\alpha - u_*)\| \le \frac{2}{m_A}\left[(2\|h_*\| + \|u_*\|)\mu + (2\|h_*\| + 1)\sigma\right] \tag{29}$$

Na kraju ocijenimo veličinu $\|(I-P)(u_* - u_\alpha)\| = \|(I-P)u_\alpha\|$. Ako u (18) stavimo $v = u_*$, postupajući kao pri dokazu relacije (25) i imajući u vidu (27), dobijamo

$$\|A_\mu u_\alpha - f_\sigma\|^2 \le 2\beta\alpha\|h_*\|\|A_\mu(u_* - u_\alpha)\| + (\mu\|u_*\| + \sigma)\|A_\mu u_\alpha - f_\sigma\| \tag{30}$$

Ako je

$$\|A_\mu u_\alpha - f_\sigma\| \le \|A_\mu(u_* - u_\alpha)\|$$

tada na osnovu (28) slijedi ocjena

$$\|A_\mu u_\alpha - f_\sigma\| \le (2\|h_*\| + \|u_*\|)\mu + (2\|h_*\| + 1)\sigma \tag{31}$$

U suprotnom, koristeći (30), nalazimo da za $\alpha = \beta^{-1}(\mu + \sigma)$ važi ocjena (31).

Iz uslova ii) slijedi da u (17) možemo staviti $v = Pu_\alpha$. Dobija se

$$\beta\alpha\|(I-P)u_\alpha\|^2 \le \left\langle \left(g^{-1}(\alpha, A_\mu^* A_\mu) - A_\mu^* A_\mu\right)Pu_\alpha, (P-I)u_\alpha \right\rangle + \left\langle A_\mu Pu_\alpha - \right.$$

$$\left. - f_\sigma, A_\mu(P-I)u_\alpha \right\rangle = \left\langle \left(g^{-1}(\alpha, A_\mu^* A_\mu) - A_\mu^* A_\mu\right)(P - P_\mu)u_\alpha, (P-I)u_\alpha \right\rangle +$$

$$+\left\langle\left(g^{-1}\left(\alpha, A_\mu^* A_\mu\right)-A_\mu^* A_\mu\right)u_\alpha, P_\mu(P-I)u_\alpha\right\rangle+$$

$$+\left\|\left(A_\mu-A\right)(I-P)u_\alpha\right\|^2+\left\langle A_\mu u_\alpha-f_\sigma,\left(A_\mu-A\right)(P-I)u_\alpha\right\rangle$$

Odavde, koristeći lemu 3 i relacije (15), (27) i (30), dobijamo

$$\|(I-P)u_\alpha\| \leq \frac{2\mu\|u_\alpha\|}{m_A-\mu}+2\left[\left(2\|h_*\|+\|u_*\|\right)\mu+\left(2\|h_*\|+1\right)\sigma\right]$$

što zajedno sa (29) daje ocjenu

$$\|u_*-u_\alpha\| \leq \|P(u_*-u_\alpha)\|+\|(I-P)u_\alpha\| \leq$$

$$\leq 2\left(1+\frac{1}{m_A}\right)\left[\left(2\|h_*\|+\|u_*\|\right)\mu+\left(2\|h_*\|+1\right)\sigma\right]+\frac{2\mu\|u_\alpha\|}{m_A-\mu}$$

čime je teorema dokazana.

LITERATURA

[1] Вайникко Г. М., А. Ю. Веретенников, Итерационные процедуры в некорректных задачах, Наука, Москва 1986.

[2] Иванов В. К., В. В. Васин, Б. П. Танана, Теория линейных некорректных задач и ее применения, Наука, Москва 1978.

[3] Морозов В. А., Регулярные методы решения некорректно поставленних задач, Наука, Москва, 1987.

[4] Neubauer A., Tikhonov – Regularization of Ill-Posed Linear Operator Equations on Closed Convex Sets, J. Approx. Theory. V. 53 (1988), 304-320.

[5] Морозов В. А., Гилязов С. Ф., Оптимальная регуляризация некорректных нормально разрешимых операторных уравнений, В кн.: Методы и алгоритмы в численом анализе, Изд-во, МГУ, 1982, с 11-18.

[6] Джумаев С. О приближенном вычислении псевдорешения, Докл. А. Н. Тадж. ССР, 1982, т 25, N° 10. с. 484-587.

[7] Гилязов С. Ф., В. А. Морозов, О регуляризации некорректно поставленных задач с нормально разрешимыми операторами, Журн. вычисл. математики, 1997, т 17, N° 2, с. 139-144.

[8] Васильев Ф. П., А. З. Ишмухаметов, М. М. Потапов, Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления, Изд-во, МГУ, 1989 г.