ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 19, 2011.

ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 19, 2011

THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS
GLASNIK OF THE SECTION OF NATURAL SCIENCES, 19, 2011.

UDK 517.9

Ranislav M. Bulatović[*]

O STABILNOSTI RAVNOTEŽE I PRVIM INTEGRALIMA: EKVIVALENTNOST METODA

Sažetak

U radu su ukratko izloženi metod energije-Kazimira i metod Četajeva ispitivanja Ljapunovljeve stabilnosti ravnotežnog stanja konačnodimenzionih dinamičkih sistema. Pod dovoljno opštim pretpostavkama dokazana je ekvivalentnost ovih metoda. Primjena metoda je ilustrovana na problemu stabilizacije ravnomjernog obrtanja dinamički nesimetrične Ojlerove čigre oko srednje ose elipsoida inercije.

ON THE STABILTY OF EQUILIBRIUM AND FIRST INTEGRALS: EQUIVALENCE OF THE METHODS

Abstract

The Energy-Casimir and Chetayev methods for establishing the stability of an equilibrium state for a dynamical system are presented. Under some general assumptions, the equivalnce of these methods is proved. As an example, the problem of the stabilization of the rotation of a Euler top about the intermediate axis of inertia is considered.

[*] Mašinski fakultet Univerziteta Crne Gore

1. UVOD

Razmatra se autonomni sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} = X(x)\,,\ x \in \Re^n\,,\ X : \Re^n \to \Re^n\,, \tag{1}$$

koji zadovljava uslove jedinosti i beskonačne produživosti rješenja. Pretpostavlja se da je

$$x = x_0 \tag{2}$$

ravnotežno stanje sistema, tj. $X(x_0) = 0$.

Kaže se da je ravnotežno stanje (2) stabilno (u Ljapunovljevom smislu) ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ tako da za svako kretanje (rješenje sistema (1)) $x(t)$, koje zadovoljava uslov $\| x(0) - x_0 | < \delta$, važi $\| x(t) - x_0 | < \varepsilon$ za $t > 0$.

Prema čuvenoj Ljapunovljevoj teoremi (v.,npr, [1]), koja je jedna od osnovnih teorema direktnog metoda ispitivanja stabilnosti, ako postoji funkcija $V \in C^1(\Re^n, \Re)$ koja zadovoljava sljedeće uslove:

(i) $V(x_0) = 0$;
(ii) $V(x) > 0$, za $x \neq x_0$;
(iii) $\dot{V}(x) = X^T \partial V / \partial x \leq 0$;

ravnotežno stanje (2) sistema (1) je stabilno.

Navedena teorema nije konstruktivna u pogledu izbora Ljapunovljeve funkcije V, niti postoji neki opšti metod njenog određivanja. Ovaj nedostatak se može značajno prevazići kada jednačine (1) imaju prve integrale (konstante kretanja):

$$C : \Re^n\{x\} \to \Re,\ \dot{C} = X^T \partial C / \partial x \equiv 0\,.$$

Najprostija situacija je kada je x_0 tačka strogog (izolovanog) ekstremuma jednog prvog integral C. Tada je $V = C - C(x_0)$, odnosno $-V$, Ljapunovljeva funkcija i, dakle, ravnotežno stanje (2) je stabilno. Najstariji rezultat ovog tipa je Lagranž-Dirihleova teorema saglasno kojoj je ravnotežno stanje konzervativnog mehaničkog sistema stabilno ako u njemu potpuna energija ima strogi minimum. Na ideji Dirihleovog dokaza ovog tvrđenja, datog 1846. godine, Ljapunov je 1892. godine razvio direktni metod ispitivanja stabilnosti. U slučaju kada je poznato više međusobno nezavisnih prvih integrala od kojih nijedan nema strogi ekstremum u ravnotežnom stanju sistema, razvijeno je nekoliko metoda za ispitivanje stabilnosti.

Na Zapadu, osamdesetih godina prošlog vijeka, za Hamilton-Puasonove sisteme je razvijen metod energije-Kazimira [2] u kojem, pored hamiltonijana, kao dodatne konstante kretanja figurišu Kazimirove (centralne) funkcije – funkcije koje Puason-komutiraju sa svim funkcijama definisanim u faznom prostoru. Tridesetak godina ranije, u Sovjetskom Savezu, počeo je da se široko primjenjuje metod Četajeva [3] konstrukcije Ljapunovljeve funkcije u obliku linearne kombinacije prvih integrala i njihovih kvadrata. Oba metoda su upredno analizirana, naglašeno je da je oblast primjene metoda Četajeva šira i, kako pokazuju primjeri, jednostavnija [4].

U nedavno objavljenom radu [5] formulisana je teorema kojom se metod energije-Kazimira proširuje na opšte sisteme oblika (1) i dokazuje njena ekvivalentnost sa metodom uslovnog ekstremuma jednog od prvih integrala [6] (Raut-Ljapunovljev metod), a koji se u [5], za razliku od ustaljenog naziva, imenuje kao Arnoljdov metod. Naime, osnovna ideja ovog metoda potiče od Rauta, kasnije ju je uopštio Ljapunov, a dokaz savremene formulacije dat je u [7], [8]. Bliska veza uslova stabilnosti dobijenih metodom Četajeva i na osnovu Raut-Ljapunovljeve teoreme ustanovljena je u [9].

U ovom radu dalje će biti ukratko izloženi metod energije-Kazimira, uključujući generalizaciju [5], i metod Četajeva, a zatim će biti dokazana njihova ekvivalentnost pod pretpostavkom dvostruke neprekidne diferencijabilnosti prvih integrala, kao i pretpostavkom da se o ekstremumu njihove kombinacije, određene po metodu Četajeva zaključuje na osnovu drugog diferencijala. Primjena oba metoda ilustrovana je na netrivijalnom problemu stabilizacije obrtanja krutog tijela sa nepokretnom tačkom [10].

2. METOD ENERGIJE-KAZIMIRA

Algoritam ispitivanja stabilnosti metodom energije-Kazimira sastoji se iz sljedećih koraka [2]:

a) Neka u faznom prostoru promjenljivih $x \in \Re^n$ diferencijalne jednačine kretanja (1) dopuštaju prvi integral $H(x) = const$, koji obično predstavlja potpunu energiju sistema. Fazni prostor je snabdjeven Puasonovom strukturom, tj. na skupu realnih funkcija definisanih na faznom prostoru zadana je operacija Puasonove zagrade $\{.,.\}$, tako da se jednačine (1) mogu izraziti u Hamilton-Puasonovom obliku $\dot{F} = \{F, H\}$, gdje je $H(x)$ - hamiltonijan, a $\dot{F}$ izvod po vremenu funkcije $F(x)$.

b) Pomoću Hamiltonovog formalizma nalaze se Kazimirove funkcije, tj. funkcije $C(x)$ koje Puason-komutiraju sa proizvoljnom funkcijom definisanom na faznom prostoru sistema: $\{C, G\} = 0$, $\forall G : \Re^n \to \Re$.

c) Nalaze se sve one Kazimirove funkcije $C(x)$ za koje je prva varijacija (diferencijal) funkcije $H_C = H + C$ jednaka nuli u tački x_o: $\delta H_C(x_o) = 0$.

d) Izračunava se druga varijacija $\delta^2 H_C(x_o)$ i ako je ona definitna za neku Kazimirovu funkciju koja zadovoljava korak c), onda funkcija $V = H_C(x) - H_C(x_o)$ ispunjava uslove Ljapunovljeve teoreme formulisane u uvodnom dijelu rada, tj. ravnotežno stanje x_0 je stabilno.

Napomenimo da se ovaj postupak primjenjuje kako na konačno tako i na beskonačno dimenzione sisteme [2], ali i da za niz praktično važnih primjera Kazimirove funkcije nijesu nađene, a takođe se može desiti da one i ne postoje [4].

Iako je oblast primjene ovog metoda izvorno ograničena na Hamilton-Puasonove sisteme za koje postoje Kazimirove funkcije, kao specijalna klasa prvih integrala, metod energije-Kazimira se može jednostavno proširiti na proizvoljne sisteme oblika (1) koji dopuštaju više prvih integrala. Naime, važi sljedeće tvrđenje koje je u dolje navedenom obliku dato u radu [5].

Neka je $f \in C^2(\Re^n, \Re)$. Označimo sa $\nabla_x f(x)$ gradijent i sa $\nabla^2_{xx} f(x)$ hesijan funkcije *f* u tački $x \in \Re^n$, tj.

$$\nabla_x f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right]^T$$

i

$$\nabla^2_{xx} f(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]^n_{i,j=1}$$

Teorema 1. *Neka su* $C_1, \ldots, C_k \in C^2(\Re^n, \Re)$ *konstante kretanja sistema diferencijalnih jednačina (1). Ako se mogu naći funkcije* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C^2(\Re^n, \Re)$ *tako da su zadovoljeni sljedeći uslovi:*

$$\nabla_x (C_i + \sum_{j \neq i} \varphi_j(C_j))(x_o) = 0, \tag{3}$$

$$\nabla^2_{xx}(C_i + \sum_{j\neq i} \varphi_j(C_j))(x_o) > 0 \ (< 0), \tag{4}$$

ravnotežno stanje (2) sistema (1) je stabilno.

3. METOD ČETAJEVA

Neka su, kao u prethodnom odjeljku, funkcije

$$C_j : \Re^n\{x\} \to \Re,\ j = 1,\dots,k \tag{5}$$

prvi integrali sistema diferencijalnih jednačina (1). Po metodu Četajeva [3], Ljapunovljeva funkcija V konstruiše se u obliku pramena (связки) integrala (5)

$$V = C_i - C_i(x_o) + \sum_{j\neq i} \lambda_j (C_j - C_j(x_o) + \sum_{j\neq i} \mu_j (C_j - C_j(x_o))^2$$

Ako se realne konstante λ_j i μ_j mogu izabrati tako da funkcija V ima strogi (izolovani) ekstremum u tački $x = x_0$, onda ona zadovoljava sve uslove Ljapunovljeve teoreme i ranotežno stanje je stabilno. Kada su prvi integrali C_j dvaput neprekidno diferencijabilne funkcije, kao što pretpostavljamo u našim razmatranjima, onda se dio konstanti λ_j, ili sve one, biraju tako da se anulira zbir linearnih članova Tejlorovog razvoja funkcije V oko tačke x_0. Preostale neodređene konstante λ_j, kao i konstante μ_j, pokušavaju se izabrati tako da V ima izolovani ekstremum u tački x_0, za šta je dovoljno da Hesova matrica u tački x_0 funkcije V bude definitna.

Navedeni postupak može se sumirati u obliku sljedećeg tvrđenja.

Teorema 2. *Neka su $C_1,\dots,C_k \in C^2(\Re^n, \Re)$ konstante kretanja sistema diferencijalnih jednačina (1). Ako se realne konstante λ_j i μ_j mogu izabrati tako da budu zadovoljeni sljedeći uslovi:*

$$\nabla_x(C_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j C_j)(x_o) = 0, \tag{6}$$

$$\nabla^2_{xx}(C_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j C_j)(x_o) + \sum_{j\neq i} \mu_j \nabla_x C_j(x_0)(\nabla_x C_j(x_0))^T > 0 \ (< 0), \tag{7}$$

onda je ravnotežno stanje (2) sistema (1) stabilno.

4. EKVIVALENTNOST METODA

Teorema 3. *Neka su* $C_1,...,C_k \in C^2(\Re^n,\Re)$ *konstante kretanja sistema diferencijalnih jednačina (1). Tada su sljedeća dva tvrđenja ekvivalentna:*

(A) uslovi teoreme 1 su ispunjeni;

(B) uslovi teoreme 2 su ispunjeni.

Dokaz. „(A)$\Rightarrow$(B)" Uzimajući $\lambda_j = \varphi_j'(C_j(x_0)$ i $\mu_j = \varphi_j''(C_j(x_0)$ za $j \neq i$, lako se provjerava da je tada

$$\nabla_x(C_i + \sum_{j\neq i}\varphi_j(C_j))(x_o) \equiv \nabla_x(C_i + \sum_{j\neq i}\lambda_j C_j)(x_o),$$

kao i

$$\nabla^2_{xx}(C_i + \sum_{j\neq i}\varphi_j(C_j))(x_o) \equiv \nabla^2_{xx}(C_i + \sum_{j\neq i}\lambda_j C_j)(x_o) + \sum_{j\neq i}\mu_j \nabla_x C_j(x_0)(\nabla_x C_j(x_0))^T,$$

tj. uslovi teoreme 1 impliciraju uslove teoreme 2.

„(B)$\Rightarrow$(A)" Neka su ispunjeni uslovi teoreme 2. Uočimo funkcije $\varphi_j : \Re \to \Re$, $\varphi_j(u) = \lambda_j u + \dfrac{\mu_j}{2}(u-u_{j0})^2$, $u_{j0} = C_j(x_0)$ za $j \neq i$, gdje su λ_j i μ_j realne konstante sadržane u teoremi 2. Tada su uslovi (6) i (7) teoreme 2 identični sa uslovima (3) i (4), respektivno, teoreme 1.

Napomena. Može se pokazati [5] (v. takođe [11]) da je uslov (4) iz teoreme 1 ekvivalentan uslovu

$$\nabla^2_{xx}(C_i + \sum_{j\neq i}\varphi_j(C_j))(x_o)_W > 0,$$

gdje je

$$W = \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\{x \in \Re^n : x^T \nabla_x \varphi_j(x_0) = 0\}.$$

5. PRIMJER: STABILIZACIJA OBRTANJA KRUTOG TIJELA

Ojlerove jednačine kretanja krutog tijela s nepokretnim centrom inercije zapisuju se u sistemu glavnih osa inercije (osa elipsoida inercije) u sljedećem vektorskom obliku

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega = L, \tag{8}$$

gdje je $J = diag(J_1, J_2, J_3)$ tenzor inercije, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – vektor ugaone brzine tijela i $L = (L_1, L_2, L_3)^T$ – vektor glavnog momenta sila koje djeluju na tijelo. Ne umanjujući opštost, smatraćemo da je $I_1 > I_2 > I_3$.

Opšte je poznato da je u slučaju „slobodnog" kretanja ($L = 0$), ravnomjerno obrtanje oko srednje ose elipsoida inercije (moment inercije za nju je J_2) nestabilno, dok su obrtanja oko drugih dviju glavnih osa stabilna. Nestabilno obrtanje može se stabilizovati uvođenjem upravljačkog momenta oblika

$$L = -kJ_1J_2\omega_1\omega_2(0,0,1)^T, \tag{9}$$

gdje je k parametar povratne sprege [10].

Skalarne jednačine koje odgovaraju vektorskoj jednačini (8), (9) su:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_1}\omega_2\omega_3, \tag{10a}$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_2}\omega_1\omega_3, \tag{10b}$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3}\omega_1\omega_2 - k\frac{J_1J_2}{J_3}\omega_1\omega_2. \tag{10c}$$

Lako se pokazuje da su funkcije

$$E = \frac{1}{2}(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\frac{a_1}{a_1 - k}\omega_3^2),\ a_1 = \frac{J_1 - J_2}{J_1J_2} > 0, \tag{11}$$

i

$$M = \frac{1}{2}(J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\frac{a_1}{a_1 - k}\omega_3^2) \tag{12}$$

prvi integrali jednačina (10). S druge strane, očigledno je da jednačine (10) dopuštaju ravnotežno rješenje

$$\omega_0 = (0, \omega_{20}, 0), \omega_{20} = const \neq 0, \tag{13}$$

kojem odgovara ravnomjerno obrtanje tijela oko srednje ose elipsoida inercije.

Postavlja se pitanje: Koji uslov treba da zadovoljava koeficijent povratne sprege k da bi ravnotežno stanje (13) sistema (10) bilo stabilno? Odgovor na ovo pitanje potražićemo primjenom oba ranije razmotrena metoda, koristeći konstante kretanja (12) i (13).

a) Primjena metoda energije-Kazimira [10]

Transformacijom $m_i = \partial E / \partial \omega_i$ od promjenljivih ω_i prelazi se na nove promjenljive m_i, u kojima se integrali (11) i (12) zapisuju u obliku

$$H(m) = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2}{J_1} + \frac{m_2^2}{J_2} + \frac{m_3^2}{J_3}\frac{a_1 - k}{a_1} \right), \tag{14}$$

i

$$\widetilde{M}(m) = \frac{1}{2}\left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \frac{a_1 - k}{a_1} \right), \tag{15}$$

a jednačine kretanja razmatranog sistema su Hamilton-Puasonovog tipa

$$\dot{m}_i = \{m_i, H\}\,,\ i = 1,2,3, \tag{16}$$

u Puasonovoj strukturi $\Re^3\{m\}$ sa zagradom

$$\{F, G\} = -\nabla \widetilde{M} \cdot (\nabla F \times \nabla G). \tag{17}$$

Ravnomjernom obrtanju (13) odgovara ravnotežno rješenje

$$m_0 = (0, m_{20}, 0)\,,\ m_{20} = J_2 \omega_{20} \tag{18}$$

sistema jednačina (16), (17).

Pošto je $\{\widetilde{M}, F\} = 0, \forall F \in C^2(\Re^3, \Re)$, to je $C = \varphi(\widetilde{M})$, φ - bilo koja C^2 funkcija, Kazimirova funkcija u Puasonovoj strukturi (17).

Prva varijacija funkcije $H_C = H + C$ je

$$\delta H_C = (J_1^{-1} + \varphi^{/})m_1 \delta m_1 + (J_2^{-1} + \varphi^{/})m_2 \delta m_2 + ((a_1 - k)a_1^{-1}J_3^{-1} + a_1\varphi^{/}(a_1 - k)^{-1})m_3 \delta m_3,$$

što je u (18) jednako nuli, ako se funkcija φ izabere tako da je njen izvod $\varphi^{/} = -J_2^{-1}$ za $\widetilde{M} = \widetilde{M}(m_0)$. Neka je funkcija φ izabrana tako da zadovoljava ovaj uslov. Tada je druga varijacija funkcije H_C u tački (18):

$$\delta^2 H_C = -a_1(\delta m_1)^2 + \varphi^{//}\frac{m_{20}^2}{2}(\delta m_2)^2 + a_1^{-1}a_2(a_1 - k)(\delta m_3)^2,\ a_2 = \frac{J_2 - J_3}{J_2 J_3} > 0. \tag{19}$$

Zahtjev da druga varijacija (19) bude definitna je zadovoljen samo onda kada je drugi izvod funkcije φ za $\widetilde{M} = \widetilde{M}(m_0)$ negativan (očigledno, takva funkcija postoji) i $k > a_1$, jer su a_1 i a_2 pozitivne veličine.

Prema tome, metod energije-Kazimira baziran na integralima (11), (12) daje da je $k > a_1$ uslov stabilizacije obrtanja tijela oko srednje ose inercije.

b) Primjena metoda Četajeva

Primijenimo teoremu 2 na integrale (11) i (12). Prvo nalazimo

$$\nabla_\omega (E + \lambda M)(\omega_0) = (0, J_2\omega_{20}(1 + \lambda J_2), 0)^T,$$

što je nula vektor samo ako je $\lambda = -J_2^{-1}$, jer je $\omega_{20} \neq 0$. Za ovu vrijednost parametra λ lako se dobija da je

$$\nabla^2_{\omega\omega}(E + \lambda M)(\omega_0) + \mu \nabla_\omega M(\omega_0)(\nabla_\omega M(\omega_0))^T =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{J_1}{J_2}(J_2 - J_1) & 0 & 0 \\ 0 & \mu J_2^4 \omega_{20}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_1 J_3 (J_2 - J_3)}{J_2(a_1 - k)} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Pošto je $J_2 - J_1 < 0$, matrica (20) je definitna samo kada je $\mu < 0$ i $k > a_1$, što se poklapa sa prethodno dobijenim uslovom na osnovu metoda energije – Kazimira.

Literatura

[1] A. Bakša, M. Vesković; *Stabilnost kretanja*, Matematički fakultet Beograd, 1996.

[2] D. Holm, J. Marsden, T. Ratiu, A. Weinstein; Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria, Physics reports, Vol 123, No 1 and 2, (1985), 1-116.

[3] Н. Г. Четаев; Устойчивостъ движения. Работы по аналитической механике, АН СССР, Москва, 1962.

[4] V. V. Rumyantsev; A comparison of three methods of constructing Lyapunov functions, J. Appl. Maths Mechs, Vol. 59, No 6 (1995), 873-877.

[5] P. Birtea, M. Puta; Equivalence of energy methods in stability theory, J. Math. Phys., Vol 48, No 4 (2007), 81-99.

[6] V. I. Arnold; Conditions for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid, Doklady, Tome 162, No 5 (1965), 773-777.

[7] L. Salvadori; Un'osservayione su di un criteriodi stabilita del Routh, Rend. Accad. Sci. Napoli, Vol 20 (1953),269-273.

[8] G. K. Pozharitskii; On the construction of the Liapunov functions from the integrals of the equations of perturbed motion, J. Appl. Maths Mechs, Vol 22, No 2 (1958),145-154.

[9] V. N. Rubanovskii, S. Ia. Stepanov; On the Routh theorem and the Chetaev method for constructing the Liapunov function from the integrals of the equations of motion, J. Appl. Maths Mechs, Vol 33, No 5 (1969), 882-890.
[10] A. M. Bloch, J. E. Marsden; Stabilization of rigid body dynamics by the Energy-Casimir method, Systems and Control Letters, 16 (1990), 341-346.
[11] J. P. Ortega, T. Ratiu; Nonlinear stability of singular relative periodic orbits in Hamiltonian systems with symmetry, J. Geom. Phys., Vol 32 (1999), 160-188.