ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 13, 2000.
ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 13, 2000.
THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS
GLASNIK OF THE SECTION OF NATURAL SCIENCES, 13, 2000.

UDK 512.66+515.164+517.968.3

*Желько Радулович**

C*-АЛГЕБРЫ МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ ПО ДВОЙСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ СИМВОЛАМИ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСА НЕТЕРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ (I)

Аннотация

В работе рассматриваются **C*** - алгебры многомерных СИО (псевдодифференциалных операторов - ПДО нулевого порядка) с разрывными по двойственной переменной символами. Описаны неприводимые представления таких **C***-алгебр, их алгебры символов, а также условия нетеровости (фредгольмовости) составляющих эти **C***- алгебры операторов. Вычислению индекса нетеровых

* Желько Радулович, Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова, Институт математики, экономики и механики (ИМЭМ); Катедра геометрии и топологии; Петра Великого 2, Одесса, Украина.

(фредгольмовых) операторов с помощью оператора Дирака т.е. по мною модифицированных формулам Каспарова и Мищенко-Фоменко посвящена вторая часть работи.

2000 Mathematics Subject Classification: 47G10, 47L15, 58J20, 19K35, 19K56

Ключевые слова и фразы. СИО, С*-алгебра, условия нетеровости (фредгольмовости), индекс фредгольмовых операторов.

C*-ALGEBRE VIŠEDIMENZIONALNIH SINGULARNIH INTEGRALNIH OPERATORA SA PREKIDNIM PO DUALNOJ PROMJENLJIVOJ SIMBOLIMA I IZRAČUNAVANJE INDEKSA NETEROVIH OPERATORA (I)

Izvod

U ovom radu se razmatraju C*-algebre višedimenzionalnih SIO sa prekidnim simbolima po dualnoj promjenljivoj. Opisane su reprezentacije takvih C*-algebri, njihove algebre simbola i dati su kriterijumi kada su neki operatori Fredholmovi. Izračunavanje indeksa Fredholmovih operatora uz pomoć operatora Diraka tj. po modifikovanim formulama Kasparova i Mišćenko-Fomenko je predmet drugog dijela ovog rada.

0. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению С*-алгебр неклассических многомерных сингулярных интегральных операторов, классические символы которых допускают разрывы по двойственной переменной. Описаны неприводимые представления таких С*-алгебр, их алгебры символов, а также условия нетеровости составляющих эти С*-алгебры операторов.

Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ - некоторые подалгебры алгебры $L_\infty\left(\mathbf{R}^n\right)$, состоящие из разрывных в том или ином смысле функций. Обозначим через $\Psi(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ С*-алгебру, порожденную всеми действующими в пространстве $L_2\left(\mathbf{R}^n\right)$, n≥1, операторами вида:

$$a(x)I,\ a(x)\in\mathscr{A} \text{ и } F^{-1}b(\xi)F,\ b(\xi)\in\mathscr{B},$$

где I - единичный оператор, а F и F^{-1} соответственно прямое и обратное преобразования Фурье. В классическом случае алгебра символов $\mathrm{Sym}\Psi=\Psi/\mathscr{K}$ алгебры $\Psi=\Psi\left(C\left(\dot{\mathbf{R}}^n\right); H\left(C\left(S^{n-1}\right)\right)\right)$, где $\mathscr{K}$ - идеал всех компактных в $L_2\left(\mathbf{R}^n\right)$ операторов, коммутативна и совпадает с алгеброй $C\left(\dot{\mathbf{R}}^n\times S^{n-1}\right)$. Исследования операторов из алгебр типа $\Psi(\mathscr{A};\mathscr{B})$ для различных разрывных неклассических функциональных алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ выявили следующие существенные факты:

1. Алгебра символов SymΨ для случая, когда хотя бы одна из алгебр $\mathscr{A}$ или $\mathscr{B}$ содержит разрывные функции, обязательно некоммутативна. При n>1 она необходимо имеет бесконечномерные неприводимые представления, характер которых существенно зависит от типа привносимых в классическую ситуацию разрывов.
2. Одновременное допущение разрывных функций в алгебрах $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ приводит к тому, что центр алгебры символов становится

скалярным, и, тем самым, применение локального принципа - основы исследования алгебр $\Psi(\mathscr{A},\mathscr{B})$ становится невозможным.

Таким образом, исследования неклассических алгебр типа $\Psi(\mathscr{A},\mathscr{B})$ естественно распадаются на два больших цикла работ: алгебра $\mathscr{A}$ состоит из разрывных функций, алгебра $\mathscr{B}$ - классическая и алгебра $\mathscr{A}$ - классическая, алгебра $\mathscr{B}$ состоит из разрывных функций. Из работ первого цикла отметим особо работу [9], в которой рассмотрена наиболее сложно устроенная разрывная алгебра $\mathscr{A}$.

Среди работ второго цикла упомянем следующие работы: [2,3,4,10,11,12,13,17,18].

Отметим, однако, что в исследованиях второго цикла не было достигнуто такой полноты изучения и разрывов такой степени сложности, как в работе [9] и данная работа восполняет указанный пробел.

Отметим, что полученные в работе результаты и результаты работы [9], так же как и результаты всех исследований, относящихся к первому и второму циклу работ, не могут быть выведены друг из друга. В силу несимметричности задания алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ это отдельные, подлежащие отдельным исследованиям случаи.

Переход от общего случая к модельным ситуациям основан на применении локального принципа [15,16,21,22,23,25,27].

Основной содержательный момент исследования состоит в описании локальных алгебр и всех их неприводимых представлений. В отличие от работы [9] мы не ограничиваемся указанием всех неприводимых представлений изучаемой алгебры. В работе приводится процедура восстановления алгебры символов $\mathrm{Sym}\Psi$, исходя из локальных алгебр, некоторой канонической процедурой.

При этом алгебра символов описывается в терминах непрерывных операторов-функций на некотором (тесно связанном со спектром C*-алгебры SymΨ) множестве.

Неклассические сингулярные операторы с разрывами в символах по двойственной переменной тесно связаны с теорией теплицевых операторов и изучением операторов Винера-Хопфа. Применение результатов данной работы к этим проблемам составит содержание следующей статьи автора.

1. ОПИСАНИЕ АЛГЕБРЫ $PC\left(S^{n-1},\Lambda_n\right)$

Опишем в этом пункте индукцией по размерности n совокупности Ω_n конфигураций особенностей Λ_n на сфере S^{n-1}. Каждая конфигурация особенностей $\Lambda_n \in \Omega_n$ порождает затем алгебру $PC\left(S^{n-1},\Lambda_n\right)$ разрывных на сфере S^{n-1} функций. Отметим, что близкое по духу описание разрывных в R^n функций содержится в работе [9].

При n=1 $\Lambda_1=\varnothing$.

Пусть n=2. Каждый элемент $\Lambda_2=\left\{\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_m\right\}$ из Ω_2 есть некоторая конечная совокупность точек $\zeta_k, k=\overline{1,m}$, единичной окружности S^1, упорядоченная положительной ориентацией S^1.

Предполагая теперь известным описание совокупностей конфигураций особенностей Ω_k, $k=\overline{1,n-1}$, опишем элементы $\Lambda_n \in \Omega_n$. Пусть $\mathscr{L}_j$, $j=\overline{1,m}$, гладкие ориентируемые попарно непересекающиеся многообразия в S^{n-1} с краем, либо с его частью, либо без края различных (от 0 до n-2) размерностей. Объединение $\Lambda_n = \bigcup_{j=1}^{m} \mathscr{L}_j$ является конфигурацией особенностей из Ω_n, если выполнены следующие условия:

1) Край (граница) $\partial \mathscr{L}_j$ распадается на две (возможно пустые) непересекающиеся части $\partial\mathscr{L}_j = \partial_{\mathscr{L}}\mathscr{L}_j \bigcup \partial_{\Lambda}\mathscr{L}_j$. Множество $\partial_{\mathscr{L}}\mathscr{L}_j$ открыто в топологии $\partial\mathscr{L}_j$ и принадлежит $\mathscr{L}_j$. Множество $\partial_{\Lambda}\mathscr{L}_j$ замкнуто, не принадлежит $\mathscr{L}_j$ и является объединением некоторых $\mathscr{L}_j \subset \Lambda_n$.

2) Пусть $\zeta_0 \in Int\mathscr{L}_j$ и U_0 - некоторая достаточно малая окрестность точки ζ_0 в S^{n-1}. Пусть $\mathscr{L}_j(U_0) = \mathscr{L}_j \bigcap U_0$. Совокупность всех $\mathscr{L}_i(U_0) = \mathscr{L}_i \bigcap U_0$ (i≠j) таких, что $\partial \mathscr{L}_i \bigcap U_0 \supset \mathscr{L}_j(U_0)$ обозначим через $st(\mathscr{L}_j(U_0))$ и назовем звездой множества $\mathscr{L}_j(U_0)$. Окрестность U_0 выберем настолько малой, чтобы U_0 содержало только те $\mathscr{L}_i(U_0)$, которые входят в звезду $st(\mathscr{L}_j(U_0))$, и чтобы $\partial \mathscr{L}_i \bigcap U_0 = \mathscr{L}_j(U_0)$ для всех $\mathscr{L}_i(U_0) \in st(\mathscr{L}_j(U_0))$.

3) Существует непрерывно-дифференцируемое отображение $H_{\zeta_0}(\zeta)$ окрестности $U_0 \subset S^{n-1}$ в некоторую окрестность $V_0 \subset S^{n-1}$ такое, что индуцированное отображение $h_{\zeta_0}(\xi) = |\xi| \cdot H_{\zeta_0}\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$ конуса $K(U_0)$ в конус $K(V_0)$ обладает следующими свойствами:

a) $h_{\zeta_0}(\varsigma_0) = \varsigma_0$

б) Матрица Якоби $\mathcal{J}_{h_{\zeta_0}}(\zeta_0)$ отображения h_{ζ_0} в точке ζ_0 является единичной матрицей.

в) Обозначим через $T_{\zeta_0}K(\mathcal{L}_j(U_0))$ касательное пространство к конусу $K(\mathcal{L}_j(U_0))$ в точке ζ_0. Тогда

$$h_{\zeta_0}:K(\mathcal{L}_j(U_0))\xrightarrow{\text{íà}}T_{\zeta_0}K(\mathcal{L}_j(U_0))\bigcap K(V_0).$$

г) Пусть $\mathcal{L}_j$ имеет коразмерность k в S^{n-1} и $\mathbf{R}^k(\zeta_0)$ - нормальное пространство к конусу $K(\mathcal{L}_j(U_0))$ в точке ζ_0, $S^{k-1}(\zeta_0)$ - единичная сфера в $\mathbf{R}^k(\zeta_0)$. Тогда для всех $\mathcal{L}_i(U_0)\in st(\mathcal{L}_j(U_0))$ имеем

$$h_{\zeta_0}:K(\mathrm{L}_i(U_0))\xrightarrow{\text{íà}}$$
$$\left[K_{\mathbf{R}^n}\left(K_{\mathbf{R}^k(\zeta_0)}\left(h_{\zeta_0}(K(\mathrm{L}_i(U_0)))\bigcap S^{k-1}(\zeta_0)\right)\times T_{\zeta_0}\mathrm{L}_j(U_0)\right)\right]\bigcap K(V_0).$$

4) Множество $h_{\zeta_0}\left(K\left(st(\mathcal{L}_j(U_0))\right)\right)\bigcap S^{k-1}(\zeta_0)$ есть некоторая конфигурация особенностей $\Lambda_k(\zeta_0)\in\Omega_k$.

Пусть $\Lambda_n\in\Omega_n$ - некоторая конфигурация особенностей на S^{n-1}. Опишем индукцией по размерности n алгебру $\mathrm{PC}(S^{n-1},\Lambda_n)$ разрывных на сфере S^{n-1} функций.

При n=1 алгебра $PC(S^0,\varnothing)=C(S^0)\cong\mathbf{C}^2$ есть алгебра непрерывных на сфере $S^0=\{-1,1\}$ функций.

Пусть n=2 и $\Lambda_2=\{\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_m\}\in\Omega_2$. Алгебра $\mathrm{PC}(S^1,\Lambda_2)$ есть алгебра всех непрерывных в $S^1\backslash\Lambda_2$ функций $b(\zeta)$, имеющих односторонние предельные значения $b(\zeta_k-0)$ и $b(\zeta_k+0)$ в точках множества Λ_2.

Считаем известными описания алгебр $\mathrm{PC}(S^{k-1},\Lambda_k)$ для

$k = \overline{1, n-1}$.

Пусть теперь $\Lambda_n = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \mathscr{L}_j \in \Omega_n$, опишем алгебру $PC(S^{n-1}, \Lambda_n)$.

Введем

$\partial_{\mathscr{L}} \Lambda_n = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \partial_{\mathscr{L}} \mathscr{L}_j$. Функции $b(\zeta) \in PC(S^{n-1}, \Lambda_n)$ непрерывны в $S^{n-1} \setminus (\Lambda_n \setminus \partial_{\mathscr{L}} \Lambda_n)$, их разрывы сосредоточены на $\Lambda_n \setminus \partial_{\mathscr{L}} \Lambda_n$. Опишем эти разрывы. Пусть $\zeta_0 \in Int \mathscr{L}_j \subset \Lambda_n \setminus \partial_{\mathscr{L}} \Lambda_n$, и $\operatorname{codim} \mathscr{L}_j = k$. Выберем окрестность U_0 точки ζ_0 такую, что $\overline{U}_0' \subset U_0$ и пусть $V_0' = H_{\zeta_0}(U_0')$. Отображение $h_{\zeta_0}: K(U_0') \to K(V_0')$ порождает отображение функциональных алгебр, определенное формулой $(h_{\zeta_0}^{*} c)(\xi) = c(h_{\zeta_0}(\xi))$. Тогда имеет место изоморфизм

$$h_{\zeta_0}^{*}: \left[H\left(PC\left(S^{k-1}(\zeta_0)\right), \Lambda_k(\varsigma_0) \otimes C\left(T\left(\mathrm{L}_j(U_0)\right)\right)\right)\right]\Big|_{\overline{V}_0'} + C\left(\overline{V}_0'\right) \to$$
$$PC\left(S^{n-1}, \Lambda_n\right)\Big|_{\overline{U}_0'}.$$

2. ОПИСАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ АЛГЕБР

1°. Пусть $\Lambda_n \in \Omega_n$ - некоторая конфигурация особенностей в S^{n-1}. Введем алгебру $PC(S^{n-1}, \Lambda_n)$. Через $H(PC(S^{n-1}, \Lambda_n))$ будем обозначать алгебру однородных степени нуль функций в R^n, сужения которых на единичную сферу S^{n-1} принадлежат алгебре $PC(S^{n-1}, \Lambda_n)$.

Алгебра $\mathscr{R} = \Psi\left(C\left(\dot{\mathbf{R}}^n\right), H\left(PC\left(S^{n-1}, \Lambda_n\right)\right)\right)$ порождена всеми действующими в пространстве $L_2(\mathbf{R}^n)$ операторами вида $a(x)I, a(x) \in C\left(\dot{\mathbf{R}}^n\right), \dot{\mathbf{R}}^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ - одноточечная компактификация пространства $\mathbf{R}^n$, и операторами вида

$F^{-1}b(\xi)F$, где $b(\xi)\in H(PC(S^{n-1}, \Lambda_n))$,

$$\left(F\varphi\right)(\xi)=\left(2\pi\right)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{\mathbf{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx,$$

$$\left(F^{-1}\varphi\right)(x)=\left(2\pi\right)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{\mathbf{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\psi(\xi)d\xi$$

- соответственно прямое и обратное преобразование Фурье в $\mathbf{R}^n$.

Лемма 1:

Алгебра $\mathscr{R}$ содержит идеал $\mathscr{K}$ компактных операторов в $L_2(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство:

Поскольку

$$H\left(C\left(S^{n-1}\right)\right)\subset H\left(PC\left(S^{n-1},\Lambda_n\right)\right),$$

то алгебра $\Psi\left(C\left(\dot{\mathbf{R}}^n\right),H\left(C\left(S^{n-1}\right)\right)\right)$ классических многомерных сингулярных интегральных операторов Михлина-Кальдерона-Зигмунда (МСЗ) является подалгеброй изучаемой алгебры $\mathscr{R}$. Отсюда следует утверждение леммы.

2^0. Для описания алгебры символов Sym $\mathscr{R}=\mathscr{R}/\mathscr{K}=\hat{\mathscr{R}}$ алгебры $\mathscr{R}$ воспользуемся локальным принципом. Построения основаны на теории С*-расслоений. Напомним, что множество всех ограниченных непрерывных сечений С*-расслоения $\xi=(p, E, T)$ $(p: E\to T)$, снабженное покомпонентными операциями и нормой $\|\sigma\|=\sup\limits_{t\in T}\|\sigma(t)\|$, является С*-алгеброй. Будем обозначать ее $\Gamma^b(\xi)$.

Пусть $\mathscr{A}-C^*$ алгебра и $\mathscr{J}_T=\left\{\mathscr{J}(t):t\in T\right\}$ - некоторая система ее двусторонних замкнутых идеалов, индексированная точками некоторого множества T. Для каждого $t\in T$ введем фактор алгебру

$\mathscr{A}(t)=\mathscr{A}/\mathscr{J}(t)$ Для любого элемента $a \in \mathscr{A}$ через a(t) будем обозначать его образ в $\mathscr{A}(t)$. Пусть $E=\coprod_{t\in T} A(t)$ - дизъюнктное объединение алгебр $\mathscr{A}(t)$ и $p : E \to T$ - отображение, определенное правилом $p : a(t) \to t$. Тогда множества E и T могут быть снабжены топологиями, превращающими тройку $\xi = (p, E, T)$ в C*-расслоение. Назовем его каноническим C*-расслоением, определяемым C*-алгеброй $\mathscr{A}$ и системой идеалов $\mathscr{J}_T$.

Каждый элемент $a \in \mathscr{A}$ порождает сечение $\hat{a} : T \to E$ расслоения ξ правилом $\hat{a}: t \to a(t)$. Обозначим через $\hat{\mathscr{A}}$ совокупность всех сечений вида $\hat{a}$.

Теорема 2.

Пусть $\mathscr{A}$ - C^* -алгебра, $\mathscr{J}_T = \{\mathscr{J}(t): t \in T\}$ - некоторая система ее замкнутых двусторонних идеалов, $\xi = (p, E, T)$ - каноническое C*-расслоение, определяемое $\mathscr{A}$ и $\mathscr{J}_T$, $\Gamma^b(\xi)$ - C*-алгебра, определяемая расслоением ξ.

Тогда отображение

$$\pi : a \in \mathscr{A} \to \hat{a} \in \Gamma^b(\xi)$$

является морфизмом C*-алгебр $\mathscr{A}$ и $\Gamma^b(\xi)$, при котором

1) $Ker\pi = \bigcap_{t\in T} \mathscr{J}(t)$,

2) $\mathrm{Im}\pi = \hat{\mathscr{A}}$.

В частности, отображение $\pi : \mathscr{A} \to \hat{\mathscr{A}}$ является изометрическим изоморфизмом тогда и только тогда, когда

$$\bigcap_{t\in T}\mathcal{J}(t)=\{0\}.$$

Описанная конструкция С*-расслоения, определяемого С*-алгеброй и системой идеалов, совместно с теоремой дает общую концепцию локальных принципов для С*-алгебр. В случае $\bigcap_{t\in T}\mathcal{J}(t)=\{0\}$. имеем систему локальных алгебр $\mathcal{A}$(t) параметризованную точками топологического пространства Т. Естественные проекции $\pi_t : \mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ отождествляют локально эквивалентные в точке t элементы алгебры $\mathcal{A}$. Элемент $\pi_t(a) = a(t)$ является локальным представителем элемента $a \in \mathcal{A}$ в алгебре $\mathcal{A}$(t). При этом $\|a\| = \sup\limits_{t\in T}\|a(t)\|$ и алгебра $\mathcal{A}$ восстанавливается по своим локальным описаниям некоторой канонической конструкцией: непрерывными сечениями канонически определенного С*-расслоения над Т. Конкретные типы локальных принципов определяются далее способом выбора системы идеалов.

Локальный принцип Дугласа-Варелы формулируется следующим образом:

Теорема 3.

Пусть $\mathcal{A}$.- С*-алгебра с единицей, Z - некоторая ее центральная коммутативная подалгебра, содержащая единицу $e \in \mathcal{A}$, Т - компакт максимальных идеалов Z. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ изометрически *-изоморфна алгебре всех глобальных непрерывных сечений канонического С*-расслоения, определенного алгеброй $\mathcal{A}$ и системой идеалов $\mathcal{J}_T = \{\mathcal{J}(t) : t\in T\}$, *-расслоения топология Т совпадает с топологией Т, как компакта максимальных идеалов алгебры Z.

Доказательство.

Действительно, доказывается (мы этого не будем делать),

$$\bigcap_{t\in T}\mathscr{J}(t)=\{0\}$$

поэтому, согласно теореме 2, алгебра $\mathscr{A}$ изометрически *-изоморфна С*-алгебре $\hat{\mathscr{A}}$. Отсюда следует, что $\hat{\mathscr{A}}$ - замкнуто.

Пусть $b(t)\in C(T)$ и $\hat{e}=e(t)$ - единица алгебры $\hat{\mathscr{A}}$, тогда существует $b\in Z$ так, что $\hat{b}=b\hat{e}$, а значит, для любого $\hat{a}\in\hat{\mathscr{A}}$ имеем

$$b\hat{a}=b\hat{e}\hat{a}=\hat{b}\hat{a}\in\hat{\mathscr{A}}.$$

Таким образом, $\hat{\mathscr{A}}$ является C(T)-модулем. Применяя теорему Стоуна-Вейерштрасса для С*-расслоений получается утверждение теоремы.

3^0. Через π будем обозначать далее естественную проекцию π: $\mathscr{R}\to\mathscr{R}/\mathscr{K}=\hat{\mathscr{R}}$. Операторы вида $F^{-1}c(\xi)F$ для $c(\xi)\in H\left(C\left(S^{n-1}\right)\right)$ коммутируют с операторами вида $F^{-1}b(\xi)F$ для $b(\xi)\in H\left(PC\left(S^{n-1},\Lambda_n\right)\right)$ и коммутируют с точностью до компактного слагаемого (см., например, [26]) с операторами умножения a(x)I, для $a(x)\in C\left(\dot{\mathbf{R}}^n\right)$. Поэтому алгебра

$$Z=\pi\left\{F^{-1}c(\xi)F{:}c(\xi)\in H\left(C\left(S^{n-1}\right)\right)\right\}\cong C\left(S^{n-1}\right)$$

является центральной коммутативной подалгеброй С*-алгебры $\hat{\mathscr{R}}$. Локализацию алгебры $\mathrm{Sym}\,\mathscr{R}=\hat{\mathscr{R}}$ будем проводить поэтому по точкам единичной сферы S^{n-1} - компакта максимальных идеалов алгебры Z.

Пусть ζ_0 - произвольная точка S^{n-1}. Через $\mathscr{J}(\zeta_0)$ обозначим максимальный идеал алгебры Z, соответствующий точке ζ_0 компакта максимальных идеалов. Через $\hat{\mathscr{J}}(\zeta_0) = \mathscr{J}(\zeta_0)\ \hat{\mathscr{R}}$ обозначим замкнутый двусторонний идеал алгебры $\hat{\mathscr{R}}$, порожденный идеалом $\mathscr{J}(\zeta_0)$. Тогда локальной алгеброй $\hat{\mathscr{R}}(\zeta_0)$, оответствующей точке $\zeta_0 \in S^{n-1}$, является алгебра $\hat{\mathscr{R}}(\zeta_0) = \hat{\mathscr{R}} / \hat{\mathscr{J}}(\zeta_0)$. Введем естественные гомоморфизмы $\pi_{\zeta_0}: \hat{\mathscr{R}} \to \hat{\mathscr{R}}(\zeta_0)$ и $\nu_{\zeta_0}: \mathscr{R} \xrightarrow{\pi} \hat{\mathscr{R}} \xrightarrow{\pi_{\zeta_0}} \hat{\mathscr{R}}(\zeta_0)$. Отметим, что гомоморфизм ν_{ζ_0} отождествляет локально эквивалентные в точке ζ_0 (см. [15,16]) операторы алгебры $\mathscr{R} = \Psi\left(C\left(\dot{\mathbf{R}}^n\right), H\left(PC\left(S^{n-1}, \Lambda_n\right)\right)\right)$.

4^0. Описания локальных алгебр $\hat{\mathscr{R}}(\zeta_0)$ различны для различных точек $\zeta_0 \in S^{n-1}$.

1) Пусть $\zeta_0 \in S^{n-1} \setminus (\Lambda_n \setminus \partial_{\mathscr{L}} \Lambda_n)$. Тогда точка ζ_0 является точкой непрерывности функций $b(\xi) \in H\left(PC\left(S^{n-1}, \Lambda_n\right)\right)$, и следовательно, для функций $b(\xi) \in H\left(PC\left(S^{n-1}, \Lambda_n\right)\right)$ имеют место локальные эквивалентности $F^{-1} b(\xi) F \overset{\zeta_0}{\sim} F^{-1} b(\zeta_0) F = b(\zeta_0) I$.

Кроме того, для $a(x) \in C(\mathbf{R}^n)$ имеем (см. [15,16])

$$a(x) I \overset{\zeta_0}{\sim} a(x) I.$$

Поэтому $\hat{\mathscr{R}}(\zeta_0) = \Psi\left(C\left(\dot{\mathbf{R}}^n\right), \mathbf{C}\right) \cong C\left(\dot{\mathbf{R}}^n\right)$ и гомоморфизм $\nu_{\zeta_0}: \mathscr{R} \to \hat{\mathscr{R}}(\zeta_0) = C\left(\dot{\mathbf{R}}^n\right)$ порождается следующим отображением образующих алгебры $\mathscr{R}$:

$$\nu_{\zeta_0}: a(x)I \to a(x) \in C\left(\dot{\mathbf{R}}^n\right)$$

$$\nu_{\zeta_0}: F^{-1}b(\xi)F \to b(\zeta_0) \in \mathbf{C}.$$

2) Пусть теперь $\zeta_0 \in Int\mathscr{L}_j \subset \Lambda_n \setminus \partial_{\mathscr{L}}\Lambda_n \subset S^{n-1}$ и пусть $codim\,\mathscr{L}_j = k$. Представим $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^k(\zeta_0) \times \mathbf{R}^{n-k}$, где $\mathbf{R}^k(\zeta_0)$ - нормальное пространство к конусу $K(\mathscr{L}_j)$ в точке ζ_0. Координаты точек из $\mathbf{R}^n$ будем, в этом случае, записывать следующим образом:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_{\zeta_0}, z_{\zeta_0}), y_{\zeta_0} \in \mathbf{R}^k(\zeta_0), z_{\zeta_0} \in \mathbf{R}^{n-k};$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = (\eta_{\zeta_0}, \theta_{\zeta_0}), \eta_{\zeta_0} \in \mathbf{R}^k(\zeta_0), \theta_{\zeta_0} \in \mathbf{R}^{n-k}.$$

Введем теперь участвующие в описании алгебры $\mathrm{PC}(\mathrm{S}^{n-1}, \Lambda_n)$ окружности U_0', V_0' гомеоморфизм h_{ζ_0} и конфигурацию особенностей $\Lambda_k(\zeta_0) \subset S^{k-1}(\zeta_0) \subset \mathbf{R}^k(\zeta_0)$.

Пусть $b(\xi)$ - произвольная функция из $\mathrm{H}(\mathrm{PC}(\mathrm{S}^{n-1}, \Lambda_n))$. Функция $b(\xi)$, как легко видеть, однозначно определяет функцию $\tilde{b}_{\zeta_0}(\eta_{\zeta_0}) \in \mathrm{H}(\mathrm{PC}(\mathrm{S}^{k-1}(\zeta_0), \Lambda_k(\zeta_0)))$ такую, что функция

$$\left[b(h_{\zeta_0}^{-1}(\zeta_0)) - (\tilde{b}_{\zeta_0} \otimes 1)(\zeta) \right]_{|V'_{\zeta_0}}$$

непрерывна в точке $\zeta_0 \in V_0'$ и обращается в нуль в этой точке.

Обозначим через $b_{\zeta_0}(\xi)$ произвольную функцию из $\mathrm{H}(\mathrm{PC}(\mathrm{S}^{n-1}, \Lambda_n))$, для которой

$$b_{\zeta_0}(\zeta_0)_{|U_0'} = (\tilde{b}_{\zeta_0} \otimes 1)(h_{\zeta_0}(\zeta))_{|U_0'}.$$

Разность $b(\xi)-b_{\zeta_0}(\xi)$, как легко видеть, непрерывна в точке ζ_0 и обращается в нуль в этой точке. А поэтому в точке ζ_0 имеет место локальная эквивалентность

$$F^{-1}b(\xi)F \sim F^{-1}b_{\zeta_0}(\xi)F.$$

Теорема 4.

Локальная алгебра $\hat{\mathscr{R}}(\zeta_0)$ изометрически вложена в алгебру

$$C(\dot{\mathbf{R}}^{n-k},\Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^{k});H(PC(S^{k-1}(\zeta_0),\Lambda_k(\zeta_0))))).$$

Вложение

$$\gamma_{\zeta_0}:\hat{\mathscr{R}}(\zeta_0)\to C(\dot{\mathbf{R}}^{n-k},\Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^{k});H(PC(S^{k-1}(\zeta_0),\Lambda_k(\zeta_0))))).$$

порождено следующим отображением образующих алгебры $\hat{\mathscr{R}}(\zeta_0)$:

$\gamma_{\zeta_0}\nu_{\zeta_0}(a(x)I)=a\left(y_{\zeta_0},z_{\zeta_0}\right)I, z_{\zeta_0}\in\dot{\mathbf{R}}^{n-k}$

$\gamma_{\zeta_0}\nu_{\zeta_0}(F^{-1}b(\xi)F)=F_{(k)}^{-1}\widetilde{b}_{\zeta_0}\left(\eta_{\zeta_0}\right)F_{(k)}, z_{\zeta_0}\in\dot{\mathbf{R}}^{n-k}$.

Замечание 1.

Функции $a(x)\in C\left(\dot{\mathbf{R}}^{n}\right)$ продолжаются до функций $a\left(y_{\zeta_0},z_{\zeta_0}\right)\in C\left(\dot{\mathbf{R}}^{k}\left(\zeta_0\right)\times\dot{\mathbf{R}}^{n-k}\right)$ следующим образом

$$a\left(y_{\zeta_0},z_{\zeta_0}\right)=\begin{cases} a(x),(y_{\zeta_0},z_{\zeta_0})=x\neq\infty \\ a(\infty),(y_{\zeta_0},z_{\zeta_0})=(\infty,z_{\zeta_0}) \\ a(\infty),(y_{\zeta_0},z_{\zeta_0})=(y_{\zeta_0},\infty) \\ a(\infty),(y_{\zeta_0},z_{\zeta_0})=(\infty,\infty). \end{cases}$$

Замечание 2.

Операторы из алгебры $\Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^{k});H(PC(S^{k-1}(\zeta_0),\Lambda_k(\zeta_0))))$ действуют в пространстве $L_2(\mathbf{R}^k)=L_2(\mathbf{R}^k(\zeta_0))$.

Доказательство.

Для доказательства теоремы 4 используем понятие квазиэквивалентности (см. [15,16], см. также [17] § 1, теорема 1.5) и результаты указанных работ.

Пусть $a(x) \in C(\dot{\mathbf{R}}^n)$, из теоремы 1.5 работы [17], примененной к оператору свертки $\mathrm{F}a(x)\mathrm{F}^{-1}$ непосредственно вытекает, что имеет место следующая квазиэквивалентность

$$a(x)I \overset{\zeta_0}{\sim} h_{\zeta_0} \overset{\zeta_0}{\sim} a(x)I.$$

Кроме того, из соотношения

$$b_{\zeta_0}(\xi)_{|K(\dot{U_0})} = (\widetilde{b}_{\zeta_0} \otimes 1)(h_{\zeta_0}(\xi))_{|K(\dot{U_0})}$$

следует, что

$$F^{-1} b_{\zeta_0}(\xi) F \overset{\zeta_0}{\sim} h_{\zeta_0} \overset{\zeta_0}{\sim} F^{-1}(\widetilde{b}_{\zeta_0} \otimes 1)(\xi) F.$$

Далее

$$F^{-1}(\widetilde{b}_{\zeta_0} \otimes 1)(\xi) F = \left(F_{(k)}^{-1} \otimes F_{(n-k)}^{-1}\right)\left(\widetilde{b}_{\zeta_0}\left(\eta_{\zeta_0}\right) \otimes 1\right)\left(F_{(k)} \otimes F_{(n-k)}\right) =$$
$$= F_{(k)}^{-1} \widetilde{b}_{\zeta_0}\left(\eta_{\zeta_0}\right) F_{(k)} \otimes I.$$

Таким образом,

$$F^{-1} b(\xi) F \overset{\zeta_0}{\sim} F^{-1} b_{\zeta_0}(\xi) F \overset{\zeta_0}{\sim} h_{\zeta_0} \overset{\zeta_0}{\sim} F_{(k)}^{-1} b_{\zeta_0}\left(\eta_{\zeta_0}\right) F_{(k)} \otimes I.$$

А тогда локальная алгебра $\mathscr{R}(\zeta_0)$ (которая порождена всеми действующими в $L_2(\mathbf{R}^n)$ операторами вида $a(x)I$ и $F^{-1} b_{\zeta_0}(\xi) F$) изометрически изоморфна алгебре $\mathfrak{a}(\zeta_0)$, порожденной действующими в $L_2(\mathbf{R}^n)$ операторами

$$a(x)I \text{ и } F_{(k)}^{-1}\tilde{b}_{\zeta_0}\left(\eta_{\zeta_0}\right)F_{(k)}\otimes I.$$

Таким образом,

$$\widetilde{R}(\zeta_0) \cong \mathfrak{a}(\zeta_0) = \Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^n); H(PC(S^{k-1}(\zeta_0), \Lambda_k(\zeta_0)))\otimes 1\cdot\mathbf{C}) \subset$$

$$\subset \Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^k \times \dot{\mathbf{R}}^{n-k}); H(PC(S^{k-1}(\zeta_0), \Lambda_k(\zeta_0)))\otimes 1\cdot\mathbf{C}) =$$

$$= \Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^{n-k})\otimes C(\dot{\mathbf{R}}^{n-k}); H(PC(S^{k-1}(\zeta_0), \Lambda_k(\zeta_0)))\otimes 1\cdot\mathbf{C}) \cong$$

$$\cong C\left(\dot{\mathbf{R}}^{n-k}\right)\otimes\Psi\left(C\left(\dot{\mathbf{R}}^k\right); H\left(PC\left(S^{k-1}(\varsigma_0), \Lambda_k(\varsigma_0)\right)\right)\right)\cong$$

$$\cong C(\dot{\mathbf{R}}^{n-k}, \Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^k); H(PC(S^{k-1}(\zeta_0), \Lambda_k(\zeta_0))))).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно проследить за отображением образующих алгебры $\hat{\mathscr{R}}(\zeta_0)$.

Замечание 3. Переход от "основных" координат точек $x\in\mathbf{R}^n$ к координатам $\left(y_{\zeta_0}, z_{\zeta_0}\right)$ можно осуществить с помощью поворота (около начала координат) основной системы координат.

Обозначим через $O(\zeta)$ вращение пространства R^n, а через $O_{x_{\zeta,j}}$ образ O_{x_j} при вращении $O(\zeta)$, $j=\overline{1,n}$. Предполагаем при этом, что оси $\left\{O_{x_{\zeta,j}}\right\}_{j=1}^k$ порождают пространство $\mathbf{R}^k(\zeta)$, а оси $\left\{O_{x_{\zeta,j}}\right\}_{j=k+1}^k$ порождают $\mathbf{R}^{n-k}$. Символом $O(\zeta)$ будем обозначать также матрицу из $SO(n, R)$, определяющую вращение $O(\zeta)$. Предполагаем далее, что вращения $O(\zeta)$, $\zeta\in\Lambda_n\setminus\partial_{\mathscr{L}}\Lambda_n$ выбраны таким образом, что матрица-функция $O(\zeta)$ непрерывна на каждом $\mathscr{L}_j\subset\Lambda_n$. Такой выбор возможен в силу ориентируемости $\mathscr{L}_j$.

3. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ. АЛГЕБРА СИМВОЛОВ

Приведенные в предыдущем параграфе описания локальных алгебр позволяют указать все неприводимые представления C*-алгебры $\mathscr{R} = \Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^n); H(PC(S^{n-1}, \Lambda_n)))$. Описание неприводимых представлений основано на следующих общих фактах.

1) Пусть $\mathscr{A}$ - некоторая C*-алгебра, $\mathscr{J}$ - ее замкнутый двусторонний идеал и π - неприводимое представление C*-алгебры $\mathscr{A}$. Тогда либо $\pi(\mathscr{J})=\{0\}$, либо $\pi(\mathscr{J})\neq\{0\}$.

Во втором случае сужение $\pi|_{\mathscr{J}}$ является неприводимым представлением идеала $\mathscr{J}$ и (см. [5] 2.11.2) таким образом могут быть получены все неприводимые представления идеала $\mathscr{J}$. Более того, представление

$$\pi \to \pi|_{\mathscr{J}}$$

для представлений π таких, что $\pi(\mathscr{J})\neq\{0\}$ является биекцией на пространство всех неприводимых представлений идеала $\mathscr{J}$. В первом случае (когда $\pi(\mathscr{J})=\{0\}$), имеем

$$\forall y \in \mathscr{J} \qquad \pi(x+y)=\pi(x)+\pi(y)=\pi(x)$$

и правило

$$\hat{\pi}(\hat{x}) = \hat{\pi}(x + \mathscr{J}) = \pi(x)$$

корректно определяет представление $\hat{\pi}$ фактор-алгебры $\mathscr{A}/\mathscr{J}$. Полученное представление неприводимо, и соответствие

$$\pi \to \hat{\pi}$$

для представлений π таких, что $\pi(\mathscr{J})=\{0\}$ является биекцией на пространство всех неприводимых представлений фактор алгебры

$\mathscr{A}/\mathscr{J}$.

Таким образом, для описания всех неприводимых представлений C*-алгебры $\mathscr{A}$ достаточно описать все неприводимые представления идеала $\mathscr{J}$ фактор-алгебры $\mathscr{A}/\mathscr{J}$.

2) В нашем случае считаем

$$\mathscr{A} = \mathscr{R} = \Psi(C(\mathbf{R}^n); H(PC(S^{n-1}, \Lambda_n))), \mathscr{J} \triangleq \mathscr{K}.$$

Как известно (см. например, [5], 4.15), всякое ненулевое неприводимое представление идеала $\mathscr{K}$ эквивалентно тождественному. Поэтому тождественное представление алгебры $\mathscr{R}$ (продолжение тождественного представления идеала $\mathscr{K}$) неприводимо, а все остальные неприводимые представления C*-алгебры $\mathscr{R}$ однозначно определяются неприводимыми представлениями алгебры символов

$$\mathrm{Sim}\, \mathscr{R} = \mathscr{R}/\mathscr{K}.$$

Тем самым задача сводится к описанию неприводимых представлений алгебры символов.

3) Теорема 5.

Пусть $\mathscr{A}$ - C*-алгебра с единицей e, Z - некоторая ее центральная коммутативная подалгебра, содержащая единицу $e \in \mathscr{A}$, T=spZ - компакт максимальных идеалов алгебры Z, ξ=(p, E, T) - каноническое C*-расслоение, определенное алгеброй $\mathscr{A}$, (тогда $\mathscr{A} \cong \Gamma(\xi)$). Для каждой точки $t \in T$ и представления $\pi \in \hat{\mathscr{A}}(t)$ введем неприводимое представление C*-алгебры $\mathscr{A}$

$$\rho_\pi\colon\ a \to a(t) \to \pi(a(t)).$$

Тогда отображение $\pi \to \rho_\pi$ отождествляет объединение пространств неприводимых представлений $\bigcup\limits_{t \in T} \hat{\mathscr{A}}(t)$ со спектром $\hat{\mathscr{A}}$ алгебры $\mathscr{A}$.

Доказательство.

Действительно, пусть t_1 t_2 - две различные точки T, а π_1 и π_2 - неприводимые представления соответственно алгебр $\mathscr{A}(t_1)$ и $\mathscr{A}(t_2)$. Покажем, что порождаемые ими представления ρ_{π_1} и ρ_{π_2} C*-алгебры $\mathscr{A}$ не могут быть эквивалентны. Из этого будет следовать, что отображение

$$\pi \to \rho_\pi$$

инъективно.

Выберем элемент $a \in \mathscr{A}$ такой, что $\pi_1(a(t_1)) \neq 0$ и элемент $b \in Z$ такой, что его преобразование Гельфанда - функция $b(t)$ обладает свойствами

$$b(t_1)=1, \ \ b(t_2)=0.$$

Тогда $ba \in \mathscr{A}$ и для представлений ρ_{π_1} и ρ_{π_2} имеем

$$\rho_{\pi_1}(ba)=\pi_1(b(t_1)\,a(t_1)) \neq 0$$

$$\rho_{\pi_2}(ba)=\pi_2(b(t_2)\,a(t_2))=0,$$

т.о., представления ρ_{π_1} и ρ_{π_2} не эквивалентны, и отображение $\pi \to \rho_\pi$ инъективно. Покажем теперь, что оно сюръективно, т.е. для каждого неприводимого представления ρ C*-алгебры $\mathscr{A}$ существует точка $t \in T$ и представление π C*-алгебры $\mathscr{A}(t)$, что $\rho=\rho_\pi$. А для этого, как легко видеть, достаточно показать, что существует точка $t \in T$, такая, что

$$\hat{\mathscr{J}}(t) \subset Ker\rho \ \ (\rho(\hat{\mathscr{J}}(t)) = \{0\}).$$

В работе [27] доказано, что для каждого примитивного идеала алгебры $\mathscr{A}$, а значит и для $P=Ker\rho$, существует точка $t \in T$ такая, что $P \cap Z = \mathscr{J}(t)$, а тогда для этого t

$$\hat{\mathscr{J}}(t) \subset P = Ker\rho.$$

Предложение доказано.

Итак, для описания неприводимых представлений алгебры символов Sym $\mathscr{R} = \hat{\mathscr{R}}$ достаточно описать неприводимые представления ее локальных алгебр $\hat{\mathscr{R}}(\zeta_0), \zeta_0 \in S^{n-1}$.

4) В случае, когда $\zeta_0 \in S^{n-1} \setminus (\Lambda_\partial \setminus \partial_{\mathscr{L}} \Lambda_n)$, локальная алгебра $\hat{\mathscr{R}}(\zeta_0)$ коммутативна и изоморфна $C(\dot{\mathbf{R}}^n)$. Все ее неприводимые представления одномерны и параметризуются точками $x \in \dot{\mathbf{R}}^n$. Таким образом, представление исходной алгебры $\mathscr{R}$, соответствующее точке $x_0 \in \dot{\mathbf{R}}^n$ (и, разумеется, точке ζ_0, определяющей локальную алгебру) есть гомоморфизм

$$\pi_{x_0, \zeta_0} : \mathscr{R} \to \mathbf{C},$$

определенный на образующих алгебры $\mathscr{R}$ правилом

$$\pi_{x_0, \zeta_0} : a(x)I \to a(x_0),$$
$$\pi_{x_0, \zeta_0} : F^{-1}b(\xi)F \to b(\zeta_0).$$

В случае, когда $\zeta_0 \in \Lambda_n \setminus \partial_{\mathscr{L}} \Lambda_n$, локальная алгебра $\hat{\mathscr{R}}(\zeta_0)$ изометрически вложена в алгебру

$$C(\dot{\mathbf{R}}^{n-k}, \Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^k); H(PC(S^{k-1}(\zeta_0); \Lambda_k(\zeta_0))))).$$

Из теоремы 10.4.3 книги [5] непосредственно следует, что все неприводимые представления алгебры вектор-функций

$$C(\dot{\mathbf{R}}^{n-k}, \Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^k); H(PC(S^{k-1}(\zeta_0); \Lambda_k(\zeta_0)))))$$

получаются фиксированием точки $z_{\zeta_0} \in \dot{\mathscr{R}}^{n-k}$ и выбором затем неприводимого представления алгебры

$$\Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^k); H(PC(S^{k-1}(\zeta_0); \Lambda_k(\zeta_0)))).$$

Таким образом, мы вернулись к исходной задаче (понизив при этом размерность n до величины k) об описании неприводимых представлений алгебры

$$\Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^k); H(PC(S^{k-1}(\zeta_0); \Lambda_k(\zeta_0)))).$$

типа исходной алгебры $\mathscr{R}$.

Повторяя описанную выше процедуру конечное число раз (понижая размерность до k=1, либо до случая $\Lambda_k = \phi$) получаем индуктивную процедуру описания всех неприводимых представлений исходной алгебры $\mathscr{R}$.

2^0. Опишем в этом пункте алгебру символов Sym $\mathscr{R}$ для изучаемой алгебры

$$\mathscr{R} = \Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^n); H(PC(S^{n-1}, \Lambda_n))).$$

В нашем случае, согласно пункту 3.1^0, выбираем $\mathscr{A} = \hat{\mathscr{R}} = Sym\mathscr{R} = \mathscr{R} / \mathscr{K}$ и (первоначальную) локализацию по точкам $\zeta_0 \in S^{n-1}$. В этом случае каждая локальная алгебра $\hat{\mathscr{R}}(\zeta_0)$ является алгеброй непрерывных (оператор) - функций, а значит, допускает дальнейшую локализацию.

В случае $\zeta_0 \in S^{n-1} \setminus (\Lambda_n \setminus \partial_{\mathscr{L}} \Lambda_n)$ алгебра $\hat{\mathscr{R}}(\zeta_0)$ допускает локализацию по точкам $x_0 \in \dot{\mathbf{R}}^n$, а в случае $\zeta_0 \in Int\mathscr{L}_j \subset \Lambda_n \setminus \partial_{\mathscr{L}} \Lambda_n$ алгебра $\hat{\mathscr{R}}(\zeta_0)$ допускает локализацию по точкам $z_{\zeta_0} \in \mathbf{R}^{n-k}$ (мы считаем, что $co\dim\mathscr{L}_j = k$).

Через π_{x_0,ζ_0}, в первом случае, и через $\pi_{z_{\zeta_0},\zeta_0}$ во втором, обозначим отображения

$$\pi_{x_0,\zeta_0}: \mathscr{R} \to \hat{\mathscr{R}}(\zeta_0) \to \mathrm{C}$$

$$\pi_{z_{\zeta_0,\zeta_0}}: \mathscr{R} \to \hat{\mathscr{R}}(\zeta_0) \to \Psi(C(\mathbf{R}^k); H(PC(S^{k-1}, \Lambda_k(\zeta_0))))$$

где первая срелка - естественная проекция на локальную алгебру, соответствующую точке $\zeta_0 \in S^{n-1}$, а вторая - фиксирование точки x_0 или z_{ζ_0}, соответственно, в алгебре непрерывных (оператор)-функций.

Введем обозначения:

пусть $\Gamma_0 = S^{n-1} \setminus (\Lambda_n \setminus \partial_{\mathscr{L}} \Lambda_n)$, а через Γ_k обозначим объединения $\mathscr{L}_j \setminus \partial_z \mathscr{L}_j$, входящих в Λ_n и имеющих коразмерность k.

Тогда в процедуре восстановления алгебры символов Sym $\mathscr{R}$ возьмем:

$$T = \bigcup_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}^{n-k} \times \Gamma_k .$$

Соответствующая система идеалов $\mathscr{J}_T$ состоит из следующих идеалов: для точки $t = (z_\zeta, \zeta) \in \dot{\mathbf{R}}^{n-k} \times \Gamma_k$ при k>0 и t=(x, ζ) при k=0

$$\mathscr{J}(\mathrm{t}) = \mathrm{Ker}\pi_{\mathrm{t}}.$$

Эта система идеалов, как легко видеть, удовлетворяет требуемому свойству.

$$\bigcap_{t \in T} \mathscr{J}(t) = \mathscr{K}.$$

Обозначим через σ_0 алгебру всех непрерывных и ограниченных на T оператор-функций σ со следующими значениями

$$\sigma \in \begin{cases} \mathbf{C}, (x,\zeta) \in \dot{\mathbf{R}}^n \times \Gamma_0 \\ \Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^k); H(PC(S^{k-1}, \Lambda_k(\zeta)))), (z_\zeta, \zeta) \in \dot{\mathbf{R}}^{n-k} \times \Gamma_k, \end{cases}$$

здесь $x = (y_\zeta, z_\zeta) \in \dot{\mathbf{R}}^n \subset \dot{\mathbf{R}}^k \times \dot{\mathbf{R}}^{n-k}, k = \overline{1, n-1}.$

Определим гомоморфизм $\mathrm{sym}_0 : \mathscr{R} \to \sigma_0$ на образующих алгебры $\mathscr{R}$ следующим образом:

$$sym_0 a(x) I = \begin{cases} a(x),\ (x,\zeta) \in \dot{\mathbf{R}}^n \times \Gamma_0 \\ a(y_\zeta, z_\zeta) I, (z_z, \zeta) \in \dot{\mathbf{R}}^{n-k} \times \Gamma_k, k = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

$$sym_0 F^{-1} b(\xi) F = \begin{cases} b(\zeta),\ (x,\zeta) \in \dot{\mathbf{R}}^n \times \Gamma_0 \\ F_{(k)}^{-1} \widetilde{b}_\zeta(\eta_\zeta) F_{(k)},\ (z_\zeta, \zeta) \in \dot{\mathbf{R}}^{n-k} \times \Gamma_k, k = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

здесь функция $\widetilde{b}_\zeta(\eta_\zeta) \in H(PC(S^{k-1}(\zeta), \Lambda_k(\zeta)))$ описана в 2.4^0, раздел 2), она характеризует предельные значения функции $b(\zeta)$ в точке $\zeta_0 \in \Gamma_k$.

Подалгебру алгебры σ_0, порожденную элементами sym $a(x)$ I и sym $F^{-1}b(\xi)F$ для $a(x) \in C(\dot{\mathbf{R}}^n), b(\xi) \in H(PC(S^{n-1}, \Lambda_n))$, обозначим через $\mathrm{Sym}_0\mathscr{R}$.

Тогда ([21.25.27]) имеет место следующая теорема

Теорема 3.13. Гомоморфизм

$$\mathrm{sym}_0 : \mathscr{R} \to \mathrm{Sym}_0\, \mathscr{R},$$

порожденный описанным выше отображением образующих алгебры $\mathscr{R}$, является эпиморфизмом; ядром этого отображения служит идеал компактных в $L_2(\mathbf{R}^n)$ операторов.

Следствие 3.14. Алгебра $\mathrm{Sym}_0\mathscr{R}$ изоморфна и изометрична алгебре символов $\mathrm{Sym}\mathscr{R}$ алгебры $\mathscr{R}$.

Следствие 3.15. Произвольный оператор A алгебры $\mathscr{R}$ нетеров тогда и только тогда, когда его символ обратим (в алгебре $\mathrm{Sym}_0\,\mathscr{R}$), т.е. операторы $(\mathrm{sym}_0\,A)(t)$ обратимы для всех $t\in T$ и нормы обратных операторов ограничены в совокупности.

Замечание. Оператор-функции, порождающие алгебру $\mathrm{Sym}_0\mathscr{R}$ имеют предельные значения в точках естественных компактификаций множеств $\Gamma_k, k=\overline{0,n-1}$. Эти точки возникают при расширении системы идеалов $\mathscr{J}_T$ ядрами представлений алгебры $\mathscr{R}$, реализующихся как представления алгебр

$$\Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^k);H(PC(S^{k-1}(\zeta_0);\Lambda_k(\zeta_0)))).$$

При этом компактификация $\hat{\Gamma}_0$ множества Γ_0 совпадает с компактом максимальных идеалов алгебры $PC(S^{n-1},\Lambda_n)$; компактификации $\hat{\Gamma}_k$ множеств, Γ_k, $k=\overline{1,n-1}$, связаны с описанием предельных значений функций из $PC(S^{n-1},\Lambda_n)$ в точках $\partial\Gamma_k$. Подробное их описание определяется конкретикой рассматриваемого случая.

Сказанное приводит к другому описанию алгебры символов $\mathrm{Sym}\,\mathscr{R}$ алгебры $\mathscr{R}$.

Обозначим через σ_1 алгебру всех непрерывных на

$$\hat{T}=\bigcup_{k=0}^{n-1}\dot{\mathbf{R}}^{n-k}\times\hat{\Gamma}_k$$

оператор-функций σ со следующими значениями:

$$\sigma\in\begin{cases}\mathbf{C},\ (x,t)\in\dot{\mathbf{R}}^n\times\hat{\Gamma}_0\\ \Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^k);H(PC(S^{k-1},\Lambda_k(\zeta)))),(z_\zeta,\zeta)\in\dot{\mathbf{R}}^{n-k}\times\hat{\Gamma}_k,\end{cases}$$

здесь $x=(y_\zeta,z_\zeta)$, $k=\overline{1,n-1}$.

Определим гомоморфизм $\mathrm{sym}_1 : \mathcal{R} \to \sigma_1$ следующим отображением образующих алгебры $\mathcal{R}$:

$$sym_1 a(x)I = \begin{cases} a(x),\ (x,t) \in \mathbf{R}^n \times \hat{\Gamma}_0 \\ a(y_\zeta, z_\zeta)I, (z_\zeta, \zeta) \in \dot{\mathbf{R}}^{n-k} \times \hat{\Gamma}_k, k = \overline{1, n-1} \end{cases}$$

$$sym_1 Fb(\xi)F = \begin{cases} b(t),\ (x,t) \in \mathbf{R}^n \times \hat{\Gamma}_0 \\ F_{(k)}^{-1} b_\zeta(\eta_\zeta) F_{(k)}, (z_\zeta, \zeta) \in \dot{\mathbf{R}}^{n-k} \times \hat{\Gamma}_k, k = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

здесь $\hat{b}$ - преобразование Гельфанда функции $b \in H(PC(S^{n-1}, \Lambda_n))$, а функция $b_\zeta(\eta_\zeta)$, как и ранее, определяется предельными значениями функции $b(\xi)$ в точке $\zeta \in \hat{\Gamma}_k$. Все объекты, связанные с точками $\zeta \in \hat{\Gamma}_k \setminus \Gamma_k$, как и ранее, считаем продолженными по непрерывности с соответствующих обов на Γ_k.

Через $\mathrm{Sym}_1 \mathcal{R}$ обозначим подалгебру алгебры σ_1, порожденную элементами $\mathrm{sym}_1 a(x) I$ и $\mathrm{sym}_1 F^{-1} b(\xi) F$ для $a(x) \in C(\dot{\mathbf{R}}^n)$, $b(\xi) \in H(PC(S^{n-1}, \Lambda_n))$.

Теорема 3.16. Гомоморфизм

$$sym_1 : \mathcal{R} \to Sym_1 \mathcal{R},$$

порожденный описанным выше отображением образующих алгебры $\mathcal{R}$, является эпиморфизмом: ядром этого отображения служит идеал компактных в $L_2(\mathbf{R}^n)$ операторов.

Следствие 3.17. Алгебра $\mathrm{Sym}_1 \mathcal{R}$ изоморфна и изометрична алгебре символов $\mathrm{Sym}\, \mathcal{R}$ алгебры $\mathcal{R}$.

Следствие 3.18. Для того чтобы произвольный оператор А алгебры $\mathcal{R}$ был нетеров, необходимо и достаточно, чтобы его символ был обратим, т.е. операторы (sym A)(•) были обратимы в каждой точке множества $\hat{T}$.

Замечание 1. В отличие от работ [9.24] мы не описываем топологию Джекобсона на пространстве неприводимых представлений изучаемой алгебры, хотя это может быть сделано после описания этих неприводимых представлений.

Известные примеры (см., например, [25]) показывают, что топология Джекобсона на пространстве примитивных идеалов (ядер неприводимых представлений) слабее *-расслоенной топологии и, поэтому не может быть использована для описания алгебры непрерывных сечений (часть сечений будет разрывна).

Приведем этот показательный пример. На сегменте [0,1] вводим открытое множество

$$G=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)\cup\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)\cup\ldots,$$

и пусть F=[0, 1]\G - (классическое) канторово множество. Введем C^*-алгебру A, состоящую из всех непрерывных на [0, 1] 2×2 матриц-функций

$$a(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix},$$

диагональных в точках множества F.

Алгебра

$$Z=\left\{\begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & \alpha(t) \end{pmatrix}:\alpha(t)\in C(0,1)\right\}\cong C(0,1)$$

является, очевидно, центральной коммутативной подалгеброй C*-алгебры A. Компактом максимальных идеалов алгебры Z является T=[0, 1]. В данном случае:

1. Сравнение топологии Джекобсона и *-расслоенной топологии показывает, что топология Джекобсона слабее.
2. Если базу расслоения $\xi=(p,\mathrm{Prim}\,A,E)$ снабдить топологией Джекобсона, то не все сечения вида

$$\tilde{a}:t\to a(t),\ t\in\mathrm{Prim}\,A$$

порожденные элементами $a\in A$ непрерывны.

3. Пусть $\xi=(p,\mathrm{Prim}\,A,E)$ - C^*-расслоение, база которого снабжена *-расслоенной топологией, $\widetilde{A}$ - изоморфный образ алгебры A в $\Gamma^b(\xi)$. Тогда доказывается, что

$$\widetilde{A}\neq\Gamma^b(\xi)$$

4. Наиболее удобно и свободно от приведенных недостатков, описание алгебры A с использованием локального принципа Дугласа-Варелы.

Данный пример хорошо иллюстрирует преимущества локального принципа Дугласа-Варелы. Поэтому, в отличие от работы [9], мы не ограничиваемся указанием всех неприводимых представлений изучаемой алгебры.

Замечание 2. Операторы алгебры типа $\mathscr{R}=\Psi(C(\dot{\mathbf{R}}^n);H(PC(S^{n-1},\Lambda_n)))$, либо из двойственной по Фурье алгебры $F^{-1}\mathscr{R}F=\Psi(H(PC(S^{n-1},\Lambda_n));C(\dot{\mathbf{R}}^n))$ для различных конкретных Λ_n рассматривались многими авторами. К таким операторам, в частности, относятся бисингулярные, полисингулярные и многомерные бисингулярные операторы, операторы типа свертки в конусах, составные и обобщенные свертки, их тензорные произведения.

Замечание 3. Теория СИО является важным инструментом в теории уравнений а частных производных. Определим оператор $\Lambda_0 = F^{-1}|\xi|F$. Тогда любой B^{∞}-диференциальный оператор

$$L = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

однородный степени m допускет прелставление

$$L = \left(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) R^\alpha \right) \circ (-i\Lambda_0)^m$$

где $R^\alpha = F^{-1}\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)F$-оператор Рисса т.е. СИО. Второй член в факторизации $(-i\Lambda_0)^m$ легко подаеться изучению, если учесть что $\Lambda_0 = F^{-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}}F$ есть квадратный корень из оператора 1+Δ (Δ-оператор Лапласа). Таким образом, по существу, изучение ДО L, фактически, равносильно изучению СИО.

Замечание 4. Классические операторы Михлина-Кальдерона-Зигмунда (МСЗ) можно определить на векторных расслоениях. Доказывается что эта алгебра Сили (см. [8,19]). Изучаемые в данной работе операторы можно также определить на векторных расслоениях и исследовать. Кроме того, операторы оз C*-алгебры $\mathscr{R}$, можно определить на компактных многообразиях и исследовать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Василевский Н.Л. Алгебры, порожденные многомерными сингулярными операторами и коэффициентами, допускающими разрывы однородного типа. - Математичеслий сборник, 1986, т. 129, № I, с. 3-19.
2. Василевский Н.Л. Ою одной алгебре, порожденные теплицевым операторами с псевдодифференциадьными нулевого порядка предсимволамию - Докл. АН СССР, 1986, т. 289, № I, с. 14-18.
3. Василевский Н.Л. Двумерные операторы Михлина-Кальдерона-Зигмунда и бисингулярные операторы. - Сибирский математический журнал, 1986, т. XXYII, № 2, с. 23-31.
4. Василевский Н.Л. Об одной алгебре, связанной с теплицевым операторами в радиальных трубчатых областях. - Известия АН СССР, сер. матем., 1987, т. 51, № I, с. 79-95.
5. Диксмье Ж. С*-алгеиры и их представления. - М. : Наука, 1974.
6. Каспаров Г. Г. Операторная К-теория и ее приложения. - Современные проблемы математики. Новейшиу достижения. 1985, тю 27, с. 3-31.
7. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Индекс еллиптических операторов над С*-алгебрами. - Известия АН СССР, сер. матем., 1979, т. 43, № 4, с. 831-859.
8. Павле Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе. - М.: Мир, 1970.
9. Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н. Спектр алгебры псевдодифференциальных операторов с кусочногладкими

символами. - Известия АН СССР, сер. матем., 1989, т. 53, № 1, с. 147-178.

10. Радулович Ж. Теплицевы операторы в радиальных трубчатых областях. Тезисы докладов третьего интернационального симпозиума "Комплексный анализ и его приложения". Герцег Нови,
11. Радулович Ж. Стабильные гомотопии в группе обратимых элементов некоторых **C***-алгебр. Тезисы докладов республиканской научно-методической конференции посвященной 200-летю со дня рождения Н. И. Ллобачевского, Част I, Одесса, Украина, 1992, с. 90.
12. Радулович Ж. **C***-алгебры многомерных операторов Теплица и Винера-Хопфа с разрывами, являющимися объединением стратифицированных конформных орбифолдов типа слений. Доклады Академии Наук Росии, 1996, т. 351, № 5, с. 606-610.
13. Радулович Ж. **C***-алгебры, порожденные почти-периодическими многомерными С.И.О. и операторами Теплица с разравными предсимволами, и формула для индекса нетеровых операторов. Доклады Академии Наук Росии, 1999, т. 367, № 1, с. 18-22.
14. Свитцер Р. М. Алгебраическая топология. - М.: Наука, 1985.
15. Симоненко И. Б. Новий общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I. - Известия АН СССР, сер. матем., 1965, т. 29, № 3, с. 567-586.
16. Симоненко И. Б. Новий общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. II. - Известия АН СССР, сер. матем., 1965, т. 29, № 4, с.

757-782.

17. Симоненко И. Б. Операторы типа свертки в конусах. - Матем. сборник, 1967, т. 74, № 2, с. 298-313.
18. Симоненко И. Б. Характерискические бисингулярные уравнения в пространствах суммируемых функций. - Известия ВУЗов, Математика, 1974, № 2, с. 115-120.
19. Соловьев Ю. П., Троицкий Е. В. C*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии. - М.: Факториал, 1996.
20. Blackadar B. K. K-theory for operator algebras. - New York: Springer-Veklag, 1986.
21. Dauns J., Hofmann K. H. Representations of rings by sections. - Memoirs Amer. Math. Soc., № 83, 1968.
22. Douglas R. G. Banach algebra Tehniques in Operator Theory. - Academic Press, 1972.
23. Douglas R. G. Banach algebra tehniques in the theory of Toeplitz operators. - CBMS Regional Conf. Ser. Math. № 15, 1973.
24. Dynin A. Multivariable Wiener - Hopf Operators. II. Spectral Topology And Solvability. - Integ. Eq. Oper., 1986, v. 9.
25. Hofman K. H. Representations of algebras by continuous sections. - Bull. Amer. Math. Soc., 1972, v. 78, № 3, p. 291-373.
26. Mikhlin S. G., Prossdorf S. - Singular Integral Operators. Akademie - Verlag, Berlin, 1986.
27. Varela J. Duality of C*-algebras. - In: Resent Advances in the Representation Theory of Rings and C-Algebras by Continuous Sections, Memoires Amer. Math. Soc., № 148, 1974, p. 97-108.