А. А. Шананин
Московский физическо-трехнический институт, Москва, Россия

Проблема интегрируемости и непараметрический метод анализа потребительского спроса[*]

Ключевые слова: индекси потребительских цен, преобразование Янга, функция полезности, интегрируемость

1. Введение

Индексы потребительских цен и спроса являются обобщенными характеристиками, позволяющими судить о тенденциях эволюции экономики. Исходной информацией для их построения является торговая статистика, представляющая собой набор цен и объемов потребления в различные периоды времени.

Опишем традиционный подход к построению индексов, который опирается на оценку стоимости потребительской корзины. Рассмотрим группу, состоящую из m видов товаров. Обозначим через X вектор потребления этих товаров, а через p – вектор цен на них. Стоимость корзины товаров X, продаваемых по ценам p, равна скалярному произведению $\langle p, X\rangle$. Примем период t в качестве базового, а период τ – в качестве текущего. В указанных обозначениях индексом цен Ласпейреса называется отношение $\langle p^\tau, X^t\rangle/\langle p^t, X^t\rangle$, в котором в качестве потребительской корзины выбирается набор товаров, купленных потребителями в базовый период. Статистические службы обычно вычисляют этот индекс потребительских цен.

Отметим, что выбор потребительской корзины не является обоснованным. Если в качестве корзины выбрать набор товаров потребляемых в текущий период, то получим величину $\langle p^\tau, X^\tau\rangle/\langle p^t, X^t\rangle$, называемую индексом цен Пааше. Вычисления показывают, что, как правило, значение индекса Пааше не превосходит значения индекса Ласпейреса. Систематическое различие между этими двумя индексами называется

[*]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов поддержке ведущих научных школ (НШ-5379.2006.1)

эффектом Гершенкрона. Эффект Гершенкрона отражает замещение относительно подорожавших товаров подешевевшими товарами. В работе А. А. Конюса [1] был предложен подход к определению индексов потребительских цен, учитывающий изменение спроса (потребительской корзины) при изменении цен и основанный на паретовской теории потребительского спроса. В основе паретовской теории лежит гипотеза о возможности описания потребительского поведения моделью рационального репрезентативного потребителя, выбирающего наилучший потребительский набор, доступный в силу бюджетных ограничений.

2. Постановка задачи о рациональности поведения потребителей

Будем описывать поведение потребителей с помощью обратных функций спроса $P(X) = (P_1(X), \ldots, P_m(X))$, выражающих зависимость между объемами потребления товаров $X = (X_1, \ldots, X_m)$ и ценами на них. Будем предполагать, что функции $P(X)$ непрерывны на $\mathbb{R}^m_+$.

Определение 1. *Будем говорить, что обратные функции спроса $P(X)$ рационализируемы в классе функций полезности Φ, если существует такая функция* $F(X) \in \Phi$, что

$$X \in Argmax\{F(Y) : \langle P(X), Y\rangle \le \langle P(X), X\rangle,\, Y \in \mathbb{R}^m_+\}.$$

Будем при этом говорить, что функция полезности $F(X)$ рационализирует обратные функции спроса $P(X)$.

Функции полезности должны удовлетворять априорным условиям, т.е. принадлежать классу Φ_0 вогнутых, положительно-однородных первой степени, непрерывных на множестве $\mathbb{R}^m_+$ функций, положительных на множестве $int\,\mathbb{R}^m_+$.

Предложение 1. *Если функция $F(X) \in \Phi_0$ рационализирует обратные функции спроса $P(X)$*, то

$$X \in Arg\max\left\{F(Y) - \frac{1}{Q(P(X))}\langle P(X), Y\rangle : Y \in \mathbb{R}^m_+\right\},$$

где функция $Q(P)$ является преобразованием Янга функции $F(X)$, т.е.

$$Q(P) = \inf\left\{\frac{\langle P, X\rangle}{F(X)} :\, X \ge 0,\, F(X) > 0\right\}. \tag{1}$$

Доказательство предложения 1 получается применением теоремы Куна-Таккера к задаче вогнутого программирования

$$\max\{F(Y) : \langle P(X), Y\rangle \leq \langle P(X), X\rangle,\, Y \in \mathbb{R}_+^m\}, \tag{2}$$

в которой множитель Лагранжа к ограничению $\langle P(X), Y\rangle \leq \langle P(X), X\rangle$ равняется $1/Q(P(X))$.

Необходимое и достаточное условие максимума для задачи (2) в дифференциальной форме для $X \in \mathbb{R}_+^m$ имеет вид

$$\frac{1}{Q(P(X))} P(X) \in \partial F(X), \tag{3}$$

где $\partial F(X)$ супердифференциал вогнутой функции $F(X)$ в точке $X \in int\,\mathbb{R}_+^m$. В случае, когда $F(X)$ является дифференцируемой функцией, соотношение (12) принимает вид основной формулы теории экономических индексов

$$dF(X) = \frac{1}{Q(P(X))} \sum_{j=1}^{m} P_j(X) dX_j, \tag{4}$$

согласно которой, чтобы посчитать изменение индекса спроса Конюса (функции полезности) $F(X)$ надо посчитать отношение стоимости изменений в объемах покупаемых товаров $dX = (dX_1, \ldots, dX_m)$ в текущих ценах $P(X)$ к текущему значению индекса цен $Q(P(X))$, который связан с индексом спроса $F(X)$ преобразованием Янга (18). Таким образом, проблема построения индексов Конюса спроса $F(X)$ и цен $Q(P)$ сводится к проблеме существования и поиска интегрирующего множителя $1/Q(P(X))$ для дифференциальной формы обратных функций спроса

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} P_j(X) dX_j.$$

В литературе по теории экономических индексов (см., например, [2], с.143) большой популярностью пользуются индексы Дивизиа, согласно которым отношение индекса спроса $F(X(t))$ в текущий период времени t к индексу спроса $F(X(t))$ в базовый период времени $F(X(\tau))$ определяется по формуле

$$\frac{F(X(t))}{F(X(\tau))} = \exp\left(\int_{\tau}^{t} \frac{\sum_{i=1}^{m} P_i(X(\theta)) \frac{dX_i(\theta)}{d\theta}}{\sum_{i=1}^{m} P_i(X(\theta)) X_i(\theta)} d\theta \right).$$

Отметим, что если существует интегрирующий множитель для дифференциальной формы обратных функций спроса ω, т.е. справедлива формула (4), то индекс Конюса совпадает с индексом Дивизиа .

3. Свойства преобразования Янга

Известно (см. [3], с.230-233), что преобразование переводит функции из класса Φ_0 в функции из класса Φ_0 и что для любой функции$F(X) \in \Phi_0$ и связанной с ней формулой (1) функции $Q(p)$ справедливо соотношение

$$F(X) = \inf \left\{ \frac{\langle P, X \rangle}{Q(P)} : Q(P) > 0, P \in \mathbb{R}^m_+ \right\}, \tag{5}$$

т.е. преобразование Янга инволютивно на классе Φ_0.

Любая положительно однородная функция однозначно определяется своей поверхностью уровня. Поэтому функции $F(X) \in \Phi_0$ и $Q(p) \in \Phi_0$ однозначно определяются соответственно поверхностями $\Omega_F = \{X \in \mathbb{R}^m_+ : F(X) = 1\}$ и $\Omega_Q = \{P \in \mathbb{R}^m_+ : Q(P) = 1\}$. Геометрический смысл преобразования Янга сформулирован в следующем предложении.

Предложение 2. *Если функция $F(X) \in \Phi_0$, $\hat{X} \in Q_F$ и $\hat{P} \in \partial F(\hat{X})$ то $\hat{P} \in \Omega_Q$, $\hat{X} \in \partial Q(\hat{P})$.*

Доказательство. По определению супердифференциала из $\hat{P} \in \partial F(\hat{X})$ имеем, что для любого $X \in \mathbb{R}^m_+$ справедливо неравенство

$$F(X) - F(\hat{X}) \leq \langle \hat{P}, X - \hat{X} \rangle. \tag{6}$$

Если выбрать в (6) $X = \lambda \hat{X}$, где $\lambda > 0$, то с учетом положительной однородности получаем, что при $\lambda > 0$ справедливо неравенство $(\lambda - 1)F(\hat{X}) \leq (\lambda - 1)\langle \hat{P}, \hat{X} \rangle$. Откуда следует обобщенное тождество Эйлера для вогнутых положительно однородных функций

$$F(\hat{X}) = \langle \hat{P}, \hat{X} \rangle.(7) \tag{7}$$

В силу этого тождества неравенство (6) означает, что для любых $X \in \mathbb{R}^m_+$ справедливо $F(X) \leq \left\langle \hat{P}, X \right\rangle$, т.е. с учетом (7) имеем $Q\left(\hat{P}\right) = 1$ и, значит, $\hat{P} \in \Omega_Q$. Соотношение $\hat{X} \in \partial Q\left(\hat{P}\right)$ эквивалентно выполнению для любых $P \in \mathbb{R}^m_+$ неравенства

$$Q(P) - Q\left(\hat{P}\right) \leq \left\langle P - \hat{P}, \hat{X} \right\rangle. \tag{8}$$

Поскольку $\left\langle \hat{P}, \hat{X} \right\rangle = F\left(\hat{X}\right) = 1 = Q\left(\hat{P}\right)$, неравенство (8) эквивалентно

$$Q(P) \le \left\langle P, \hat{X} \right\rangle . \tag{9}$$

Но неравенство (9) справедливо для любых $P \in \mathbb{R}_+^m$, так как из (5) следует, что

$$\left\langle P, \hat{X} \right\rangle \ge Q(P)\, F\left(\hat{X}\right) = Q(P).$$

Предложение 2 доказано.

Вторые квадратичные формы поверхностей

$$\Omega_F = \left\{ X \in \mathbb{R}_+^m \,|F(X) = 1 \right\} \text{ и } \Omega_Q = \left\{ P \in \mathbb{R}_+^m \,|Q(P) = 1 \right\}$$

могут быть заданы с помощью матриц эластичностей замещения, которые в соответствующих точках $\hat{X} \in \Omega_F$ и $\hat{X} \in \Omega_F$ и $\hat{P} \in \Omega_Q, \hat{P} \in \partial F\left(\hat{X}\right)$ оказываются взаимно обратными (подробнее, см. [4], с.115)

Поскольку переход от соотношения (3) к основной формуле теории экономических индексов (4) предполагает дифференцируемость функции полезности $F(X)$, представляет интерес выделение класса дифференцируемых функций полезности, на котором преобразование Янга инволютивно.

Определение 2. *Будем говорить, что функция $F(X)$принадлежит классу Φ_1, если выполнены следующие условия:*

1) $F(X) \in C^1\left(\mathbb{R}_+^m\right)$;

2) $F(X) > 0X \in int\,\mathbb{R}_+^m$;

3) $F(\lambda X) = \lambda F(X)$ *при* $\lambda > 0,\ X \ge 0$;

4) $grad\ F(X) > 0$ *при* $X \in int\ \mathbb{R}_+^m$;

5) $F(X)$ *– строго квазивогнута на* $\mathbb{R}_+^m$;

6) *для любого* $P \in int\,\mathbb{R}_+^m$ *существует хотя бы одно решение задачи*

$$\inf\left\{ \frac{\langle P, X\rangle}{F(X)} \,|X \in int\,\mathbb{R}_+^m \right\}.$$

Из результатов, полученных в [5], следует, что преобразование переводит функции из класса Φ_1 в функции из класса Φ_1 и что преобразование Янга инволютивно на классе Φ_1.

4. Критерий существования функции полезности (гладкий случай)

Обозначим $M = \{1, \ldots, m\}$.

Теорема 1. (см. [6]-[8].) *Пусть обратные функции спроса* $P(X) \in C^1\left(\mathbb{R}_+^m\right)$. *Для того, чтобы функции* $P(X)$ *были рационализируемы в классе функций полезности* $P(X) \in C^1(\mathbb{R}_+^m)$ *необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:*

1. $P(X) > 0$ *при* $X \in int\, \mathbb{R}_+^m$;

2. для любых $i \in M, j \in M, \lambda > 0, X \in int\, \mathbb{R}_+^m$ *справедливо соотношение*

$$\frac{P_i(\lambda X)}{P_j(\lambda X)} = \frac{P_i(X)}{P_j(X)};$$

3. для любых $X \in int\, \mathbb{R}_+^m$, $Y \in int\, \mathbb{R}_+^m$, *таких, что ни при каком* $\lambda > 0$ $Y \neq \lambda X$, *выполнено неравенство:*

$$\langle P(X), Y\rangle \langle P(Y), X\rangle > \langle P(X), X\rangle \langle P(Y), Y\rangle;$$

4. для любых $i \in M$, $j \in M$, $k \in M$, $X \in int\, \mathbb{R}_+^m$ *справедливо равенство:*

$$P_i(X)\left(\frac{\partial P_j}{\partial X_k}(X) - \frac{\partial P_k}{\partial X_j}(X)\right) + P_j(X)\left(\frac{\partial P_k}{\partial X_i}(X) - \frac{\partial P_i}{\partial X_k}(X)\right) + P_k(X)\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(X) - \frac{\partial P_j}{\partial X_i}(X)\right) = 0;$$

5. для любого $X = (X_1, .., X_m) \in \partial\mathbb{R}_+^m$ *справедливо соотношение:*

$$(M \setminus \{i \in M \,|X_i = 0\}) \cap \{j \in M \,|P_j(X) = 0\} \neq \emptyset.$$

Условия 1 и 5 теоремы носят технический характер и связаны с выбором класса функций полезности Φ_1. Условие 2 называется условием отделимости и выражает полноту номенклатуры рассматриваемой группы товаров, для которой существует соответствие между пропорциями цен и пропорциями спроса на товары. Условие 3 обеспечивает строгую вогнутость поверхностей уровня $\Omega_F = \left\{X \in \mathbb{R}_+^m \,|F(X) = 1\right\}$, $\Omega_Q = \left\{P \in \mathbb{R}_+^m \,|Q(P) = 1\right\}$ и выражает эффект Гершенкрона: индекс цен Ласпейреса больше индекса цен Пааше. Условие 3 является следствием закона Хикса (см. [7]), который выражает в терминах обратных функций спроса "Закон убывания предельной производительности" и согласно которому для любого вектора $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$, такого что $\langle P(X), \nu \rangle$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial P_i(X)}{\partial X_j} \nu_i \nu_j.$$

Можно показать, что условие 3 является условием типа неравенства, т.е. сохраняется при малых возмущениях функций $P(X)$ в норме пространства $C^1(\mathbb{R}^m_+)$. Напротив, условие 4, известное как условие интегрируемости Фробениуса, выражает критерий существования интегрирующего множителя для дифференциальной формы обратных функций спроса ω и является условием типа равенства. Оно нарушается при малых возмущениях функций $P(X)$ в норме пространства $C^1(\mathbb{R}^m_+)$. Существование экономических индексов является одним из постулатов современной экономической теории, объясняющим возможность регулировать потоки разнообразных товаров, номенклатура которых составляет порядка 10^9 наименований, с помощью "скалярной" обратной связи – финансовых потоков. Поэтому нарушение условий Фробениуса при малых возмущениях воспринималось экономистами как *проблема интегрируемости* (см. [6], [9]).

Появление в экономической литературе условий интегрируемости восходит к работе Дж.Антонелли [6], впервые опубликованной в 1886 г. Однако, внимание экономистов к проблеме интегрируемости было привлечено работой В.Вольтерра, впервые опубликованной в 1906 г. В виде условий 4 условия интегрируемости были получены Е.Е.Слуцким в работе [10], впервые опубликованной в 1915 г. В тот же период К.Каратеодори сформулировал второе начало термодинамики в форме существования интегрирующего множителя для дифференциальной формы тепла. Из этой формулировки следовало, что уравнения состояния, химические потенциалы, внутренняя энергия задаются функциями, которые удовлетворяют условиям интегрируемости Фробениуса и, значит, не являются функциями общего положения. Поэтому возник вопрос: являются ли условия интегрируемости дифференциальной формы обратных функций спроса ω фундаментальным законом, подобным второму началу термодинамики? Анализу выполнимости и интерпретации условий интегрируемости для дифференциальной формы обратных функций спроса ω посвящены работы многих известных экономистов XX века, таких как В.Парето, П.Самуэльсон, Дж.Хикс, Х.Хотеллин, Х.Хаутеккер, К.Эрроу, Л.Гурвиц, Х.Удзава, Д.Гейл, М.Рихтер и др. Их усилия привели к созданию теории выявленного предпочтения, в терминах которой удалось переформулировать условия рациональности поведения в форме удобной для эмпирической проверки.

5. Выявленные предпочтения и критерий существования функции полезности (негладкий случай)

Понятие выявленного предпочтения было введено П. Самуэльсоном в [11] следующим образом.

Определение 3. *Будем говорить,* $X \in \mathbb{R}_+^m$ *выявлено предпочтительнее* $Y \in \mathbb{R}_+^m$ $(X \succ Y)$, *если выполняется неравенство* $\langle P(X), X\rangle \geq \langle P(X), Y\rangle$.

П. Самуэльсон, развивая концепцию рационального репрезентативного потребителя, вкладывал следующий содержательный смысл в определение. При ценах $P(X)$ набор товаров Y стоил $\langle P(X), Y\rangle$ и был доступен потребителю, располагающему бюджетов в $\langle P(X), X\rangle$. Поскольку ценам $P(X)$ соответствует приобретение набора товаров X, набор товаров X выявлено предпочтительнее доступного в силу бюджетных ограничений набора товаров Y.

П. Самуэльсон сформулировал следующее свойство, которое при размерности номенклатуры $m = 2$ является необходимым и достаточным условием рационализируемости обратных функций спроса в классе функций полезности Φ_0 и высказал гипотезу о том, что результат можно обобщить на произвольные $m \geq 2$.

Слабая аксиома теории выявленного предпочтения. *Если* $X \in \mathbb{R}_+^m$ *и* $Y \in \mathbb{R}_+^m$, $X \succ Y$ *и* $Y \succ X$, *то* $\langle P(X), X\rangle = \langle P(X), Y\rangle$ *и* $\langle P(Y), Y\rangle = \langle P(Y), X\rangle$.

Предложение 3. *Пусть* $\langle P(X), X\rangle > 0$ *при любых* $X \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ *и выполнено условие отделимости (условие 2 теоремы 1). Для того, чтобы для любой пары точек из множества* $\{\lambda X \mid \lambda > 0\} \cup \{\mu Y \mid \mu > 0\}$ *выполнялась слабая аксиома теории выявленного предпочтения необходимо и достаточно, чтобы было справедливо неравенство*

$$\langle P(X), Y\rangle \langle P(Y), X\rangle \geq \langle P(X), X\rangle \langle P(Y), Y\rangle. \tag{10}$$

Доказательство. Необходимость. Выберем $\mu_1 > 0$ таким, что

$$\langle P(X), X\rangle = \langle P(X), \mu_1 Y\rangle . \quad (11)$$

Тогда в силу слабой аксиомы теории выявленного предпочтения имеем, что $\langle P(\mu_1 Y), \mu_1 Y\rangle \leq \langle P(\mu_1 Y), X\rangle$. Откуда в силу условия отделимости получаем, что

$$\langle P(Y), \mu_1 Y\rangle \leq \langle P(Y), X\rangle . \quad (12)$$

Перемножая соотношения (11) и (12) и сокращая на $\mu_1 > 0$, получаем (18). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\lambda_1 X \succ \mu_1 Y$ и $\mu_1 Y \succ \lambda_1 X$, где $\lambda_1 > 0$, $\mu_1 > 0$. С учетом условия отделимости имеем, что $\langle P(X), \lambda_1 X\rangle \geq \langle P(X), \mu_1 Y\rangle$ и $\langle P(Y), \mu_1 Y\rangle \geq \langle P(Y), \lambda_1 X\rangle$. Перемножая эти неравенства и сокращая на положительный множитель $\lambda_1\mu_1$, получаем $\langle P(X), Y\rangle \langle P(Y), X\rangle \leq \langle P(X), X\rangle \langle P(Y), Y\rangle$. Откуда в силу (10) имеем $\langle P(X), Y\rangle \langle P(Y), X\rangle = \langle P(X), X\rangle \langle P(Y), Y\rangle$. Следовательно, $\langle P(X), \lambda_1 X\rangle = \langle P(X), \mu_1 Y\rangle$ и $\langle P(Y), \mu_1 Y\rangle = \langle P(Y), \lambda_1 X\rangle$. Достаточность доказана.

Однородная слабая аксиома теории выявленного предпочтения. *Для любых $X \in \mathbb{R}^m_+ Y \in \mathbb{R}^m_+$ справедливо неравенство*

$$\langle P(X), Y\rangle \langle P(Y), X\rangle \geq \langle P(X), X\rangle \langle P(Y), Y\rangle .$$

Отметим, что однородная слабая аксиома теории выявленного предпочтения эквивалентна эффекту Гершенкрона.

В работе [12] Х.Хаутеккер предложил более сильное требование необходимое и достаточное для рационализируемости обратных функций спроса в классе функций полезности Φ_0.

Сильная аксиома теории выявленного предпочтения. *Если $k \geq 2$, $X^1 \in \mathbb{R}^m_+, X^2 \in \mathbb{R}^m_+, ..., X^k \in \mathbb{R}^m_+$ и $X^1 \succ X^2, ..., X^{k-1} \succ X^k, X^k \succ X^1$, то $\langle P(X^1), X^1\rangle = \langle P(X^1), X^2\rangle, \ldots, \left\langle P\left(X^{k-1}\right), X^{k-1}\right\rangle = \left\langle P\left(X^{k-1}\right), X^k\right\rangle, \left\langle P\left(X^k\right), X^k\right\rangle = \left\langle P\left(X^k\right), X^1\right\rangle$.*

Слабая аксиома теории выявленного предпочтения следует из сильной аксиомы теории выявленного предпочтения при $k = 2$. Вплоть до работы [13] предпринимались попытки установить эквивалентность слабой и сильной аксиомы. Д.Гейла [13] построил пример обратных функций спроса, удовлетворяющих слабой аксиоме теории выявленного предпочтения, но не рационализируемых.

Необходимость выполнения сильной аксиомы для рационализируемости обратных функций спроса $P(X)$ с помощью функции полезности $F(X) \in \Phi_0$ следует из соотношений (3) и определения супердифференциала.

Действительно, если $X^1 \in \mathbb{R}^m_+, X^2 \in \mathbb{R}^m_+, \dots, X^k \in \mathbb{R}^m_+$ и $X^1 \succ X^2, \dots, X^{k-1} \succ X^k, X^k \succ X^1$, то

$$0 \geq \left\langle \frac{P(X^1)}{Q(P(X^1))}, X^2 - X^1 \right\rangle \geq F\left(X^2\right) - F\left(X^1\right), \dots,$$
$$0 \geq \left\langle \frac{P\left(X^{k-1}\right)}{Q(P(X^{k-1}))}, X^k - X^{k-1} \right\rangle \geq F\left(X^k\right) - F\left(X^{k-1}\right),$$
$$0 \geq \left\langle \frac{P\left(X^k\right)}{Q(P(X^k))}, X^1 - X^k \right\rangle \geq F\left(X^1\right) - F\left(X^k\right).$$

Складывая последние неравенства, получаем, что

$$0 \geq \sum_{j=1}^{k-1} \left\langle \frac{P(X^j)}{Q(P(X^j))}, X^{j+1} - X^j \right\rangle + \left\langle \frac{P\left(X^k\right)}{Q(P(X^k))}, X^1 - X^k \right\rangle \geq 0.$$

Откуда следует, что

$$\left\langle P\left(X^1\right), X^1 \right\rangle = \left\langle P\left(X^1\right), X^2 \right\rangle, \dots,$$
$$\left\langle P\left(X^{k-1}\right), X^{k-1} \right\rangle = \left\langle P\left(X^{k-1}\right), X^k \right\rangle,$$
$$\left\langle P\left(X^k\right), X^k \right\rangle = \left\langle P\left(X^k\right), X^1 \right\rangle,$$

т.е. справедливость сильной аксиомы.

Предложенное в [12] доказательство достаточности содержало пробелы, которые в последствие заполнялись в серии статей. По-видимому, полное доказательство было получено в [14]. Доказательство достаточности может быть основано на использовании теоремы Каратеодори–Рашевского–Чжоу[2] о том, что если в некоторой точке нарушены условия интегрируемости Фробениуса, то в любой сколь угодно малой окрестности этой точки существует гладкая замкнутая кривая $X(t)$, $t \in [0,1]$, $X(0) = X(1)$, во всех точках которой, кроме быть может двух справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{m} P_j(X) \frac{dX_j}{dt} > 0.$$

[2]В экономической литературе этот результат впервые появился в работах J.Ville [15].

Проводя дискретизацию, заменяя производную разностными отношениями можно установить нарушение сильной аксиомы. Трудности возникают при прохождении двух исключенных точек, они преодолеваются с помощью результатов Х.Узавы ([6], с.7-28). Подробное доказательство, основанное на этом подходе, содержится в [6].

Предложение 3'. *Пусть* $\langle P(X), X\rangle > 0$*при любых* $X \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$*и выполнено условие отделимости (условие 2 теоремы 1). Для того, чтобы для любого набора точек из множества* $\{\lambda X^1 \,|\lambda > 0\} \cup \{\lambda X^2 \,|\lambda > 0\} \cup ... \cup \left\{\lambda X^k \,|\lambda > 0\right\}$ *выполнялась сильная аксиома теории выявленного предпочтения необходимо и достаточно, чтобы для любого упорядоченного набора* $\{t_1, \ldots, t_k\} \subset \left\{\overline{0, T}\right\}$ *было справедливо неравенство*

$$\left\langle P^{t_1}, X^{t_2}\right\rangle \left\langle P^{t_2}, X^{t_3}\right\rangle \ldots \left\langle P^{t_k}, X^{t_1}\right\rangle \geq \left\langle P^{t_1}, X^{t_1}\right\rangle \left\langle P^{t_2}, X^{t_2}\right\rangle \ldots \left\langle P^{t_k}, X^{t_k}\right\rangle.$$

Доказательство предложения 3' аналогично доказательству предложения 3.

Определение 3. *Будем говорить, что обратные функции спроса* $P(X)$*удовлетворяют однородной сильной аксиоме (ОСА), если для любого набора векторов* $\{X^1, ...X^T\}$ из $\mathbb{R}_+^m$*справедливо неравенство*

$$\left\langle P(X^1), X^2\right\rangle \left\langle P(X^2), X^3\right\rangle \ldots \left\langle P(X^T), X^1\right\rangle \geq$$

$$\left\langle P(X^1), X^1\right\rangle \left\langle P(X^2), X^2\right\rangle \ldots \left\langle P(X^T), X^T\right\rangle.$$

Теорема 2. ([16], [17]) Пусть $P(X)$– *неотрицательная, непрерывная на* $\mathbb{R}_+^m$*вектор-функция, такая, что* $\langle P(X), X\rangle > 0$*при любых* $X \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Обратные функции спроса* $P(X)$*рационализируемы в классе функций полезности* Φ_0.

2. *Система линейных неравенств*

$$\lambda(Y)\left\langle P(Y), X\right\rangle \geq \lambda(X)\left\langle P(X), X\right\rangle, \quad (13)$$

   где $X \in \mathbb{R}_+^m$, $Y \in \mathbb{R}_+^m$, *имеет решение* $\lambda(X)$, *положительное и непрерывное на* $int\, \mathbb{R}_+^m$.

3. *Обратные функции спроса* $P(X)$ *удовлетворяют ОСА*

4. *Существуют такие индексы цены* $Q(P)$*и спроса* $F(X)$ *из класса* Φ_0*, что для любых* PX *выполняется неравенство* $Q(P)F(X) \leq \langle P, X\rangle$*.В случае когда* $P = P(X)$*, будет достигаться равенство* $Q(P(X))F(X) = \langle P(X), X\rangle$*.*

Следствие. *Индексы спроса* $F(X)$ и цены $Q(P)$*можно выразить следующим образом через решение* $\lambda(X)$ (13) :

$$F(X) = \lambda(X) \left\langle P(X), X \right\rangle, \qquad Q(P(X)) = \frac{1}{\lambda(X)}.$$

6. Непараметрический метод построения экономических индексов

Исходной информацией для вычисления индексов цен и спроса служит торговая статистика $\{P^t, X^t\}_{t=0}^T$ данной группы товаров, которая определяет значения обратных функций спроса в конечном числе точек $\{X^t\}_{t=0}^T$. В работах [16]-[19] рационализируемость торговой статистики понимается, как возможность продолжить ее до обратных функций спроса, рационализируемых в классе Φ_0. Теория выявленного предпочтения позволяет конструктивно проверять по торговой статистике, удовлетворяет ли она гипотезе о рациональности поведения и вычислять индексы Конюса. В основе алгоритмов проверки лежит следующая теорема, являющаяся дискретным аналогом теоремы 2.

Теорема 3. (Африата – Вериана) (см. [17], [19]). *Следующие свойства торговой статистики эквивалентны:*

1. *существует функция полезности* $F(X) \in \Phi_0$*, рационализирующая торговую статистику, то есть*

$$X^t \in Arg\max\left\{F\left(X\right) \middle| \left\langle P^t, X\right\rangle \leq \left\langle P^t, X^t\right\rangle, X \geq 0\right\};$$

2. *торговая статистика* $\{P^t, X^t\}_{t=0}^T$ *удовлетворяет ОСА, т. е. для любого упорядоченного набора моментов времени* $\{t_1, ..., t_k\} \subset \left\{\overline{0, T}\right\}$*выполняются неравенства*

$$\left\langle P^{t_1}, X^{t_2}\right\rangle \left\langle P^{t_2}, X^{t_3}\right\rangle \ldots \left\langle P^{t_k}, X^{t_1}\right\rangle \geq \left\langle P^{t_1}, X^{t_1}\right\rangle \left\langle P^{t_2}, X^{t_2}\right\rangle \ldots \left\langle P^{t_k}, X^{t_k}\right\rangle;$$

3. *существует решение* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_T) > 0$ *системы линейных неравенств:*
$$\lambda_\tau \left\langle P^\tau, X^t \right\rangle \geq \lambda_t \left\langle P^t, X^t \right\rangle, \ \tau, t = \overline{0, T}; \tag{14}$$

4. *существует функция полезности, рационализирующая торговую статистику, вида*
$$F(X) = \min_{t=\overline{0,T}} \lambda_t \langle P^t, X \rangle.$$

Отметим, что аналог теоремы Африата-Income Вериана о рационализации обратных функций спроса в классе гладких функций полезности получен в [22].

Решение системы (14) можно найти с помощью вычислительного алгоритма Варшалла – Флойда. Обозначим коэффициенты матрицы индексов цен Пааше через
$$C_{\tau\, t} = \frac{\langle P^t, X^t \rangle}{\langle P^\tau, X^t \rangle}.$$

В новых переменных система (14) имеет вид
$$\lambda_t C_{\tau\, t} \leq \lambda_\tau. \tag{15}$$

Определим $C^*_{\tau\, t}$ как максимум по всем возможным упорядоченным подмножествам $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ множества $\mathbf{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ произведений вида $C_{\tau\, t_1} C_{t_1\, t_2} \ldots C_{t_k\, t}$, считая при этом, что пустому множеству соответствует $C_{\tau\, t}$, то есть
$$C^*_{\tau\, t} = \max\{C_{\tau\, t_1} C_{t_1\, t_2} \ldots C_{t_k\, t} \mid \{t_1, t_2, \ldots, t_k\} \subset \mathbf{T}, \ k \geq 0\}$$

Из теоремы Африата – Вериана следует, что система (15) разрешима, тогда и только тогда, когда $C^*_{tt} \leq 1, \ t = \overline{0, T}$. Можно заметить, что если система (15) имеет решение, то она эквивалентна системе
$$\lambda_t C^*_{\tau t} \leq \lambda_\tau \tag{16}$$

Алгоритм Варшалла – Флойда. Рассмотрим идемпотентное полукольцо с операциями $a \oplus b = \max(a, b)$ и $a \otimes b = ab$. Тогда
$$C^* = C \oplus C^{\bullet 2} \oplus ... \oplus C^{\bullet k} \oplus ..., \tag{17}$$

где $C^{\bullet n}$ означает возведение матрицы в степень n в идемпотентном смысле (то есть все операции суммирования заменяются операцией $\oplus$ взятия максимума). Отметим, что все элементы матрицы C положительны. Если на каком-то шаге $n < T$ вычисления идемпотентных степеней выясняется, что $C^*_{tt} > 1$, то все элементы матрицы $C^* = +\infty$, и система неразрешима. В противном случае для вычисления ряда (18) достаточно ограничиться первыми T слагаемыми, и, таким образом, алгоритм вычисления C^* имеет сложность порядка T^3.

Если система (16) имеет решение, то набор переменных

$$\lambda_t = \max_{\beta=\overline{0,T}} C^*_{t\beta}, \quad t = \overline{0,T}$$

является решением системы (15), а, значит, и решением (14).

По положительному решению системы (14) можно построить временные ряды индексов потребительских цен Конюса

$$\{1/\lambda_t\}_{t=0}^T$$

и индексов спроса Конюса

$$\left\{\lambda_t \left\langle P^t, X^t \right\rangle\right\}_{t=0}^T,$$

которые учитывают изменения структуры потребления. Такой метод построения экономических индексов называется непараметрическим методом (см. [23], [24]).

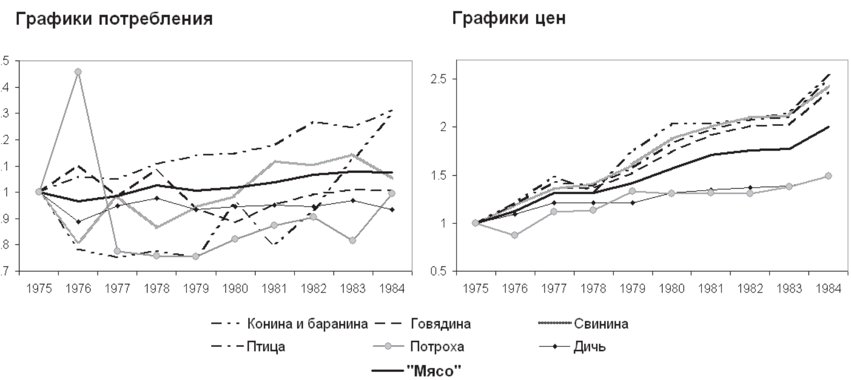

Рис. 1

В работах (см. [24]-[26]) проводились эмпирические исследования, которые показали, условия интегрируемости могут нарушаться в периоды структурных перестроек в экономике. Например, анализ торговой статистики потребления продуктов питания в Швеции за период 1921-37 годы показал, что для выполнения условий рационализируемости надо исключить из временного ряда статистику за 1933-35 годы, в которые происходила смена технологических укладов после великой экономической депрессии 30-х годов XX века. На рисунке 1 изображены исходная торговая статистика Венгрии за 1975-84 гг. и результаты вычисления индексов Конюса цен и спроса для группы мясных продуктов. Как видно из рисунка, вычисленные с помощью непараметрического метода индексы Конюса медленнее изменяются со временем, чем исходная торговая статистика. Поэтому прогнозирование следующих по времени значений торговой статистики как правило менее точно, чем прогнозирование соответствующих значений индексов цен и спроса.

7. Непараметрический метод анализа сегментации потребительского рынка и прогнозирование спроса.

В отличие от методов вычисления индексов Ласпейреса или Паше непараметрический метод построения экономических индексов может использоваться для анализа потребительского спроса.

Определение 4. *Будем говорить, что группа товаров* $Y = (Y_1, ..., Y_n)$*отделяется от остальной номенклатуры товаров* $Z = (Z_1, ..., Z_{m-n})$*, если перестановкой компонент вектор товаров* $X = (X_1, ..., X_m)$*можно представить в виде* (Y, Z)*и функция полезности представляется в виде суперпозиции* $F(X) = F_0(F_1(Y), Z)$.

Нетрудно показать (см. [25]), что если функции $F_0(\bullet)$ и $F_1(\bullet)$ непрерывно дифференцируемы, то обратные функции спроса на товары из группы Y удовлетворяют условию отделимости в следующей форме: для любых $\lambda > 0$, $Y \in int\ \mathbb{R}^n_+$, $Z \in \mathbb{R}^{m-n}_+$, $W \in \mathbb{R}^{m-n}_+$

$$\frac{P_i^Y(\lambda Y, Z)}{P_j^Y(\lambda Y, Z)} = \frac{P_i^Y(Y, W)}{P_j^Y(Y, W)}.$$

Здесь $P_i^Y(Y, Z)$ обратная функция спроса на i-ый товар из выделенной группы товаров Y.

Свойства отделимости отражают сегментацию потребительского рынка и являются важной структурной характеристикой потребительского спроса. Обычно вычисление экономических индексов статистическими службами представляет иерархически организованный, многоуровневый процесс.

Предложение 4. (см. [25]) *Пусть функция полезности* $F(X) \in \Phi_0$ *и представима как суперпозиция* $F(X) = F_0\left(F_1\left(Y^1\right), \dots, F_k\left(Y^k\right), Z\right)$, *где перестановкой компонент вектор товаров* $X = (X_1, \dots, X_m)$ *можно представить в виде* $\left(Y^1, \dots, Y^k, Z\right)$. *Здесь* $Y^1 \in \mathbb{R}_+^{n_1}, \dots, Y^k \in \mathbb{R}_+^{n_k}$, $Z \in \mathbb{R}_+^l$, $n_1 + \dots + n_k + l = m$. *Тогда преобразование Янга* $Q(P)$*функции* $F(X)$ *представляется как суперпозиция* $Q(P) = Q_0\left(Q_1\left(P^{Y,1}\right), \dots, Q_k\left(P^{Y,k}\right), P^Z\right)$, *где вектор цен* P *после той же перестановки компонент представляется в виде* $\left(P^{Y,1}, \dots, P^{Y,k}, P^Z\right)$, *а функции* $Q_0(\cdot), Q_1(\cdot), \dots, Q_k(\cdot)$ *являются преобразованиями Янга функций* $F_0(\cdot), F_1(\cdot), \dots, F_k(\bullet)$ *соответственно. Здесь* $P^{Y,1} \in \mathbb{R}_+^{n_1}, ..., P^{Y,k} \in \mathbb{R}_+^{n_k}, P^Z \in \mathbb{R}_+^l$.

Предположим, что исходная торговая статистика $\{P^t, X^t\}_{t=0}^T$ удовлетворяет однородной сильной аксиоме. Обозначим через $\Gamma(P)$ множество, состоящее из векторов $X \in \mathbb{R}_+^m$, для которых торговая статистика $\{P^t, X^t\}^T$, расширенная на набор (P, X), удовлетворяет однородной сильной аксиоме. Прогноз структуры потребления будем описывать множеством $\Gamma(P)$.

Вычислим коэффициенты

$$C_{\tau t}^* = \max_{k \geq 1, \{t_1, \dots, t_k\} \subset \{0, \dots, T\}} \left\{ \frac{\langle P^{t_1}, X^{t_1} \rangle \langle P^t, X^t \rangle}{\langle P^\tau, X^{t_1} \rangle \langle P^{t_k}, X^t \rangle} \prod_{i=2}^k \frac{\langle P^{t_i}, X^{t_i} \rangle}{\langle P^{t_{i-1}}, X^{t_i} \rangle} \right\}$$

с помощью алгоритма Варшалла – Флойда.

Предложение 5. *Пусть торговая статистика* $\{P^t, X^t\}_{t=0}^T$ *рационализируема. Положим*

$$\gamma_\tau(P) = \frac{1}{\langle P^\tau, X^\tau \rangle} \min_{t \in \{0, \dots, T\}} \left\{ \frac{\langle P, X^t \rangle}{C_{t\tau}^*} \right\}, \ \tau = 0, \dots, T.$$

Тогда

$$\Gamma(P) = \left\{ X \in \mathbb{R}_+^m \,|\, \gamma_\tau(P) \langle P^\tau, X \rangle \geq \langle P, X \rangle, \ \tau = 0, \dots, T \right\}.$$

На основе предложения 5 и прогноза суммарных потребительских расходов на товары из рассматриваемой группы товаров можно предложить следующий подход к прогнозированию спроса. На первом шаге выбирается отделимая группа товаров, содержащая номенклатуру прогнозируемых товаров. Исследуется сегментация рынка выделенных товаров. На втором шаге по торговой статистике $\left\{(P^t, X^t)\left|t = 0, ..., T\right.\right\}$ строится временной ряд потребительских расходов $\left\{\Phi^t = \langle P^t, X^t\rangle\left|t = 0, ..., T\right.\right\}$. На третьем шаге по временным рядам $\left\{P^t, \Phi^t\left|t = 0, ..., T\right.\right\}$ осуществляется прогноз потребительских расходов $\left\{\Phi^t = \langle P^t, X^t\rangle\left|t = 0, ..., T\right.\right\}$. На третьем шаге по временным рядам $\left\{P^t, \Phi^t\left|t = 0, ..., T\right.\right\}$ осуществляется прогноз потребительских расходов Φ и вектора цен P. На четвертом шаге строится конус $\Gamma(P)$, пересечение которого с гиперплоскостью $\left\{X\left|\langle P, X\rangle = \Phi\right.\right\}$ является прогнозом, основанным на гипотезе о рациональности поведения репрезентативного потребителя. Отметим, что если помимо гипотезы о рациональности поведения использовать предположение о выполнении Закона Спроса, то можно повысить точность прогноза. Модификация непараметрического метода с учетом Закона Спроса разработана в [27].

8. Условия интегрируемости в неоклассической модели спроса

Вопрос о содержательной интерпретации условий интегрируемости может быть проанализирован в терминах неоклассической модели потребительского спроса (см. [28]).

Предположим, что домашние хозяйства можно распределить по M социальным группам в соответствии со стереотипами их потребительского поведения. Стереотип поведения α-ой группы будем описывать задачей о максимизации функции полезности $u_\alpha(X) \in \Phi_1$ при бюджетном ограничении. Обозначим через $\varphi_\alpha(X)$ совокупный доход α-ой социальной группы в зависимости от цен[3] P. Индекс цен с точки зрения α-ой группы определяется с помощью преобразования Янга

$$q_\alpha(P) = \inf_{\left\{X\in\mathbb{R}^m_+\left|u_\alpha(X)>0\right.\right\}} \frac{PX}{u_\alpha(X)}.$$

В [28] показано, что дифференциальная форма суммарного спроса

[3] При изменении цен меняется стереотип потребительского поведения домашних хозяйств, происходит перераспределение их по социальным группам и изменяется совокупный доход социальных групп.

домашних хозяйств выражается в виде

$$\varpi = \sum_{j=1}^{m} X_j\left(P\right) dP_j = \sum_{\alpha=1}^{M} \frac{\varphi_\alpha\left(P\right)}{q_\alpha\left(P\right)} dq_\alpha\left(P\right).$$

Предложение 6. (см. [28]) *Для того, чтобы существовала функция полезности $F\left(X\right) \in \Phi_1$, рационализирующая суммарные функции спроса $X\left(P\right) = \left(X_1\left(P\right), ..., X_m\left(P\right)\right)$, т.е. при $P \in int\,\mathbb{R}_+^m$ выполнялось*

$$X\left(P\right) \in Arg\max\left\{F\left(Y\right) \middle| \langle P, Y\rangle \leq \sum_{\alpha=1}^{M} \varphi_\alpha\left(P\right),\, Y \in \mathbb{R}_+^m\right\},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $\Psi\left(q_1, ..., q_M\right) \in \Phi_1$, что функция $\Psi\left(q_1\left(P\right), \ldots, q_M\left(P\right)\right) \in \Phi_1$ является преобразованием Янга $F\left(X\right)$ и

$$\frac{\varphi_\alpha\left(P\right)}{\sum\limits_{\beta=1}^{M} \varphi_\beta\left(P\right)} = \frac{q_\alpha\left(P\right)}{\Psi\left(q_1\left(P\right), \ldots, q_M\left(P\right)\right)} \frac{\partial \Psi\left(q_1, \ldots, q_M\right)}{\partial q_\alpha}\bigg|_{q=q(P)}, \quad \left(\alpha = 1, \ldots, M\right).$$

Для выполнения условий интегрируемости дифференциальной формы спроса ϖ необходимо, чтобы распределение доходов по социальным группам зависело от цен косвенно через индексы цен с точки зрения разных социальных групп $\left(q_1\left(P\right), \ldots, q_M\left(P\right)\right)$:

$$\frac{\varphi_\alpha\left(P\right)}{\sum\limits_{\beta=1}^{M} \varphi_\beta\left(P\right)} = \delta_\alpha\left(q_1\left(P\right), \ldots, q_M\left(P\right)\right) \quad \left(\alpha = 1, \ldots, M\right).$$

То есть распределение доходов в обществе должно быть согласовано со сложившимися в обществе оценками уровня потребительских цен. В обществе должны действовать механизмы саморегулирования распределения доходов. В частности, рынки товаров не могут нормально функционировать, если нет рынка труда.

В рамках неоклассической модели потребительского поведения вопрос о выполнении условий интегрируемости для дифференциальной формы спроса ϖ или дифференциальной формы обратных функций спроса ω сводится к анализу условий интегрируемости дифференциальной формы

$$\chi = \sum_{\alpha=1}^{M} \frac{\delta_\alpha\left(q_1, \ldots, q_M\right)}{q_\alpha} dq_\alpha. \tag{18}$$

Рассмотрим преобразование Янга функции $\Psi(q_1,\ldots,q_M)\in\Phi_1$

$$W(u_1,\ldots,u_M)=\inf_{\{q_1\geq 0,\ldots,q_M\geq 0|\Psi(q_1,\ldots,q_M)\}}\frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{M}q_\alpha u_\alpha}{\Psi(q_1,\ldots,q_M)},$$

где $u_1,\ldots,u_M$ - значения функций полезности выделенных социальных групп.

Предложение 7. (см. [28]) *Пусть* $\Psi(q_1,\ldots,q_M)\in\Phi_1$. *Тогда*
1)

$$\left(\frac{\delta_1(q_1,\ldots,q_M)}{q_1},\ldots,\frac{\delta_M(q_1,\ldots,q_M)}{q_M}\right)\in$$

$$Arg\max\left\{W(u_1,\ldots,u_M)\,\middle|\,q_1u_1+\cdots+\cdots+q_Mu_M\leq 1,\;u_1\geq 0,\ldots,u_M\geq 0\right\},$$

где

$$\delta_\alpha(q_1,\ldots,q_M)=\frac{q_\alpha}{\Psi(q_1,\ldots,q_M)}\frac{\partial\Psi(q_1,\ldots,q_M)}{\partial q_\alpha},(\alpha=1,\ldots,M);$$

2) *для любого* $X\in\mathbb{R}_+^m$ *индекс спроса* $F(X)$ *не меньше, чем*

$$\max\left\{W(u_1(X^1),\ldots,u_M(X^M))\,\middle|\,\sum_{\alpha=1}^{M}X^\alpha=X,\;X^1\geq 0,\ldots,X^M\geq 0\right\},$$

причем равенство достигается при $X=(X_1,\ldots,X_m)$, *где*

$$X_j=\sum_{\alpha=1}^{M}\frac{\varphi_\alpha(P)}{q_\alpha(P)}\frac{\partial q_\alpha(P)}{\partial P_j}\quad(j=1,\ldots,m)$$

для некоторого $P\in int\,\mathbb{R}_+^m$.

В политической экономии рассматриваются концепции справедливого распределения доходов в обществе. Формальное выражение такая концепция получает с помощью функции Бергсона, максимум которой реализуется именно на том распределении доходов, которое соответствует избранной концепции (см. [29]). Для существования индексов цен и спроса необходимо, чтобы распределение доходов между выделенными социальными группами соответствовало функции Бергсона $W(u_1,\ldots,u_M)$ из предложения 7.

Функция Бергсона выражает компромисс экономических интересов социальных групп. Ее можно интерпретировать как политическую "партийную программу". Казалось бы, можно задавать непосредственно функциями распределения доходов $\delta_\alpha(q_1, \ldots, q_M)$ $(\alpha = 1, \ldots, M)$. Однако условия интегрируемости функций спроса обеспечивают лишь те функции распределения доходов, которые порождены какой-либо функцией Бергсона. "Партийная программа", которая не сохраняет условий интегрируемости, ведет к дезорганизации экономической системы и не может считаться конструктивной.

Для выявления функции Бергсона, соответствующей сложившемуся в обществе компромиссу в распределении доходов, необходима бюджетная статистика $\{(X^{t,\alpha}, P^t) \,|t = 0, \ldots, T; \alpha = 1, \ldots, M\}$. Здесь P^t- вектор цен в период времени t, $X^{t,\alpha}$ - вектор спроса α- ой социальной группы в период времени t. Применим непараметрический метод построения экономических индексов из раздела 7 к "торговой статистике" $\beta-$ ой социальной группы $\left\{\left(X^{t,\beta}, P^t\right) |t = 0, \ldots, T\right\}$. В результате построим индекс цены $q_\beta(P)$ с точки зрения β- ой социальной группы. Положим $u^t_\beta = \frac{\left\langle P^t, X^{t,\beta}\right\rangle}{q_\beta(P^t)}$ $(\beta = 1, \ldots, M)$. Обозначим $u^t = (u^t_1, \ldots, u^t_M)$, $q^t = (q^t_1, \ldots, q^t_M)$. Применим к временным рядам $\{u^t, q^t \,|t = 0, \ldots, T\}$, рассматриваемым как торговая статистика, непараметрический метод. В результате в качестве "индекса спроса" получим функцию Бергсона. Отметим, что для изучения социальной структуры общества по данным бюджетной статистики можно использовать методы разработанные для анализа сегментации потребительского рынка.

9. Заключение

Рассмотрим теперь вопрос об интерпретации нарушения условий рационализируемости торговой статистики. С одной стороны, причиной нарушения могут быть погрешности в построении исходной торговой статистики. В этом случае непараметрический метод и лежащая в его основе теорема Африта – Вериана могут быть обобщены (см. [17], [19], [24], [26]) за счет введения в левую часть неравенств (14) дополнительного множителя $\omega > 1$. Наименьшее значение ω, при котором система линейных неравенств (14) имеет положительное решение, характеризует степень нерационализирумости торговой статистики и является идемпотеным аналогом числа Фробениуса – Перрона (см. [24])

матрицы индексов цен Пааше $\|C_{\tau,t}\|$, где

$$C_{\tau\, t} = \frac{\langle P^t, X^t \rangle}{\langle P^\tau, X^t \rangle}.$$

Если это наименьшее значение в сравнении с элементами матрицы цен Пааше незначительно превышает единицу, то нарушение условий рационализируемости можно проинтерпретировать как следствие погрешностей в построении исходной торговой статистики.

С другой стороны, нарушение условий рационализируемости может быть следствием формирования новых потребностей и социальных отношений, например как в случае со сменой технологических укладов после Великой экономической депрессии (см. [25], §3). В этом случае, восходящая к В.Парето модель рационального репрезентативного потребителя оказывается неадекватной и должна быть заменена более общей моделью. Такая модель может быть построена на основе решения Э.Картаном задачи о приведении дифференциальной формы χк наименьшему числу переменных с необходимостью учесть ограничения на то, чтобы замены переменных удовлетворяли априорным требованиям к экономическим индексам. Такого рода обобщения результатов Э.Картана иногда называют выпуклыми теоремами Дарбу.

В рамках неоклассической модели спроса проблема интегрируемости функций спроса сведена к исследованию интегрируемости дифференциальной формы (18), построенной по функциям распределения доходов. Предположим, что функции

$$\left(\frac{\delta_1\left(q_1, \ldots, q_M\right)}{q_1}, \ldots, \frac{\delta_M\left(q_1, \ldots, q_M\right)}{q_M} \right)$$

являются трижды непрерывно дифференцируемыми, удовлетворяют закону Хикса и имеют обратные функции $\left({}_1\left(u_1, \ldots, u_M\right), \ldots, r_M\left(u_1, \ldots, u_M\right)\right)$. В [30] показано, что существуют такие функции $\left(\Psi_1\left(q_1, \ldots, q_M\right), \ldots, \Psi_k\left(q_1, \ldots, q_M\right)\right)$ и $\left(W_1\left(u_1, \ldots, u_M\right), \ldots, W_k\left(u_1, \ldots, u_M\right)\right)$ удовлетворяющие априорным требованиям к экономическим индексам, такие что в достаточно малой окрестности точек общего положения справедливы равенства

$$\chi = \sum_{\alpha=1}^{M} \frac{\delta_\alpha\left(q_1, \ldots, q_M\right)}{q_\alpha} dq_\alpha =$$

$$\sum_{s=1}^{k} G_s\left(\Psi_1\left(q_1,\ldots,q_M\right),\ldots,\Psi_k\left(q_1,\ldots,q_M\right)\right)d\Psi_s\left(q_1,\ldots,q_M\right),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{M} r_\alpha\left(u_1,\ldots,u_M\right)du_\alpha =$$

$$\sum_{s=1}^{k} R_s\left(W_1\left(u_1,\ldots,u_M\right),\ldots,W_k\left(u_1,\ldots,u_M\right)\right)dW_s\left(u_1,\ldots,u_M\right).$$

Здесь k - класс дифференциальной формы χ в окрестности рассматриваемой точки, $\left(G_1\left(\Psi_1,\ldots,\Psi_k\right),\ldots,G_k\left(\Psi_1,\ldots,\Psi_k\right)\right)$ и $\left(R_1\left(W_1,\ldots,W_k\right),\ldots,R_k\left(W_1,\ldots,W_k\right)\right)$ системы функций удовлетворяют условиям отделимости и закону Хикса.

Система функций $\left(W_1\left(u_1,\ldots,u_M\right),\ldots,W_k\left(u_1,...,u_M\right)\right)$ является обобщением на неинтегрируемый случай функции Бергсона. Будем их интерпретировать как выработанные общественным сознанием "партийные программы" справедливого распределения доходов между социальными группами. Программы выражают интересы разных коалиций социальных групп. Число коалиций может быть разным, но не может быть меньше класса дифференциальной формы. Это – наименьшее число противоборствующих интересов, которое может возникнуть в результате общественных компромиссов. Можно предположить, что партийная борьба в обществе, если она приводит к объединению "партийных программ", объективно должна вести к сокращению их числа до класса дифференциальной формы. Системы функций $\left(\Psi_1\left(q_1,\ldots,q_M\right),\ldots,\Psi_k\left(q_1,\ldots,q_M\right)\right)$ и $\left(W_1\left(u_1,\ldots,u_M\right),\ldots,W_k\left(u_1,\ldots,u_M\right)\right)$ определены не однозначно, поэтому ни одна из партий не в состоянии, вообще говоря, блокировать процесс объединения партийных программ.

Эмпирические исследования показывают, что в периоды структурной стабильности экономического развития условия интегрируемости выполняются. В это же время, как правило, социально-экономические программы различных партий оказываются близкими, что принято называть преемственностью политики. Напротив, в периоды структурной перестройки условия интегрируемости могут нарушаться, что приводит к ослаблению эффективности финансовых механизмов регулирования воспроизводства в экономики и кризисам. Одновременно с кризисами обостряется партийная борьба и изменяется партийная структура общества.

Для развитие непараметрического метода и расширения возможности применять его в случае нарушения условий интегрируемости представляет интерес решение следующей задачи. Пусть заданна торговая статистика $\{P^t, X^t\}_{t=0}^{T}$, удовлетворяющая однородной слабой аксиоме теории выявленного предпочтения.
Требуется конструктивно определить наименьшее значение класса дифференциальной формы обратных функций спроса ω для всевозможных продолжений данной торговой статистики до обратных функций спроса, определенных на всем $\mathbb{R}_+^m$ и удовлетворяющих условиям отделимости и однородной слабой аксиоме.

Список литературы

[1] *А.А. Конюс,* Проблема истинного индекса стоимости жизни // Экономический бюллетень Конъюнктурного института, 1924, № 9–10.

[2] *П. Кёвеш*, Теория индексов и практика экономического анализа. М: Финансы и статистика, 1990, 304 с.

[3] *С.А. Ашманов,* Введение в математическую экономику. // М.: Наука, 1986, 296 с.

[4] *А.А. Шананин,* Агрегированное описание группы отраслей при помощи функции приведения разных конечных продуктов к однородному продукту. // В сб. Математическое моделирование. Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986, с.106-147.

[5] *J.-P. Crouzeix* Duality between direct and indirect utility functions: differentiability properties. // Journal of Mathematical Economics, 1983, v.12, p. 149-165.

[6] Preferences, utility and demand, ed. by Chipman J., Hurwicz L., Richter M., Sonnenschein H. – Harcourt Brace Jovanovich, Inc., 1971.

[7] *А.А. Шананин,* Агрегирование конечных продуктов и проблема интегрируемости функций спроса.// М.: ВЦ АН СССР, 1986, 66 с.

[8] *Д.С. Корнюшина, А.А. Шананин,* О рационализируемости функций спроса в классе гладких положительно однородных функций полезности. // Математическое моделирование в естественных и

гуманитарных науках. Труды школы-симпозиума (Воронеж, 20-27 января 2000 г.), с.74-82.

[9] *P. Samuelson,* The problem of integrability in utility theory. - Economica (new series), 1950, v.17, №68, p. 355–385.

[10] *E. Slutsky* On the theory of the budget of the consumer. // In: Readings in price theory, ed. GStigler and K.Boulding. – Homewood, Ill, Richard D. Irwin, Inc., 1952, p.27-56.

[11] *P. Samuelson,* A note on the pure theory of customer's behavior. – Economica (new series), 1938, v.5, №17, p. 61–71.

[12] *H.S. Houthakker,* Revealed preference and the utility function - Economica (new series), 1950, v.17, №66, p. 159–174.

[13] *D. Gale,* A note on revealed preference. // Economica, 1960, v.27, №108, p.347-358.

[14] *B. Stigum,* Revealed preference – a proof of Houthakker's theorem. // Econometrica, 1973, v.41, №3, p.411-423.

[15] *J. Ville,* The existence conditions of a total utility function. // The review of economic studies, 1951-52, v.19 (2), №49, p. 123-128.

[16] *V.L. Levin* Reduced cost function and their applications // J. of Math. Econ., 1997, v.28.

[17] *Л.Я. Поспелова, А.А. Шананин,* Показатели нерациональности потребительского поведения и обобщенный непараметрический метод. // Математическое моделирование, 1998, №4, с.105–116.

[18] *S.N. Afriat,* The construction of utility functions from expenditure data // International economic review, 1967, № 7, p. 67-77.

[19] *S.N. Afriat,* On a system of inequalities in demand analysis and extension of the classical method // International economic review, 1973, v.14, 2, p. 460–472.

[20] *H. Varian,* The nonparametric approach to demand analysis // Econometrica, 1982, v.50, №4, p. 945–973.

[21] *H. Varian,* Non-parametric tests of consumer behavior // The review of economic studies, 1983, v.L(1), № 160 (1), p.99-100.

[22] *С.П. Тарасов , Шананин А.А.* О гладкости функции полезности в теореме Африата - Вериана. // Докл. АН, 2003, т. 388, №1, с.19-22.

[23] *А.А. Шананин,* Непараметрические методы анализа структуры потребительского спроса. // Математическое моделирование, № 9, 1993, с.3-16.

[24] *M. Houtman,* Nonparametric consumer and producer analysis // Dissertation № 95-32, 1995, University of Limburg, Maastricht, the Netherlands, 208 p.

[25] *С.Д. Вратенков, А.А. Шананин,* Анализ структуры потребительского спроса с помощью экономических индексов. // М.: ВЦ АН СССР, 1991, 62 с.

[26] *Л.Я. Поспелова, А.А. Шананин,* Анализ торговой статистики Нидерландов 1951–1977 гг. с помощью обобщенного непараметрического метода. //М. ВЦ РАН, 1998, 36 с.

[27] *В.А. Гребенников, А.А. Шананин,* Обобщенный непараметрический метод: Закон Спроса в задачах прогнозирования. // Математическое моделирование, 2008, №9, с.34-50.

[28] *А.А. Петров, А.А. Шананин,* Условия интегрируемости, распределение доходов и социальная структура общества. // Математическое моделирование, 1994, т.6, №8, с. 105-125.

[29] *J.S. Chipman, J.C. Moore,* On social welfare function and the aggregation of preferences. // Journal of economic theory, 1979, v.21, №1, p.111-139.

[30] *А.А. Шананин,* Об агрегации функций спроса. // Экономика и математические методы, 1989, т.35, №6, с.1095-1105.